

УДК 532.528

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ СУПЕРКАВІТАЦІЙНОГО РУХУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ ЗА ІНЕРЦІЄЮ

І. Г. НЕСТЕРУК, В. М. СЕМЕНЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 26.06.2005

Розглянуті задачі максимізації відстані, яка пройдена осесиметричним тілом під водою за інерцією в режимі суперкавітації. Використовувались припущення про фіксовану середню густину тіла та п'ять різних ізопериметричних умов: сталі довжина, калібр та об'єм тіла при сталій початковій швидкості, сталі початковий імпульс і початкова кінетична енергія. Відомі асимптотичні співвідношення для форми тонкої каверни дозволили отримати прості аналітичні залежності для оптимальних розмірів тіла і радіуса кавітатора в перших трьох задачах. При фіксованих початкових імпульсі та енергії знайдено оптимальні значення початкової швидкості та оптимальні розміри тіла. Отримані результати добре узгоджуються з чисельними розрахунками з використанням програми SCAV, розробленої в ІГМ НАН України.

Рассмотрены задачи максимизации расстояния, пройденного осесимметричным телом под водой по инерции в режиме суперкавитации. Движение считается горизонтальным, средняя плотность тела – фиксированной. Исползовались пять различных изопериметрических условий: постоянство длины, калибра и объема тела при постоянной начальной скорости, фиксированный начальный импульс и фиксированная начальная кинетическая энергия. Известные асимптотические соотношения для формы тонкой каверны позволили получить простые аналитические зависимости для оптимальных размеров тела и радиуса кавитатора в первых трех задачах. При фиксированных начальных импульсе и энергии найдены оптимальные значения начальной скорости и оптимальные размеры тела. Полученные результаты хорошо согласуются с численными расчетами с использованием программы SCAV, разработанной в ИГМ НАН Украины.

Maximum range problems are considered for the underwater supercavitating motion of axisymmetric body on inertia. Assumption of the constant body density and five different isoperimetric conditions were used: fixed body length, calibre or volume for fixed initial velocity, fixed initial momentum and fixed initial kinetic energy. The known asymptotic formulae for the slender cavity shape gave an opportunity to obtain simple analytic equations for optimal values of the body dimensions and the cavitator radius in three first problems. In cases of fixed initial momentum and fixed kinetic energy, optimal initial velocity and optimal body dimensions were found. Obtained results are in good agreement with calculations carried out with the programs SCAV developed at the Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine.

ВСТУП

Рух у воді пов'язаний з набагато більшими витратами енергії порівняно з пересуванням у повітрі з такою ж швидкістю через те, що густина води ρ приблизно у 800 разів більша, ніж густина повітря ρ_a . Тому дуже актуальними є задачі зменшення гідродинамічного опору та збільшення дальності високошвидкісного руху за інерцією. Один із способів вирішення проблеми полягає у зменшенні площі контакту поверхні тіла з водою (за рахунок збільшення поверхні контакту з повітрям або водяною парою). Для підводного руху ця ідея реалізована на тілах, що обтікаються у суперкавітаційному режимі (див., наприклад, [1, 2]).

Аналіз осесиметричних задач суперкавітаційного руху за інерцією ускладнюється відсутністю точних розв'язків та нестационарним характером течії. У тих випадках, коли течія вважається квазістационарною, можна використовувати закономірності стационарних каверн з поточним значенням числа кавітації:

$$\sigma = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho U^2}, \quad (1)$$

де ρ – густина води; U – поточна швидкість тіла; p_∞ – тиск у воді далеко від тіла на глибині його руху; p_c – тиск на поверхні каверни, який можна вважати сталим через велику різницю у густинах води та газів, що заповнюють каверну. Зокрема, для видовжених каверн (тобто при $\sigma \ll 1$), утворених затупленими кавітаторами при великих числах Фруда, можна використовувати відомі асимптотичні співвідношення [3]

$$R^2 = \frac{x(1-x)}{\lambda^2}, \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{L}{D} = \sqrt{\frac{-\ln \sigma}{\sigma}}, \quad (3)$$

$$\frac{D}{R_n} = 2\sqrt{\frac{C_x}{\sigma}}, \quad (4)$$

$$\frac{L}{R_n} = \frac{2\sqrt{-C_x \ln \sigma}}{\sigma}, \quad (5)$$

де R_n – радіус кавітатора; λ – видовження каверни; D – максимальний діаметр каверни; L – довжина каверни; C_x – коефіцієнт кавітаційного опору,

$$C_x = \frac{2X}{\rho U^2 \pi R_n^2}; \quad (6)$$

де X – складова сил тиску в напрямку осі x , що збігається з напрямком набігаючого потоку. В рівнянні (2) безрозмірні радіус каверни R та координата x віднесені до довжини каверни L .

Якщо скористатись відомим співвідношенням для стаціонарного суперкавітаційного опору затуплених кавітаторів $C_x = C_{x0}(1 + \sigma)$ і знехтувати змінами числа кавітації, то величину C_x можна вважати сталою. Тоді рівняння руху за інерцією легко інтегруються і пройдений тілом шлях S визначається формулою (див. [4])

$$S = \frac{2m}{\rho C_x \pi R_n^2} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (7)$$

де m – маса тіла; U_0 – початкова швидкість тіла.

Дана робота присвячена аналізу формули (7) для різних ізопериметричних умов та перевірки отриманих висновків за допомогою чисельних розрахунків з використанням програми SCAV [5].

1. ОПТИМАЛЬНА ФОРМА ТІЛА

Досвід показує, що після замивання потоком води частини тіла, розташованої в каверні, воно практично зупиняється через значне зростання опору. Тоді формула (7) дозволяє зробити висновок, що оптимальна форма тіла повинна збігатись з формою каверни в момент замикання (див. також [4]). Будь-яка інша форма відповідає меншому корисному об'єму, тому для неї маса та віддалі будуть меншими.

Оскільки значний практичний інтерес має задача збільшення віддалі S при фіксованому об'ємі тіла, варто замість C_x застосовувати так звані об'ємні коефіцієнти опору:

$$C_V = \frac{2X}{\rho U^2 V^{2/3}}, \quad (8)$$

в яких використовується об'єм тіла V , що у випадку суперкавітації складається з кавітатора та частини, розташованої всередині каверни. З урахуванням рівнянь (6) та (8) співвідношення (7) можна записати у вигляді

$$S = \frac{2\bar{\rho}_b V^{1/3}}{C_V} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (9)$$

де $\bar{\rho}_b = \rho_b/\rho$; $\rho_b = m/V$ – середня густина тіла.

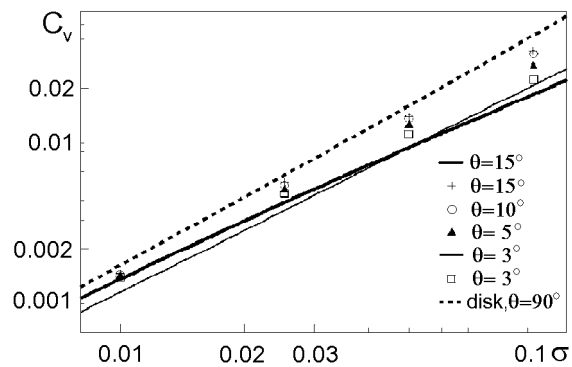


Рис. 1. Залежності об'ємних коефіцієнтів опору тиску конусів та диска від числа кавітації

З формули (9) видно, що при фіксованих інших параметрах максимальна відстань досягається при мінімальному значенні C_V . Якщо вважати, що форма частини тіла, розташованої в каверні, збігається з формою каверни та замикача, рівняння (2), (3), (5), (8) дозволяють отримати формулу (див. [6])

$$C_V = \frac{3^{2/3} \pi^{1/3} \sigma^{4/3}}{4^{2/3} (-\ln \sigma)^{1/3}}. \quad (10)$$

Варто зауважити, що об'ємний коефіцієнт опору диска (або іншого затупленого кавітатора) не містить величини C_x і залежить лише від числа кавітації. Для тонких конусів спостерігається також залежність від кута при вершині 2θ , а проведені в [7] розрахунки свідчать про менші значення C_V порівняно з затупленими кавітаторами в усіх діапазонах чисел кавітації. Для того, щоб підтвердити цей важливий висновок, використовувались розрахунки в нелінійній постановці за запропонованою в статті [6] методикою. Результати представлені на рис. 1 маркерами.

Для порівняння наведено розрахунки за формулою (10) для затуплених кавітаторів (штрихова лінія) та з використанням лінійної постановки [8] (суцільні лінії). Видно, що тонкі кавітатори мають переваги, але в області малих чисел кавітації різницю в C_V можна знехтувати. З рис. 1 виходить також, що об'ємні коефіцієнти опору стрімко спадають при зменшенні числа кавітації, тому переваги суперкавітаційного режиму особливо помітні при мінімально можливих σ .

Дуже малим числам кавітації відповідають великі видовження каверни λ , що видно з рис. 2, де представлені результати розрахунків за форму-

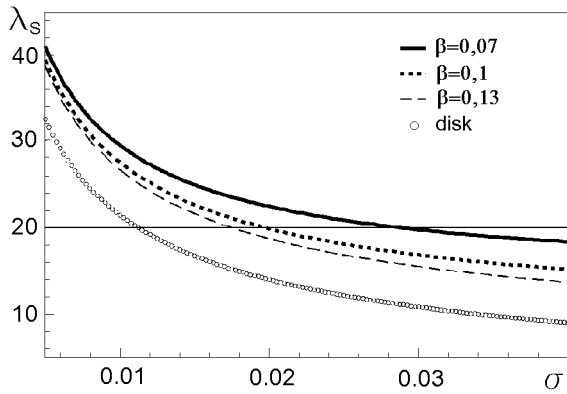


Рис. 2. Залежності видовження системи кавітатор-каверна для конусів та диска від числа кавітації

лою (3) для затуплених кавітаторів та з використанням другого наближення для тонких каверн за тонкими кавітаторами [9] ($\beta = tg\theta$). Для тонких кавітаторів на рис. 2 наведено видовження системи кавітатор-каверна λ_s , що визначається за формулою $\lambda_s = \lambda + R_n/(\beta D)$ (для диска, звичайно, $\lambda_s = \lambda$).

Оскільки контур суперкавітуючого тіла має бути вписаним у каверну, то тіло повинно мати якнайбільше видовження. Існують, однак, конструктивні міркування, що обмежують значення видовження корпусів транспортних засобів. Нехай максимальне значення λ_s дорівнює 20 (див. [10]). Тоді за формулою (3) мінімально допустиме число кавітації для диска становить приблизно 0.01 (див. рис. 2), а рівняння (8) дає мінімально можливе значення об'ємного коефіцієнта опору $C_V(0.01) = C_{Vmin} = 0.0016$. Для тонких кавітаторів мінімально допустимі числа кавітації мають більші значення (див. рис. 2), відповідно більшими є і мінімально можливі значення C_V . Наприклад, для $\beta = 0.1$ величина C_{Vmin} становить приблизно 0.003. Тому для досягнення абсолютного мінімуму величини C_V затуплені кавітатори мають переваги.

Порівняння отриманих значень C_V з опором традиційних тіл (без використання кавітації) наведені в [11, 12]. Зокрема, в [11] наголошується, що на ефективність того чи іншого режиму обтікання сильно впливають об'ємне число Рейнольдса $Re_V = UV^{1/3}/\nu$ та можливість уникнення відриву примежового шару. В [12] показано, що для видовжених еліпсоїдів обертання при $Re \approx 10^8$ суперкавітаційний режим більш ефективний при $\sigma < 0.06$.

2. ОПТИМІЗАЦІЯ ДАЛЬНОСТІ ПРИ ФІКСОВАНИХ ДОВЖИНІ ТІЛА ТА ПОЧАТКОВІЙ ШВИДКОСТІ

Обмежимося у подальшому випадком затуплених кавітаторів і горизонтального руху тіла, для якого

$$\frac{U_0}{U} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_0}}, \quad (11)$$

де σ_0 – початкове число кавітації. Для визначення об'єму каверни достатньо проінтегрувати співвідношення (2):

$$V = \frac{\pi L^3}{6\lambda^2}. \quad (12)$$

Підстановка у (9) рівнянь (10)–(12) дозволяє отримати формулу

$$S = \frac{2\bar{\rho}_b L}{3\sigma} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad (13)$$

з якої (13) видно, що для фіксованих $\bar{\rho}_b$, L та σ_0 пройдений за інерцією шлях залежить лише від кінцевого числа кавітації σ . Максимум S в цьому випадку збігається з максимумом функції

$$f_1(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (14)$$

Диференціювання формули (14) дає

$$\frac{df_1}{d\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \left(1 - \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \right).$$

Прирівнюючи похідну до нуля, отримуємо, що найбільший пройдений за інерцією шлях досягається при

$$\sigma_* = e \sigma_0 = 2,718 \sigma_0. \quad (15)$$

Підстановка виразу (15) в (3) дає оптимальне видовження тіла:

$$\lambda_* = 0,607 \sqrt{\frac{-1 - \ln \sigma_0}{\sigma_0}}. \quad (16)$$

Як відзначалось у попередньому розділі, оптимальна форма тіла має збігатись з формою каверни при кінцевому числі кавітації σ , коли відбувається замивання, яке, в свою чергу, обмежене низку значенням 0.01. Тому з формул (13), (15) випливає, що для випадку $\sigma_0 \geq 0.01/e = 0.00368$ максимальна дальність визначається рівнянням

$$S = \frac{2\bar{\rho}_b L}{3e\sigma_0} = 0.245 \frac{\bar{\rho}_b L}{\sigma_0}. \quad (17)$$

Формули (5) та (15) дозволяють знайти оптимальний радіус кавітатора

$$R_{n*} = \frac{1.359L\sigma_0}{\sqrt{-C_x(1 + \ln \sigma_0)}}, \quad (18)$$

який залежить не тільки від довжини тіла і числа кавітації, але і від коефіцієнта опору C_x .

Не слід, однак, забувати, що збільшення σ_0 призводить до стрімкого зростання C_V , і переваги може мати безвідривний режим обтікання (без використання кавітації). Для оцінок скористаємось значенням $C_V = 0.008$, досягнутим для підводного апарату "DOLPHIN" фірми North American Aviation [13] при $Re_V = 8.5 \cdot 10^6$. Якщо звернутись до формули (10) або рис. 1, то можна стверджувати, що при $\sigma_0 > 0.03$ суперкавітаційний режим не має переваг і формули (17), (18) не описують оптимальні значення.

Слід відзначити, що при менших значеннях числа Рейнольдса безвідривний режим також може мати переваги. Дійсно, оцінки C_V для чисто ламінарного обтікання без відриву прилежового шару за формулою [14]

$$C_V = \frac{4.708}{\sqrt{Re_V}}$$

дають при $Re_V > 3.4 \cdot 10^5$ значення, менші 0.008. Тому для цього діапазону чисел Рейнольдса формули (17), (18) описують оптимальні значення лише для $0.00368 \leq \sigma_0 \leq 0.03$.

Для значень числа кавітації $\sigma_0 < 0.01/e = 0.00368$ максимум функції (14) досягається при мінімально можливому значенні $\sigma = 0.01$, а максимальна дальність дорівнює

$$S = 66.66\bar{p}_b L \ln \frac{0.01}{\sigma_0}. \quad (19)$$

Оптимальна форма тіла в цьому випадку збігається з формою каверни при $\sigma = 0.01$, тобто $\lambda = 21.46$, а оптимальне значення радіуса кавітатора можна визначити з формули (5):

$$R_{n*} = \frac{0.00233L}{\sqrt{C_x}}. \quad (20)$$

На рис. 3 суцільною лінією показані результати розрахунку максимального пройденого шляху за формулами (17), (19). Для порівняння маркерами наведені результати розрахунку з використанням програми SCAV. Розрахунки виконувались для моделі (a), близької до оптимальної (див. рис. 4) при $\bar{p}_b = 7.8$. Для $\sigma_0 \geq 0.00368$ видовження моделі (a) та радіус кавітатора мінялись відповідно до числа кавітації за формулами (16), (18).

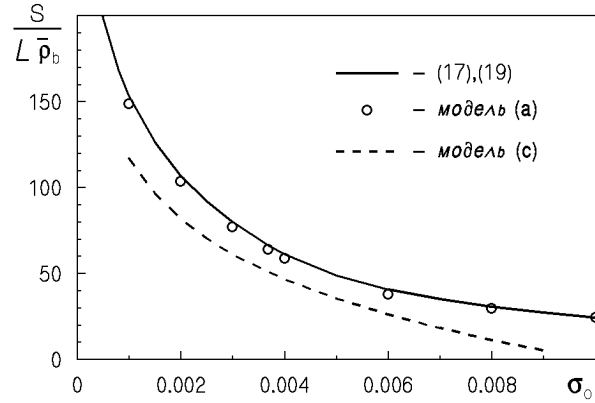


Рис. 3. Залежність шляху, пройденого СК-моделями за інерцією, від числа кавітації

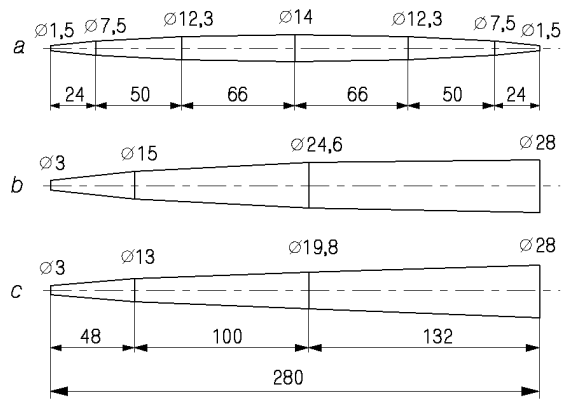


Рис. 4. Форма СК-моделей для розрахунків SCAV: a – модель, близька до оптимальної при $\sigma = 0.01$; b – модель, яка забезпечує ту саму дальність; c – стійка СК-модель

Штриховою лінією показані результати розрахунків SCAV для стійкої моделі (c).

На рис. 4 представлено форму трьох суперкавітуючих (СК) моделей, для яких виконувались чисельні розрахунки. Контур моделей апроксимувався ламаною лінією. Модель (a) є близькою до оптимального тіла при $\sigma = 0.01$. Модель (b) є передньою половиною моделі (a) подвійного розміру. При однакових середній густині і довжині модель (b) забезпечує таку саму дальність, як і модель (a), тому теж може вважатись у деякому сенсі оптимальною. Але при однаковій середній густині маса моделі (b) буде в 4 рази більшою, і для її розгону до фіксованої початкової швидкості потрібна відповідно в 4 рази більша енергія. Якщо відмовитись від умови фіксованої середньої густини тіла і за-

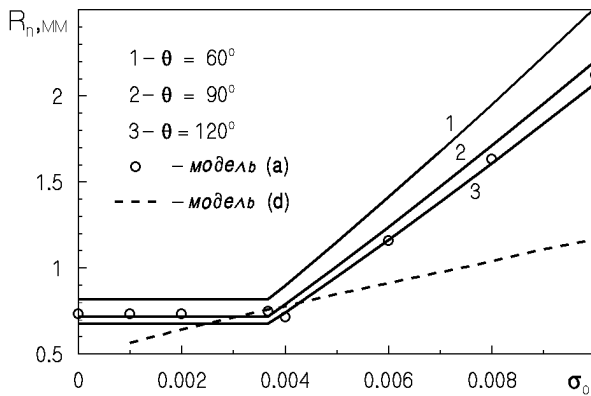


Рис. 5. Оптимальні значення радіуса конічних кавітаторів за формулами (18), (20) та розрахунками SCAV

безпечити однакові маси та вдвічі меншу довжину моделі (b), то форми (a) та (b) дають однакову дальність.

Для реальних СК-моделей обов'язковою є вимога стійкості руху. Як показано в роботах [15, 16], основним механізмом стійкості вільного руху високошвидкісних СК-моделей є їхня самостабілізація шляхом рикошетування від поверхні каверни. Для стійкості руху необхідно, щоб контакти моделі та поверхні каверни відбувались вниз за потоком від центру мас моделі. Тобто стійкість руху залежить як від форми, так і від конструкції моделей, а саме від положення центру мас та моменту інерції. Стійкість руху СК-моделей перевіряється прямим комп'ютерним моделюванням за допомогою програми STAB [5, 16].

Однорідні оптимальні моделі (a) і (b) є нестійкими. Модель (c) відрізняється від моделі (b) дещо зменшеним діаметром двох внутрішніх ребер, що робить її стійкою. Свійка "неоптимальна" модель (c) забезпечує дещо меншу дальність (див. рис. 3).

На рис. 5 суцільними лініями показані результати розрахунку оптимальних значень радіуса конічних кавітаторів за формулами (18), (20). Для порівняння маркерами наведені результати розрахунку SCAV для моделі (a) при $\theta = 90^\circ$ з врахуванням зміни її видовження при $\sigma_0 > 0.00368$. Видно, що чисельні результати практично збігаються з розрахунками за простими аналітичними формулами (18), (20). Штриховою лінією показано результати обчислень SCAV для стійкої моделі (d), що є вдвічі зменшеною копією моделі (c).

3. МАКСИМАЛЬНИЙ ШЛЯХ ПРИ ФІКСОВАНИХ КАЛІБРИ ТІЛА ТА ПОЧАТКОВІЙ ШВИДКОСТІ

Якщо замість довжини зафіксувати найбільший діаметр (калібр) тіла, то результати попереднього розділу дещо трансформуються. В цьому випадку при фіксованому $\bar{\rho}_b$ потрібно знайти оптимальні значення довжини тіла L_* і радіуса кавітатора R_{n*} . Підставляючи співвідношення (3) в (13), маємо

$$S = \frac{2\bar{\rho}_b D}{3\sigma} \sqrt{\frac{-\ln \sigma}{\sigma}} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (21)$$

З формули (21) видно, що для фіксованих $\bar{\rho}_b$, D та σ_0 пройдений за інерцією шлях залежить лише від кінцевого числа кавітації σ . Максимум S в цьому випадку збігається з максимумом функції

$$f_2(\sigma) = \frac{(-\ln \sigma)^{1/2}}{\sigma^{3/2}} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (22)$$

Шляхом диференціювання (22) та прирівнювання похідної до нуля можна встановити, що точка максимуму визначається з рівняння:

$$\left(3 - \frac{1}{\ln \sigma}\right) \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = 2$$

або

$$3y^2 - 3(y_0 + 1)y + y_0 = 0, \quad (23)$$

де $y = \ln \sigma$; $y_0 = \ln \sigma_0$. Квадратне рівняння (23) має розв'язок

$$y = \frac{3(y_0 + 1) - \sqrt{9(y_0 + 1)^2 - 12y_0}}{6}. \quad (24)$$

Інший корень рівняння (23) є додатним, тобто відповідає $\sigma > 1$ і не представляє фізичного інтересу. Розрахунок за формулою (24) показує, що в діапазоні початкових чисел кавітації $0.00001 \leq \sigma_0 \leq 0.01$ відношення σ/σ_0 міняється в межах від 1.91 до 1.85. Тобто, на відміну від (15) можна вважати, що при фіксованому калібрі тіла і малих σ_0

$$\sigma_* \approx 1.9 \sigma_0. \quad (25)$$

При цьому максимальна дальність, яка визначається формулою (21), дорівнює

$$S = \bar{\rho}_b D \frac{0.163[-\ln(1.9\sigma_0)]^{1/2}}{\sigma_0^{3/2}}. \quad (26)$$

Формули (3), (5), та (25) дозволяють знайти оптимальну довжину тіла і оптимальний радіус кавітатора при $\sigma_0 \geq 0.01/1.9 = 0.00526$:

$$L_* = D \sqrt{\frac{-\ln(1.9\sigma_0)}{1.9\sigma_0}}, \quad R_{n*} = 0.689 D \sqrt{\frac{\sigma_0}{C_x}}.$$

Для значень початкового числа кавітації $\sigma_0 < 0.00526$ максимум функції (22) досягається при мінімально допустимому значенні $\sigma = 0.01$, а максимальна дальність дорівнює

$$S = 1431\bar{\rho}_b D \ln \frac{0.01}{\sigma_0}. \quad (27)$$

Оптимальна форма тіла в цьому випадку збігається з формою каверни при $\sigma = 0.01$, тобто $\lambda_* = 21.46$, а оптимальне значення радіуса кавітатора можна визначити з формул (3), (5):

$$R_{n*} = \frac{0.05 D}{\sqrt{C_x}}.$$

4. МАКСИМАЛЬНИЙ ШЛЯХ ПРИ ФІКСОВАНИХ ОБ'ЄМІ ТІЛА ТА ПОЧАТКОВІЙ ШВИДКОСТІ

У цьому випадку при фіксованому $\bar{\rho}_b$ потрібно знайти оптимальні значення довжини тіла L_* , видовження тіла λ_* і радіуса кавітатора R_{n*} .

Підстановка у (9) співвідношень (10), (11) дозволяє отримати

$$S = \bar{\rho}_b V^{1/3} \frac{4^{2/3} (-\ln \sigma)^{1/3}}{3^{2/3} \pi^{1/3} \sigma^{4/3}} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (28)$$

З формули (28) видно, що для фіксованих $\bar{\rho}_b$, V та σ_0 пройдений за інерцією шлях залежить лише від кінцевого числа кавітації σ . Максимум S у цьому випадку збігається з максимумом функції

$$f_3(\sigma) = \frac{(-\ln \sigma)^{1/3}}{\sigma^{4/3}} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (29)$$

Диференціюючи вираз (29) та зануляючи похідну, доходимо висновку, що точка максимуму визначається з рівняння:

$$\left(4 - \frac{1}{\ln \sigma}\right) \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = 3$$

або

$$y^2 - y(y_0 + 1) + 0.25y_0 = 0. \quad (30)$$

Квадратне рівняння (30) має розв'язок

$$y = 0.5(y_0 + 1 - \sqrt{(y_0 + 1)^2 - y_0}). \quad (31)$$

Інший корень рівняння (30) є додатним. Результати розрахунку за формулою (31) у діапазоні початкових чисел кавітації $0.00001 \leq \sigma_0 \leq 0.03$ дають приблизно вдвічі більші оптимальні значення кінцевого числа кавітації (відношення σ/σ_0 міняється

в межах від 2.08 до 1.99). Тобто можна вважати, що при фіксованому об'ємі тіла

$$\sigma_* \approx 2\sigma_0. \quad (32)$$

Як відзначалось, оптимальна форма тіла має збігатись з формою каверни при кінцевому числі кавітації σ , коли відбувається замивання, яке в свою чергу обмежене знизу значенням 0.01. Тому з формул (28), (32) випливає, що для випадку $0.005 \leq \sigma_0 \leq 0.03$ максимальна дальність дорівнює

$$S = \bar{\rho}_b V^{1/3} \frac{0.228[-\ln(2\sigma_0)]^{1/3}}{\sigma_0^{4/3}}.$$

Подібну формулу запропоновано в [17], але замість (32) в ній рекомендовано використовувати співвідношення

$$\sigma_* = \sigma_0 e^{3/4} \approx 1.79\sigma_0.$$

Формули (3), (5), (12) та (32) дозволяють визначити оптимальні довжину і видовження тіла та оптимальний радіус кавітатора:

$$L_* = R_{n*} \frac{\sqrt{-C_x \ln(2\sigma_0)}}{\sigma_0}, \quad \lambda_* = \sqrt{\frac{-\ln(2\sigma_0)}{2\sigma_0}},$$

$$R_{n*} = \frac{0.985 V^{1/3} \sigma_0^{2/3}}{\sqrt{C_x} [-\ln(2\sigma_0)]^{1/6}}.$$

Для значень початкового числа кавітації $\sigma_0 < 0.005$ максимум функції (29) досягається при мінімально допустимому значенні $\sigma = 0.01$, а максимальна дальність дорівнює

$$S = 638.7\bar{\rho}_b V^{1/3} \ln \frac{0.01}{\sigma_0}. \quad (33)$$

Оптимальна форма тіла в цьому випадку збігається з формою каверни при $\sigma = 0.01$, тобто $\lambda = 21.46$, а оптимальне значення радіуса кавітатора можна визначити з формул (3), (5), (12):

$$R_{n*} = \frac{0.0223 V^{1/3}}{\sqrt{C_x}}. \quad (34)$$

5. ОПТИМІЗАЦІЯ ДАЛЬНОСТІ ПРИ ЗАДАНОМУ ПОЧАТКОВОМУ ІМПУЛЬСІ

При проектуванні високошвидкісних СК-моделей їхній початковий імпульс $I_0 = mU_0$ або початкова кінетична енергія $T_0 = mU_0^2/2$ визначаються характеристиками металевого пристрою і часто вважаються заданими. При цьому

виникає питання, що вигідніше для досягнення найбільшої дальності: використовувати тіло малої маси з великою початковою швидкістю U_0 або тіло великої маси з малою U_0 .

Для відповіді на це запитання при фіксованому $\bar{\rho}_b$ потрібно знайти оптимальні значення довжини тіла L_* , видовження тіла λ_* , радіуса кавітатора R_{n*} та початкової швидкості U_{0*} .

В цьому розділі досліджуватиметься дане питання за умов фіксованого початкового імпульсу, в наступному – при заданій початковій кінетичній енергії.

З умови сталого початкового імпульсу $I_0 = V\rho_b U_0 = \text{const}$ та формули (1) випливає

$$\sigma_0 = \frac{2\rho_b^2 V^2 \Delta p}{\rho I_0^2}, \quad (35)$$

де $\Delta p = p_a + \rho gh - p_c$; p_a – атмосферний тиск; g – прискорення вільного падіння; h – глибина горизонтального руху тіла.

Формулу (9) з врахуванням (11), (35) можна перетворити до такого вигляду:

$$S = \frac{a\sigma_0^{1/6}}{C_V} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad a = \frac{I_0^{1/3} \rho_b^{2/3}}{2^{1/6} \rho^{5/6} \Delta p^{1/6}}. \quad (36)$$

З формули (36) видно, що для фіксованих параметрів, які визначають сталу a , та заданому кінцевому числі кавітації σ пройдений за інерцією шлях залежить лише від початкового числа кавітації σ_0 . Максимум S в цьому випадку збігається з максимумом функції

$$f_4(\sigma_0) = \sigma_0^{1/6} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (37)$$

Диференціювання формули (37) дає

$$\frac{df_4}{d\sigma_0} = \frac{1}{6\sigma_0^{5/6}} \left(\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} - 6 \right).$$

Тому найбільший пройдений за інерцією шлях досягається при

$$\sigma_0 = e^{-6} \sigma = 0.00248 \sigma, \quad (38)$$

а максимальна дальність дорівнює

$$S = \frac{6a\sigma^{1/6}}{e C_V}. \quad (39)$$

Оскільки функція $\sigma^{1/6}/C_V$ монотонно спадає при збільшенні кінцевого числа кавітації (див. (10)), максимальна дальність досягатиметься при мінімально допустимому значенні $\sigma = 0.01$, тобто при $\lambda_* = 21.46$. Тоді з формул (39), (10) випливає

$$S = 654a = \frac{583 I_0^{1/3} \rho_b^{2/3}}{\rho^{5/6} \Delta p^{1/6}}. \quad (40)$$

Формулою (40) слід користуватись з обережністю, оскільки для $\sigma = 0,01$ визначене за рівнянням (38) оптимальне значення початкового числа кавітації

$$\sigma_{0*} \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \quad (41)$$

відповідає надзвуковій початковій швидкості

$$U_{0*} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\sigma_0}},$$

і співвідношення (2)–(5) потребують корекції.

Оптимальний об'єм тіла можна визначити за допомогою формул (35) та (41):

$$V_* = \frac{0.0035 I_0}{\rho_b} \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}, \quad (42)$$

а оптимальні значення довжини тіла – з рівнянь (3), (12) при $\sigma = 0.01$

$$L_* = 9.58 V_*^{1/3}. \quad (43)$$

Після цього оптимальний радіус кавітатора можна знайти за допомогою формул (35) або (20) з використанням величин (42) або (43) відповідно.

З формули (42) випливає, що даному випадку властива оптимальна маса тіла

$$m_* = 0.0035 I_0 \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}},$$

яка лінійно залежить від фіксованого початкового імпульсу, не залежить від густини тіла і зменшується при збільшенні глибини руху.

6. МАКСИМАЛЬНИЙ ШЛЯХ ПРИ ЗАДАНІЙ ПОЧАТКОВІЙ КІНЕТИЧНІЙ ЕНЕРГІЇ

З умови сталої початкової кінетичної енергії $T_0 = 0.5V\rho_b U_0^2 = \text{const}$ та формули (1) випливає

$$\sigma_0 = \frac{\bar{\rho}_b V \Delta p}{T_0}. \quad (44)$$

Формулу (9) з урахуванням (11), (44) можна перетворити до такого вигляду:

$$S = \frac{b\sigma_0^{1/3}}{C_V} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad b = \frac{T_0^{1/3} \bar{\rho}_b^{2/3}}{\Delta p^{1/3}}. \quad (45)$$

З формули (45) видно, що для фіксованих параметрів, які визначають сталу b , та заданому кінцевому числі кавітації σ пройдений за інерцією шлях залежить лише від початкового числа кавітації σ_0 . Максимум пройденого за інерцією шляху в цьому випадку збігається з максимумом функції

$$f_5(\sigma_0) = \sigma_0^{1/3} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (46)$$

Диференціювання формули (46) дає

$$\frac{df_5}{d\sigma_0} = \frac{1}{3\sigma_0^{2/3}} \left(\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} - 3 \right).$$

Тому найбільше значення S досягається при

$$\sigma_0 = e^{-3} \sigma = 0.0498 \sigma, \quad (47)$$

а максимальна дальність дорівнює

$$S = \frac{3b\sigma^{1/3}}{eC_V}. \quad (48)$$

Оскільки функція $\sigma^{1/3}/C_V$ монотонно спадає при збільшенні кінцевого числа кавітації (див. (10)), максимальна дальність досягатиметься при мінімально допустимому значенні $\sigma = 0.01$, тобто при $\lambda_* = 21.46$. Тоді з формул (48), (10) випливає

$$S = 151,9b = \frac{151,9T_0^{1/3}\bar{\rho}_b^{2/3}}{\Delta p^{1/3}}, \quad (49)$$

а оптимальне значення початкового числа кавітації визначається з (47) при $\sigma = 0.01$:

$$\sigma_{0*} \approx 5 \cdot 10^{-4}. \quad (50)$$

Оптимальний об'єм тіла можна визначити за допомогою формул (44) та (50):

$$V_* = \frac{5 \cdot 10^{-4} T_0}{\bar{\rho}_b \Delta p}. \quad (51)$$

Після цього оптимальне значення довжини тіла можна знайти за формулою (43), а оптимальний радіус кавітатора – за допомогою формули (34).

З формули (51) випливає, що даному випадку властива оптимальна маса тіла

$$m_* = \frac{5 \cdot 10^{-4} T_0 \rho}{\Delta p}, \quad (52)$$

яка лінійно залежить від фіксованої початкової енергії, не залежить від густини тіла і зменшується при збільшенні глибини руху.

Наявність значення маси тіла, що забезпечує максимальну дальність, зазначена в статті [18], де дана задача розв'язувалась чисельно. Для величин

$T_0 = 265$ кДж, $\Delta p \approx 4 \cdot 10^5$ Н/м² в [18] отримано значення $m_* = 0.24$ кг. Формула (51) дає $m_* = 0.331$ кг. Досить значні розбіжності можна пояснити різними формами тіл. В роботі [18] розглядаються лише конічні тіла, тим часом як оптимальною є форма тіла, що збігається з формою каверни (саме це та конструктивні обмеження на видовження тіла приводять до рівняння (51)).

Ще більшими є розбіжності в значеннях пройденого шляху. Для моделі, виготовленої з вольфрамівового сплаву ($\bar{\rho}_b \approx 16.0$), у [18] отримане значення $S = 225$ м, тоді як формула (49) дає $S = 841$ м. Така значна відмінність у величинах оптимальної дальності свідчить, що форма тіла сильно впливає на пройдений ним за інерцією шлях, і якщо у момент замивання тіло не заповнює всю каверну, то дальність значно зменшується. Оцінити вплив цього чинника можна за допомогою множника α – частки об'єму каверни в момент замикання, зайнятої тілом ($0 < \alpha \leq 1$). Цей множник слід додати в усі формули для дальності після рівняння (9). Зокрема, формула (49) набуває вигляду

$$S = 151,9b\alpha = \frac{151,9\alpha T_0^{1/3}\bar{\rho}_b^{2/3}}{\Delta p^{1/3}}. \quad (53)$$

Для конічних тіл роботи [18] значення α не тільки менше 0.5 (через те, що для розміщення тіла використовується лише передня частина каверни до міделя). Слід також врахувати зазор 17% між тілом і каверною, передбачений у [18]. Тоді $\alpha < 0.5/1.17^3 = 0.312$, що пояснює згадані вище розбіжності у дальності.

Цікаво зазначити, що наявність множника α не впливає на функції f_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, тому залишаються справедливими співвідношення (15), (25), (32), (38), (47) для оптимальних значень початкових та кінцевих чисел кавітації. Зокрема, для описаного вище тіла роботи [18] $\sigma_0 = 0.0465\sigma$. Видно, що розбіжності з (47) не перевищують 7%.

7. ВИСНОВКИ

Отримані аналітичні співвідношення дозволяють для різних ізопериметричних умов легко оцінити гранично можливу дальність руху за інерцією СК-тіл та знайти оптимальні параметри форми та маси тіла, радіуса кавітатора і початкової швидкості.

Зроблені оцінки свідчать, що на дальність дуже впливає форма тіла, і пройдений за інерцією шлях може бути значно меншим від запропонованих оптимальних значень, якщо тіло займає ли-

ше частину каверни в момент замивання. Зокрема, для реальних СК-моделей дальність буде менше оптимальної з ряду причин, головною з яких є міркування стійкості руху. Реальні СК-моделі повинні проектуватись з врахуванням умов стійкості руху, тому їхня форма буде відмінною від оптимальної, зокрема, модель може заповнювати лише частину об'єму каверни в момент замивання.

В ІГМ НАНУ розроблено комплекс програм, що дозволяють розраховувати та моделювати різні типи суперкавітаційних процесів [5]. До складу комплексу входять програма SCAV, призначена для розрахунку форми нестационарних суперкаверн і закону зміни швидкості СК-моделей, і програма STAB, призначена для комп'ютерного моделювання динаміки та дослідження стійкості руху високошвидкісних СК-моделей. Останні версії програм SCAV та STAB дають можливість чисельно розв'язувати задачі оптимального проектування СК-моделей з врахуванням умов стійкості руху та найменшого відхилення моделей на заданій дистанції, а також умов міцності.

1. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами.– Киев: Наук.думка, 1969.– 208 с.
2. Савченко Ю. Н. О движении в воде на суперкавитационных режимах обтекания // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 105-115.
3. Garabedian P.R. Calculation of axially symmetric cavities and jets // Pac. J. Math.– 1956.– Vol. 6, No. 4.– P. 611-684.
4. Путилин С. И. Некоторые особенности динамики суперкавитирующих моделей // Гидромеханика.– 2000.– Т. 2 (74), N 3.– С. 65-74.
5. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Путилин С.И., Наумова Е.И. Программный комплекс компьютерного моделирования суперкавитационного движения тел в воде // Математические машины и системы.– 1999.– N 2.– С. 48-57.
6. Нестерук І.Г. Моделювання осесиметричних і плоских вільних поверхонь за допомогою джерел та диполів // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5(77), N 2.– С. 37-44.
7. Нестерук І.Г. Розрахунки опору тонких конусів з використанням другого наближення для форми утворених ними каверн // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5, N 1.– С. 42-46.
8. Нестерук І.Г. Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1982.– N 1.– С. 28-34.
9. Нестерук І.Г. Об определении формы тонкой осесимметричной каверны на основе интегродифференциального уравнения // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1985.– N 5.– С. 83-90.
10. Savchenko Yu.M. Supercavitating object propulsion // Von Karman Institute for Fluid Dynamics.– February 12-16, 2001.– Lecture 3.– P. 1-25.
11. Нестерук І.Г. Часткова кавітація на видовжених тілах // Прикладна гідромеханіка.– 2004.– Т. 6 (78), N 3.– С. 64-75.
12. Савченко Ю.Н., Савченко Г.Ю. Оценка эффективности использования суперкавитации на осесимметричных корпусах // Прикладна гідромеханіка.– 2004.– Т. 6(78), N 4.– С. 78-83.
13. Гидробионика в судостроении. Обзор Петровой И.М.– М.: ЦНИИТЭИС, 1970.– 272 с.
14. Nesteruk I. The Problems of Drag Reduction in High Speed Hydrodynamics // Int. Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics".– 2002.– Cheboksary, Russia.– P. 351- 359.
15. Савченко Ю.Н., Власенко Ю.Д., Семенов В.Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика.– 1998.– Вып. 72.– С. 103-111.
16. Семенов В.Н. Компьютерное моделирование динамики суперкавитирующих тел // Прикладна гідромеханіка.– 2000.– Т. 2(77), N 1.– С. 64-69.
17. Serebryakov V.V. The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water // Int. Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics".– 2002.– Cheboksary, Russia.– С. 71-92.
18. Gieseke T.J. Toward an optimal weapon system utilizing supercavitating projectiles // Int. Conference on Cavitation "Cav2001".– 2001.– Pasadena, USA.– C. SessionB3.002.