

Аналитическое определение амплитудно-частотной характеристики одной нелинейной виброзащитной системы с роликовым гасителем

В. П. Легеза

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина

Рассматривается динамическое поведение одной нелинейной виброзащитной системы с роликовым гасителем низкочастотных колебаний. С использованием метода осреднения Ритца получено уравнение амплитудно-частотной характеристики нелинейной системы. Предложен новый графический метод определения параметров настройки роликового гасителя.

Ключевые слова: виброзащитная система, роликовый гаситель, амплитудно-частотная характеристика, метод осреднения Ритца, параметры настройки.

Введение. Ранее [1] была построена математическая модель динамического поведения виброзащитной системы с роликовым гасителем (рис. 1), входящим в состав виброзащитной системы. Роликовый гаситель относится к классу катковых гасителей, и его конструкция защищена патентами Украины [2, 3]. Гасители каткового типа используются для виброзащиты высотных гибких сооружений и объектов от действия низкочастотных вынужденных колебаний [4] с частотами меньше 1,6 рад/с. Наиболее опасными вынужденными колебаниями для таких объектов, особенно цилиндрической формы, являются колебания вдоль (пульсация давления ветра) и поперек (типа “ветровой резонанс”) ветрового потока [4, 5]. В некоторых случаях у сооружений с аэродинамически неустойчивой геометрической формой возникают колебания типа “флаттер” или “бафтинг” [6–8]. В этих условиях динамические гасители вынужденных колебаний – основной способ повышения надежности и долговечности сооружения [8, 9].

Кроме того, виброзащитные системы с качением, подобные катковым гасителям, с успехом используются для амортизации и виброзащиты таких разнообразных объектов и конструкций, как подводные лодки и крупнотоннажные корабли – от действия гидродинамических сил, которые вызывают их боковую качку, ответственные сооружения на массивных фундаментах [10, 11] – от действия сейсмозбуждения и прогрессивные строительные конструкции – от продольных динамических нагрузок при их железнодорожном транспортировании.

В математической модели [1] были получены нелинейные динамические уравнения движения виброзащитной системы и численно проанализировано влияние двух основных параметров настройки гасителя на ее динамическое поведение. Настоящая работа, в которой разработана методика аналитического построения уравнения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) указанной виброзащитной системы с учетом всех ее нелинейностей, является продолжением и обобщением результатов предыдущего исследования [1].

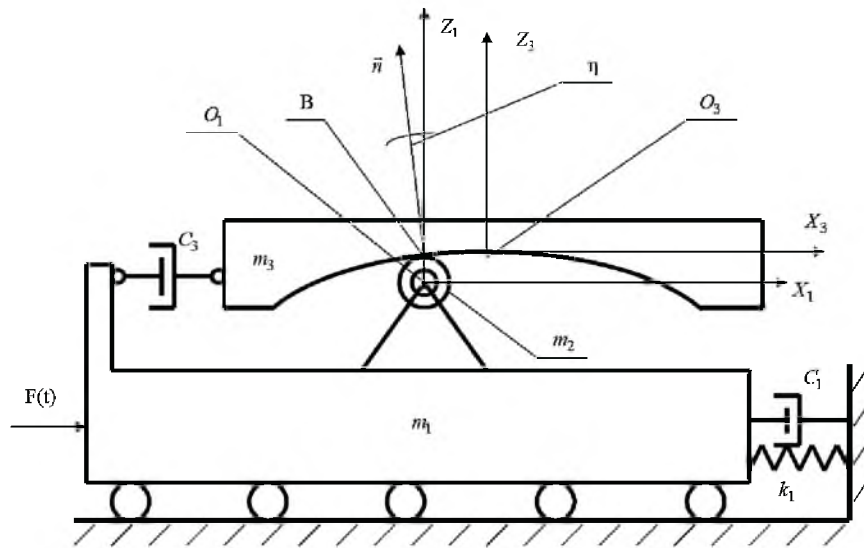


Рис. 1. Принципиальная схема виброзащитной системы с роликовым гасителем.

Проведенный в [1] численный анализ математической модели динамического поведения виброзащитной системы с роликовым гасителем показал, что технические преимущества его использования состоят в двукратном уменьшении относительного вертикального перемещения рабочего тела гасителя по сравнению с таковым каткового гасителя типа “тяжелый шар между двумя тяжелыми сферическими выемками”. Это свидетельствует о том, что роликовый гаситель является более компактным, что позволяет устанавливать его в местах с ограниченным (в вертикальном направлении) пространством для функционирования. Кроме того, в сферических выемках роликового гасителя со временем не накапливаются влага, лед, пыль и для его защиты от разнообразных климатических воздействий не требуется защитный кожух.

Отмеченные преимущества рассматриваемого гасителя обуславливают перспективность его внедрения в современную практику виброзащиты высотных сооружений. Уточнение и обобщение математической модели динамического поведения гасителя в составе системы гаситель–сооружение с учетом всех ее нелинейностей является актуальной задачей.

Постановка задачи. Рассматривается динамическое поведение нелинейной виброзащитной системы несущее тело с приведенной массой m_1 – тяжелый ролик массой m_2 – рабочее тело массой m_3 под действием внешнего силового нагружения $F(t)$ (рис. 1). В качестве внешнего силового нагружения принимаются гармонические силы, которые действуют как вдоль, так и поперек ветрового потока с соответствующими амплитудами. Например, гармоническая сила, действующая поперек ветрового потока и вызывающая автоколебания, определяется формулой [7]

$$F(t) = C_k \frac{\rho V^2 S}{2} \sin(\omega t),$$

где S – площадь проекции препятствия на плоскость, ортогональную к направлению ветрового потока; C_k – коэффициент, зависящий от формы препятствия (для кругового цилиндра $C_k = 1$); ρ – плотность воздуха.

Для кругового цилиндра частота отрыва воздушных вихрей определяется по выражению

$$\omega = \frac{0,22V}{2\pi D} \quad (\text{рад/с}),$$

где V – скорость ветрового потока (м/с); D – диаметр цилиндра (м); коэффициент 0,22 – число Струхала для данного типа конструкции.

С учетом вышеизложенного полагаем, что виброзащитная система находится под действием внешнего силового возбуждения, заданного в виде гармонической функции стабильной частоты $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$.

На нижней поверхности рабочего тела имеется сферическая выемка радиусом R для перекачивания без скольжения ролика радиусом r . Радиус ролика r меньше радиуса сферической выемки ($r \ll R$). Ролик связан с несущим телом с помощью сферического шарнира, причем он является главным элементом такого гасителя. В этой системе нелинейность обусловлена как геометрическим (сферическая рабочая поверхность), так и кинематическим (непроскальзывание) факторами.

Несущее тело моделирует сооружение или строительную конструкцию, колебания которых учитываются только по первой форме с частотой основного тона ω_0 . Это объясняется тем, что вынужденные колебания по первой форме играют главную роль в динамическом нагружении таких сооружений. Поэтому практическое применение виброгасителей для указанных сооружений связано с использованием одномассовых гасителей колебаний, настроенных на частоту, близкую к частоте основного тона собственных колебаний сооружения [4, 5, 9].

Между несущим телом массой m_1 и рабочим телом массой m_3 установлен демпфер с коэффициентом вязкого сопротивления C_3 . Несущее тело может двигаться только вдоль горизонтальной оси O_1X_1 , этому движению препятствуют упругий элемент с приведенным коэффициентом жесткости k_1 и демпфер с приведенным коэффициентом вязкого сопротивления C_1 . Последний введен для учета демпфирования, обусловленного силами внутреннего трения в материалах вертикального ствола сооружения. Ранее [1] для сравнительного численного анализа линейной и нелинейной моделей коэффициент C_1 принимался равным нулю. Рабочее тело может совершать только поступательные движения в плоскости $X_3O_3Z_3$. В точке контакта ролика со сферической поверхностью реализуется кинематическая связь, учет которой осуществляется с помощью подхода, основанного на формализме Аппеля [12, 13].

Используемые скалярные уравнения кинематической связи имеют вид ($\bar{R} = R - r$):

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_1 - \bar{R}\dot{\eta} \cos(\eta);$$

$$\dot{z}_3 = \bar{R}\dot{\eta} \sin(\eta).$$

Функция ускорений Апшеля в независимых обобщенных координатах, используемая при выводе динамических уравнений, такова:

$$S^* = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} \dot{x}_1^2 + (0,2m_2 + 0,5m_3)\bar{R}^2\dot{\eta}^2 + m_3\bar{R}\dot{x}_1(\dot{\eta}^2 \sin \eta - \dot{\eta} \cos \eta).$$

Цель настоящего исследования заключалась в построении аналитического выражения уравнения АЧХ виброзащитной системы с учетом ее геометрической и кинематической нелинейности и в сравнительном анализе его с уравнением АЧХ в линейной постановке при $C_1 \neq 0$.

Вывод уравнения АЧХ виброзащитной системы с учетом всех ее нелинейностей. В работе [1] были получены нелинейные дифференциальные уравнения движения виброзащитной системы в виде

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 + k_1x_1 + C_1\dot{x}_1 + m_3\bar{R}(\dot{\eta}^2 \sin \eta - \dot{\eta} \cos \eta) &= F_0 \sin(\omega t); \\ -m_3\bar{R}\dot{x}_1 \cos \eta + (0,4m_2 + m_3)\bar{R}^2\ddot{\eta} + \bar{R}^2C_3\dot{\eta} &= \\ = -m_3\bar{R}g \sin \eta - (m_2 + m)\bar{R}g\mu \operatorname{sign}(\dot{\eta}). \end{aligned}$$

Круговую частоту центра масс (ЦМ) рабочего тела с учетом размеров ролика и его массы можно найти из второго уравнения при $x_1(t) \equiv 0$; $\mu = 0$; $n_\eta = 0$ по такой формуле:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{(0,4\gamma + 1)\bar{R}}},$$

где $\gamma = m_2/m_3$. При $\gamma \rightarrow 0$ это выражение совпадает с формулой, полученной в [11] при ином подходе.

После некоторых преобразований при $m_2/m_3 \rightarrow 0$, $m_2/m_1 \rightarrow 0$ представленные выше уравнения принимают следующий вид:

$$(1 + \nu)\ddot{x}_1 + 2n_X\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1 - \nu\bar{R} \cos \eta \dot{\eta} + \nu\bar{R} \sin \eta \dot{\eta}^2 = \bar{F}_0 \sin(\omega t); \quad (1)$$

$$\dot{x}_1 \cos \eta = \bar{R}\ddot{\eta} + 2n_\eta\bar{R}\dot{\eta} + g(\sin \eta + \mu \operatorname{sign} \dot{\eta}), \quad (2)$$

где $2n_X = C_1/m_1$; $2n_\eta = C_3/m_3$; $\nu = m_3/m_1$; $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$; $\bar{F}_0 = F_0/m_1$; μ – коэффициент трения в сферическом шарнире ролика; обобщенная координата η представляет собой угол между вертикалью O_1Z_1 и нормалью \bar{n} к сферической поверхности рабочего тела гасителя, проведенной в точке контакта ролика с указанной сферической поверхностью (рис. 1); x_1 – перемещение несущего тела вдоль оси O_1X_1 .

С целью отработки методики построения АЧХ нелинейной виброзащитной системы разложим в ряд Тейлора тригонометрические функции $\sin \eta$ и $\cos \eta$ и удержим по два члена для каждой из них. Затем полученные отрезки рядов подставим в уравнения (1), (2):

$$(1 + \nu)\ddot{x}_1 + 2n_X \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \nu \bar{R} \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \dot{\eta} + \nu \bar{R} \left(\eta - \frac{\eta^3}{6}\right) \dot{\eta}^2 = \bar{F}_0 \sin(\omega t); \quad (3)$$

$$\ddot{x}_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) = \bar{R} \dot{\eta} + 2n_\eta \bar{R} \dot{\eta} + g \left(\eta - \frac{\eta^3}{6}\right) + g\mu \operatorname{sign} \dot{\eta}. \quad (4)$$

Для построения нелинейной модели динамики виброзащитной системы используем подход, известный как метод осреднения Ритца [14–16]. В основу метода положено предположение о том, что для установившихся колебаний среднее значение виртуальной работы на элементарных перемещениях всех масс системы за один период равно нулю. При использовании метода осреднения Ритца приближенное решение задачи о вынужденных колебаниях для каждой обобщенной независимой координаты задается в виде ряда

$$X(t) = A_1 \psi_1(t) + A_2 \psi_2(t) + A_3 \psi_3(t) + \dots = \sum_{i=1}^n A_i \psi_i(t), \quad (5)$$

где $\psi_i(t)$ – функции времени, выбираемые из условия задачи; A_i – весовые коэффициенты, определяемые из условия равенства нулю среднего значения виртуальной работы за один период.

Обычно для приближенного решения задачи ограничиваются одним-двумя членами ряда (5), что дает очень хорошие результаты. Этот метод позволяет получить более точное решение, чем метод последовательных приближений [14, 17], при том же количестве учтенных членов ряда (5). Метод осреднения Ритца успешно применялся для разнообразных задач по исследованию установившихся свободных и вынужденных колебаний нелинейных систем. Высокая точность была достигнута уже при использовании одночленного приближения для систем с восстанавливающими силами, которые описываются симметричными непрерывными и кусочно-линейными функциями [16]. Позже аналогичный метод на основе разложения в ряды, подобные (5), был независимо разработан и применен для расчета пластин и стержней Б. Г. Галеркиным [18]. (В отечественных и российских литературных источниках он упоминается как метод Галеркина [19, 20].)

Для нахождения установившегося решения поставленной задачи в качестве первого приближения выберем следующие функции (для каждой независимой обобщенной координаты):

$$\begin{aligned} x_1 &= A(\omega) \sin(\omega t - \alpha) = A \cos \alpha \sin(\omega t) + (-A \sin \alpha) \cos(\omega t) = \\ &= A_1 \psi_1(t) + A_2 \psi_2(t); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \eta &= B(\omega) \sin(\omega t - \beta) = B \cos \beta \sin(\omega t) + (-B \sin \beta) \cos(\omega t) = \\ &= B_1 \psi_1(t) + B_2 \psi_2(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Как следует из формул (6) и (7), в качестве функций $\psi_i(t)$ выбраны две функции: $\psi_1(t) = \sin(\omega t)$ и $\psi_2(t) = \cos(\omega t)$.

Подставив формулы (6) и (7) в уравнения (3), (4), получим следующую систему уравнений:

$$2n_X A \omega \cos(\omega t - \alpha) - (1 + \nu) \omega^2 A \sin(\omega t - \alpha) + A \omega_0^2 \sin(\omega t - \alpha) + \\ + \nu \bar{R} B \omega^2 \left(1 - \frac{B^2}{2} \sin^2(\omega t - \beta) \right) \sin(\omega t - \beta) + \\ + \nu \bar{R} B^3 \omega^2 \left(1 - \frac{B^2}{6} \sin^2(\omega t - \beta) \right) \sin(\omega t - \beta) \cos^2(\omega t - \beta) = \bar{F}_0 \sin(\omega t); \quad (8)$$

$$\omega^2 A \sin(\omega t - \alpha) \left(1 - \frac{B^2}{2} \sin^2(\omega t - \beta) \right) = \\ = \bar{R} B \omega^2 \sin(\omega t - \beta) - 2n_\eta \bar{R} B \omega \cos(\omega t - \beta) - \\ - g \left(B \sin(\omega t - \beta) - \frac{B^3}{6} \sin^3(\omega t - \beta) + \mu \operatorname{sign}(\cos(\omega t - \beta)) \right). \quad (9)$$

Умножим уравнения (8), (9) сначала на $\sin(\omega t)$ и проинтегрируем их в пределах $0 \dots 2\pi$. Затем эту же процедуру повторим после умножения указанных уравнений на $\cos(\omega t)$. На этапе преобразований были использованы следующие промежуточные формулы:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta) \sin \psi d\psi = \frac{\cos \theta}{2}; \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \theta) \sin \psi d\psi = \frac{\sin \theta}{2}; \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta) \cos \psi d\psi = -\frac{\sin \theta}{2}; \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \theta) \cos \psi d\psi = \frac{\cos \theta}{2}; \quad (13)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3(\psi - \theta) \sin \psi d\psi = \frac{3}{8} \cos \theta; \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3(\psi - \theta) \cos \psi d\psi = -\frac{3}{8} \sin \theta; \quad (15)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^5(\psi - \theta) \sin \psi d\psi = \frac{5}{16} \cos \theta; \quad (16)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^5(\psi - \theta) \cos \psi d\psi = -\frac{5}{16} \sin \theta; \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta_1) \sin^2(\psi - \theta_2) \sin \psi d\psi = \frac{3}{8} \cos \theta_1 + \frac{1}{4} \sin \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2); \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta_1) \sin^2(\psi - \theta_2) \cos \psi d\psi = -\frac{3}{8} \sin \theta_1 + \frac{1}{4} \cos \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (19)$$

где $\psi = \omega t$.

После соответствующих преобразований уравнений (8), (9) с использованием (10)–(19) получим четыре алгебраически-тригонометрических уравнения:

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2) A \cos \alpha + 2n_X A \omega \sin \alpha + \nu \bar{R} B \omega^2 \cos \beta - \\ & - \frac{1}{8} \nu \bar{R} B^3 \omega^3 \cos \beta - \frac{1}{48} \nu \bar{R} B^5 \omega^2 \cos \beta = \bar{F}_0; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & 2n_X A \omega \cos \alpha - (\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2) A \sin \alpha - \nu \bar{R} B \omega^2 \sin \beta + \\ & + \frac{1}{8} \nu \bar{R} B^3 \omega^2 \sin \beta + \frac{1}{48} \nu \bar{R} B^5 \omega^2 \sin \beta = 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \omega^2 A B^2 \left(\frac{3}{8} \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin \beta \sin(\alpha - \beta) \right) - \omega^2 A \cos \alpha + \bar{R} B \omega^2 \cos \beta - \\ & - 2n_\eta \bar{R} B \omega \sin \beta - g B \cos \beta + \frac{g B^3}{8} \cos \beta - \frac{4\mu g \sin \beta}{\pi} = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \omega^2 A \sin \alpha + \omega^2 A B^2 \left(\frac{1}{4} \cos \beta \sin(\alpha - \beta) - \frac{3}{8} \sin \alpha \right) - \\ & - \bar{R} B \omega^2 \sin \beta - 2n_\eta \bar{R} B \omega \cos \beta + g B \sin \beta - \frac{g B^3}{8} \sin \beta - \frac{4\mu g \cos \beta}{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

При выводе выражений (22), (23) учитывались соотношения (24)–(26):

$$\text{sign}(\cos(\psi - \beta)) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} + \beta, \\ -1, & \frac{\pi}{2} + \beta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} + \beta, \\ 1, & \frac{3\pi}{2} + \beta \leq \psi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}(\cos(\psi - \theta)) \sin \psi d\psi = \frac{2 \sin \theta}{\pi}; \quad (25)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}(\cos(\psi - \theta)) \cos \psi d\psi = \frac{2 \cos \theta}{\pi}. \quad (26)$$

Исключим лишние неизвестные B , α , β и определим функциональную зависимость амплитуды A установившихся колебаний несущего тела от частоты ω . Умножим уравнение (22) на $\sin \beta$, (23) – на $\cos \beta$ и сложим их. В результате получим

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{2n_{\eta} \bar{R} B \omega + \frac{4\mu g}{\pi}}{A \omega^2 \left(1 - \frac{1}{8} B^2\right)}. \quad (27)$$

Затем умножим уравнение (22) на $\cos \beta$, (23) – на $\sin \beta$, после чего из первого вычтем второе:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\left(g - \bar{R} \omega^2 - \frac{g B^2}{8}\right) B}{A \omega^2 \left(-1 + \frac{3}{8} B^2\right)}. \quad (28)$$

После некоторых преобразований соотношений (27) и (28) получим первое уравнение, которое связывает амплитуды A и B :

$$A = \frac{1}{\omega^2 \left(1 - \frac{1}{8} B^2\right) \left(1 - \frac{3}{8} B^2\right)} \left(\left(\left(2n_{\eta} \bar{R} B \omega + \frac{4\mu g}{\pi} \right) \left(1 - \frac{3}{8} B^2\right) \right)^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{8} B^2\right) \left(Bg - B\bar{R} \omega^2 - \frac{1}{8} g B^3 \right) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Найдем второе уравнение, которое связывает указанные амплитуды. Умножим уравнение (20) на $\sin \beta$, (21) – на $\cos \beta$ и сложим их. В результате получим

$$2n_X A \omega \cos(\alpha - \beta) - [\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2] A \sin(\alpha - \beta) = \bar{F}_0 \sin \beta. \quad (30)$$

Затем умножим уравнение (20) на $\cos \beta$, (21) – на $\sin \beta$, после чего из первого уравнения вычтем второе. В результате получим еще одно соотношение относительно неизвестных A , B , α , β :

$$[\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2] A \cos(\alpha - \beta) + 2n_X A \omega \sin(\alpha - \beta) + \Phi(B) = \bar{F}_0 \cos \beta, \quad (31)$$

где

$$\Phi(B) = \nu \bar{R} B \omega^2 \left(1 - \frac{1}{8} B^2 - \frac{1}{48} B^4 \right).$$

Возведем в квадрат соотношения (30), (31) с учетом выведенных выше (27) и (28), после чего получим еще одно уравнение, которое связывает амплитуды A и B :

$$A = \frac{1}{\sqrt{[\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2]^2 + (2n_X \omega)^2}} \times$$

$$\times \left[\bar{F}_0^2 - \Phi^2(B) - 2\Phi(B) \left[[\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2] \frac{B(g - \bar{R}\omega^2) - \frac{1}{8}gB^3}{\omega^2 \left(-1 + \frac{3}{8}B^2 \right)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 4n_X \frac{n_\eta \bar{R} B \omega + \frac{2\mu g}{\pi}}{\omega \left(1 - \frac{B^2}{8} \right)} \right]^{1/2}. \quad (32)$$

Из уравнений (29) и (32) невозможно в явном виде получить зависимость $B = B(A)$. Поэтому сначала выразим амплитуду B как функцию частоты $B = B(\omega)$ с помощью выражений (29) и (32). В результате получим нелинейное уравнение относительно неявно заданной функции $B = B(\omega)$, которое имеет следующий обобщенный вид:

$$F(B(\omega), \omega) = 0. \quad (33)$$

Точное аналитическое решение данного уравнения относительно функции $B(\omega)$ получить невозможно, однако его можно найти численно в

нужном (резонансном) диапазоне частот с использованием таких современных пакетов прикладных программ, как “МАТНСАД” [21]. После численного установления зависимости $B = B(\omega)$ из формул (29) или (32) можно определить искомую амплитудно-частотную характеристику $A = A(\omega)$ виброзащитной системы в нелинейной постановке.

В таких системах возможны нелинейные резонансы, которые определяются соотношением $\sum_{i=0}^k n_i \omega_i + n\omega \approx \varepsilon$ [22], где ω_i – собственные частоты, соответствующие независимым координатам системы; ω – частота внешней силы; n_i, n – небольшие числа; $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако нами рассматривается следующий случай: $1 \cdot \omega_0 \pm 0 \cdot \omega_1 \pm 1 \cdot \omega \approx \varepsilon$. На это соотношение указывал Н. П. Плахтиенко.

Для дальнейшего сравнительного анализа будем использовать выражение для АЧХ виброзащитной системы в линейной постановке. Не приводя громоздких преобразований, записываем ее уравнение при $\mu = 0$ и $C_1 \neq 0$:

$$A(\omega) = \frac{\bar{F}_0 \sqrt{F_6(\omega)}}{\sqrt{F_6(\omega)F_7(\omega) + F_9(\omega) + F_{10}(\omega)}}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \omega_0^2 - \omega^2(1 + \nu); & F_2(\omega) &= 2n_X \omega; & F_3(\omega) &= g - \bar{R}\omega^2; \\ F_4(\omega) &= 2n_\eta \bar{R}\omega; & F_5(\omega) &= \nu \bar{R}\omega^4; & F_6(\omega) &= (F_3(\omega))^2 + (F_4(\omega))^2; \\ F_7(\omega) &= (F_1(\omega))^2 + (F_2(\omega))^2; & F_8(\omega) &= F_2(\omega)F_4(\omega) - F_1(\omega)F_3(\omega); \\ F_9(\omega) &= 2F_5(\omega)F_8(\omega); & F_{10}(\omega) &= (F_5(\omega))^2. \end{aligned}$$

При $\omega_0 = 0$, $n_X = 0$, $\nu \rightarrow 0$, $\mu = 0$, $n_\eta = 0$ рассматриваемая система превращается в осциллятор Дуффинга [14, 19]. Амплитудно-частотная характеристика системы (в виде $\omega = \omega(B)$) в таком случае преобразуется следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{1}{R} \left(g - \frac{gB^2}{8} - \frac{\bar{F}_0}{B} \right). \quad (35)$$

В результате получено обратное уравнение АЧХ (35) для системы Дуффинга с мягкой восстанавливающей силой $F(B) = \frac{g}{R} \left(B - \frac{B^3}{8} \right)$, приведенной к единице коэффициента инерции (по аналогии с классификацией пружин по виду силовых характеристик). Это естественным образом вытекает из двучленного разложения в ряды Тейлора геометрических нелинейностей в уравнениях (1), (2).

Определение оптимальных параметров настройки гасителя для линейной и нелинейной модели исследуемой виброзащитной системы. Характер динамического поведения рассматриваемой виброзащитной системы с роликовым гасителем и оптимальные параметры его настройки можно определить с помощью графиков амплитудно-частотных характеристик $A = A(\omega)$ для несущего тела. В процессе численных исследований были получены амплитудно-частотные характеристики для двух динамических моделей виброзащитной системы: линейной с $C_1 \neq 0$ (согласно уравнению (34)) и нелинейной с учетом геометрической и кинематической нелинейности (согласно уравнениям (29), (32)).

Для этих расчетов и построения АЧХ были выбраны следующие параметры системы: $\bar{R} = 7,643$ м; $n_\eta = 0,16$ с⁻¹; $n_X = 0,03$ с⁻¹; $\nu = 0,05$; $\omega_0 = 1,2$ рад/с; $\bar{F}_0 = 0,03g$; $\mu = 0$.

Максимальная амплитуда ($\bar{F}_0 = 0,03g$) внешнего силового нагружения и уровень демпфирования несущего тела ($n_X = 0,03$) определялись с использованием нормативных документов строительной отрасли [4, 5, 23]. Первые два параметра, являясь оптимальными для линейной модели, определялись из условия равенства двух максимумов функции $A = A(\omega)$ с учетом демпфирования несущего тела ($n_X \neq 0$). Процедура их определения изложена ниже.

Параметр \bar{R} находим численно с помощью графической процедуры, показанной на рис. 2. Сначала устанавливаем частоты, на которых достигаются максимумы АЧХ:

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{1+\nu} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\nu}{2+\nu}} \right),$$

где $\gamma_{1,2} = \omega_{1,2} / \omega_0$.

Точка пересечения двух кривых, построенных при изменении \bar{R} для двух фиксированных частот $\omega_1 = \gamma_1 \omega_0 = 1,07$ рад/с и $\omega_2 = \gamma_2 \omega_0 = 1,26$ рад/с, при которых функция $A = A(\omega)$ достигает максимума дважды, определяет оптимальный параметр гасителя $\bar{R}_{\text{опт}} = 7,643$ м. Величина коэффициента n_η определялась также с помощью аналогичной процедуры по графикам, представленным на рис. 3. Точка пересечения двух кривых, построенных для двух фиксированных частот $\omega_1 = 1,07$ рад/с и $\omega_2 = 1,26$ рад/с при изменении коэффициента n_η , определяет оптимальную величину последнего: 0,16.

Аналогично с использованием графической процедуры (рис. 4 и 5) были определены оптимальные величины для \bar{R} (7,41 м) и n_η (0,16) для нелинейной модели, построенной по уравнениям (3), (4). Сравнение результатов оптимальной настройки гасителя для линейной и нелинейной модели показало, что величины оптимальных радиусов отличаются примерно на 3%. Что касается уровня демпфирования, то оптимальные величины коэффициента n_η для этих моделей совпадают.

На рис. 6 приведены графики АЧХ системы для двух типов моделей: $AL = AL(\omega)$ – для линейной модели и $AN = AN(\omega)$ – для нелинейной модели согласно уравнениям (29), (32). Каждая кривая была построена при своих оптимальных параметрах.

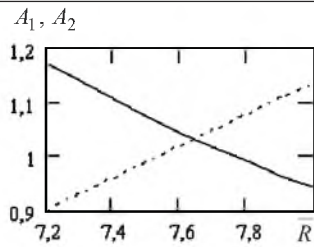


Рис. 2

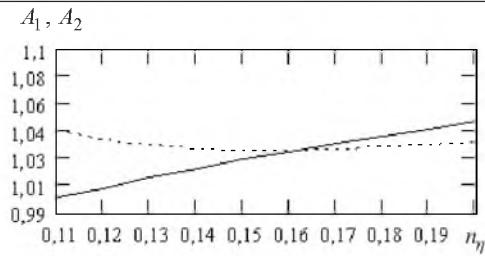


Рис. 3

Рис. 2. Определение оптимальной величины радиуса \bar{R} сферической выемки рабочего тела для линейной модели виброзащитной системы ($\bar{R} = 7,643$ м). (Здесь и на рис. 3–5: сплошные линии – A_1 для ω_1 ; штриховые линии – A_2 для ω_2 .)

Рис. 3. Определение оптимальной величины коэффициента n_η для линейной модели виброзащитной системы ($n_\eta = 0,16$).

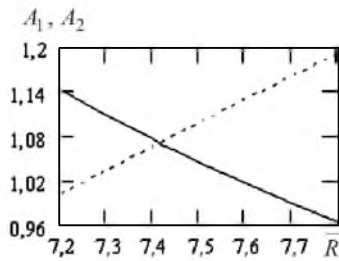


Рис. 4

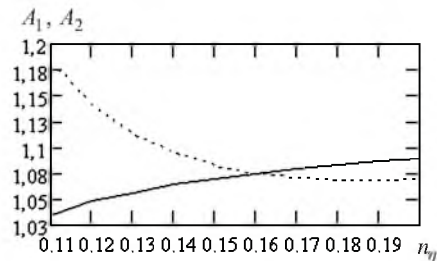


Рис. 5

Рис. 4. Определение оптимальной величины радиуса \bar{R} сферической выемки рабочего тела для нелинейной модели виброзащитной системы ($\bar{R} = 7,41$ м).

Рис. 5. Определение оптимальной величины коэффициента n_η для нелинейной модели виброзащитной системы ($n_\eta = 0,16$).

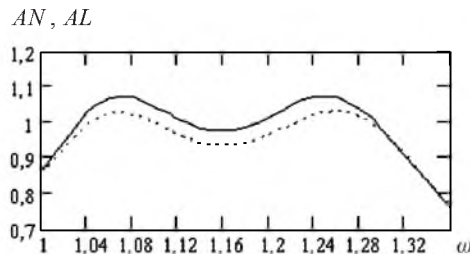


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики для линейной (штриховая линия) и нелинейной (сплошная линия) модели.

Анализ полученных результатов свидетельствует, что максимальные значения графиков $AN = AN(\omega)$ и $AL = AL(\omega)$ количественно отличаются друг от друга (более 4%). Как видно, качественная картина поведения АЧХ для двух типов моделей совпадает. Величины максимумов распределены равномерно (для каждой модели они равны), что указывает на оптимальность настройки параметров гасителя для каждой модели. Для линейной модели системы максимальная амплитуда меньше, чем для нелинейной модели. Поэтому для практического использования настройку параметров \bar{R} и n_η роликового гасителя следует осуществлять в рамках нелинейной

модели из условия равенства двух максимумов на графике $AN = AN(\omega)$ – рис. 4 и 5.

Численный эксперимент показал также, что функциональные зависимости максимального (по времени) относительного отклонения рабочего тела в выемке от частоты вынужденных колебаний ω для двух типов моделей качественно практически не отличаются друг от друга (рис. 7). Имеющееся в этом случае количественное расхождение результатов расчета составляет около 2%, причем максимум на графике $\Delta L = \Delta L(\omega)$ несколько больший, чем на графике $\Delta N = \Delta N(\omega)$. Поэтому для оценки максимальной величины относительного перемещения рабочего тела в выемке рекомендуется использовать линейную модель без дополнительных замечаний. Имеющееся отклонение в большую сторону пойдет в запас расчетов динамической нагруженности системы.

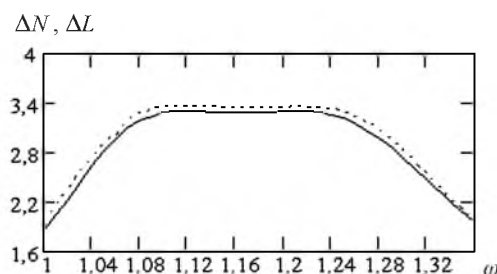


Рис. 7. Графики зависимостей относительного перемещения центра масс рабочего тела для линейной (штриховая линия) и нелинейной (сплошная линия) модели.

Заключение. Рассмотрены установившиеся вынужденные колебания нелинейной виброзащитной системы с роликовым гасителем, находящейся под действием силового гармонического нагружения. Указанные колебания исследовались без ограничений на относительные перемещения рабочего тела по сферическому шарниру гасителя в резонансном диапазоне частот.

Впервые аналитически получено уравнение АЧХ системы с учетом как геометрической, так и кинематической нелинейности. С использованием аналитических зависимостей разработана новая графическая процедура определения оптимальных параметров настройки гасителя.

Сравнительный анализ линейной и нелинейной модели динамики исследуемой виброзащитной системы показал, что полученные оптимальные параметры настройки гасителя по частоте отличаются, по оптимальным параметрам демпфирования – совпадают. При этом максимальная амплитуда несущего тела A для нелинейной модели оказалась больше амплитуды для линейной модели. Поэтому для практического использования следует рекомендовать именно нелинейную модель динамики виброзащитной системы с ее оптимальной настройкой.

Разработанный подход можно с успехом применять для других нелинейных виброзащитных систем с катковыми гасителями низкочастотных колебаний иных конструкций.

Внедрение методики получения уравнения АЧХ виброзащитной системы и графической процедуры определения оптимальных параметров на-

стройки роликового гасителя в современную практику виброзащиты обеспечит выполнение существующих нормативных ограничений уровня амплитуд вынужденных колебаний высотных объектов.

Резюме

Розглядається динамічна поведінка однієї нелінійної віброзахисної системи з роликовим гасителем низькочастотних коливань. Із використанням методу осереднення Рітца отримано рівняння амплітудно-частотної характеристики нелінійної системи. Запропоновано новий графічний метод визначення параметрів настройки роликового гасителя.

1. *Легеза В. П.* Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 106 – 118.
2. *Патент України № 52135А, F16F7/10, E04B1/98.* Котковий гаситель вимушених коливань висотних споруд / М. І. Бобир, В. П. Легеза, М. А. Мартиненко, М. П. Плахтієнко. – Опубл. 16. 12. 2002, Бюл. № 12.
3. *Патент України № 54033А, F16F7/10, E04B1/98.* Котковий віброгаситель вимушених коливань висотних об'єктів / В. П. Легеза. – Опубл. 17. 02. 2003, Бюл. № 2.
4. *Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций.* Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Коренева, А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1986. – 185 с.
5. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия.* Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1981. – 216 с.
6. *Беспрозванная И. М., Соколов А. Г., Фомин Г. М.* Воздействие ветра на высокие сплошные сооружения. – М.: Стройиздат, 1976. – 234 с.
7. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
8. *Остроумов Б. В.* Исследование, разработка и внедрение высотных сооружений с гасителями колебаний: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2003. – 48 с.
9. *Корнев Б. Г.* Динамические гасители колебаний // Материалы междунар. симп. “Виброзащита в строительстве”. – Л., 1984. – Т. 2. – С. 7 – 17.
10. *Антонюк Е. Я., Плахтиенко Н. П.* О выборе коэффициентов трения скольжения в задаче о фрикционном взаимодействии трех твердых тел // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 3. – С. 105 – 109.
11. *Плахтиенко Н. П.* Нелинейные поступательные колебания твердого тела с гравитационно-фрикционным сейсмоамортизатором // Там же. – № 9. – С. 121 – 127.
12. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
13. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголомомных систем. – М.: Наука, 1967. – 520 с.

14. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
15. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations – Probleme der mathematischen Physik // Zeitschrift für die reine und angewandte Mathematik (Crelle). – 1909. – **135**, No. 1. – S. 1 – 61.
16. Klotter K. Non-linear vibration problem treated by the averaging method of W. Ritz // Proc. 1st U.S. Nation. Congr. Appl. Mech. – Chicago, Illinois: Edwards Brothers Inc. – 1951. – P. 125 – 131.
17. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. В 2 т. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
18. Галеркин Б. Г. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестн. инженеров. – 1915. – **1**, № 19. – С. 897 – 908.
19. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
20. Левитский Н. И. Колебания в механизмах. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
21. Дьяконов В. В. MATHCAD-2001. Специальный справочник. – СПб.: ПИТЕР, 2002. – 832 с.
22. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
23. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. – М.: Госстрой СССР, 1987. – 35 с.

Поступила 01. 03. 2004