

УДК 532.5

## ТЕЧІЯ СТОКСА У ПЛОСКОМУ СЕКТОРІ

В. В. МЕЛЕШКО, В. В. ЛЯХ

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

Получено 20.04.2005 ◊ Пересмотрено 20.05.2005

Стаття стосується двовимірної повільної течії у секторній порожнині, що зумовлена дотичною швидкістю на її круговій границі. Для розв'язання запропонованої задачі розвинуто аналітичний метод суперпозиції; досліджено точність задоволення граничних умов. Встановлений зв'язок з іншим аналітичним підходом, методом однорідних розв'язків; окремі результати здаються несподіваними. Для кількох кутів розхилу сектора і сталої швидкості на круговій границі наведені картини течій, таблиця і графіки розподілів інших фізичних характеристик. Для напівкруглої порожнини отримано простий замкнутий розв'язок.

Статья касается двумерного ползущего течения в секторной полости, обусловленного касательной скоростью на её окружной границе. Для решения предложенной задачи развит аналитический метод суперпозиции; исследована точность удовлетворения граничных условий. Установлена связь с другим аналитическим подходом, методом однородных решений; отдельные результаты представляются неожиданными. Для нескольких углов раскрытия сектора и постоянной скорости на окружной границе приведены картины течений, таблица и графики распределений других физических характеристик. Для полукруглой полости получено простое замкнутое решение.

Paper deals with two-dimensional creeping flow in a sector cavity caused by a tangential velocity at its curved wall. An analytical method of superposition for the solution of the problem is developed; the accuracy of fulfilling the boundary conditions is investigated. Connection with another analytical method, the method of homogeneous solutions, is established; some results seem to be surprising. For some opening angles of the sector and a uniform velocity at the curved wall the streamlines patterns, the table, and the graphs of other physical distributions are shown. For the semicircular cavity a simple closed-form solution is obtained.

## ВСТУП

У цій статті мова йде про двовимірну повільну течію в'язкої нестисливої рідини всередині секторної порожнини  $0 \leq r \leq a, -\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$  довільного, не більш ніж розгорнутого кута розхилу, тобто  $2\alpha \leq \pi$ . Течію спричиняє задана на круговій границі  $r=a$  дотична швидкість, тоді як бічні стінки  $\vartheta = \pm\alpha$  лишаються нерухомими. Для розв'язання цієї задачі застосований аналітичний метод суперпозиції, та встановлений зв'язок з іншим аналітичним підходом – методом однорідних розв'язків. Графічно представлено численну кількість розподілів фізичних показників для різних кутів розхилу.

При дуже малих числах Рейнольдса (течія Стокса) двовимірна задача протікання нестисливої рідини потребує розв'язати в області порожнини однорідне бігармонічне рівняння відносно функції тока, так щоб задовольнити на границі області задані значення функції тока і її нормальної похідної. Завдяки відомій аналогії Релея [1, 2] з математично подібними задачами про згин тонких пружних защемлених пластин, є можливість застосувати деякі розроблені у теорії пружності методи (див., наприклад, статті [3, 4]), аби розв'язати запроповану задачу. Слід нагадати, що для напівкруглої пружної пластини елегантний розв'язок у замкнутій формі через біполярні координати незалежно отримано у роботах [5] і [6, 7].

Попри ці результати, задача про течію Стокса у секторній порожнині детально не досліджувалася до сих пір. У роботі [8], виходячи з методу розвинень за власними функціями (методу однорідних розв'язків), вивчена течія Стокса, що з'являється у секторі з вільною круговою границею внаслідок температурної конвекції - на бічних стінках задано перепад температур. У статті [9] досліджено течію Стокса у кільцевій порожнині завдяки рухові кругових границь. У статті [10] для течії Стокса у напівкруглій порожнині зі сталою швидкістю на круговій границі отримано простий замкнутий розв'язок, який подібний до відомого розв'язку Гудьєра [11]–Тейлора [12] для чвертьплощини, в якій одна стінка рухається зі сталою швидкістю.

Цікавим аспектом задачі про течію Стокса в секторі, що заслуговує окремої уваги, є природа течії в околі кутових точок. Релей [2] помилково стверджував, що всі часткові похідні від функції прогину для защемленої пластинки мають дорівнювати нулю у кутових точках, і тому висловив, що на малій відстані  $r$  від кута прогин спадає швидше за будь-який ступінь  $r$ . У роботі [13] зазначено, що упущена можливість дробового показника при  $r$  у функції тока (прогину), і встановлено, що для порожнини у вигляді клина з нерухомими стінками  $\vartheta=0; \alpha$  є ненульові бігармонічні функції тока

типу  $\Psi = r^{\lambda+1} f_{\lambda}(\vartheta)$ , де всі допустимі значення цього показника  $\lambda$  є числа суть комплексні, принаймні до певного кута розхилу  $146.3^{\circ}$ . Моффат [14] з'ясував, що кожному такому комплексному  $\lambda$  біля вершини клина відповідає нескінченна вихрова структура (пізніше названа 'вихорами Моффата'). З огляду на візуалізовані в експерименті [15, 16] вихори Моффата, цікаво вивчити теоретично таку поведінку у скінченному секторі. Питання наступне – чи можна дослідити течію у скінченному секторі у тій же мірі, як це зробив Моффат [17] у нескінченному клині.

Аби відповісти на ці питання, у запропонованій роботі збудовані розв'язки за методом суперпозиції та однорідних розв'язків. Перший підхід цілком аналогічний до того, що використаний у роботах [9, 18] для інших типів двовимірних порожнин з кутовими точками. Задовольняючи задані граничні умови, приходимо до нескінченної системи лінійних інтегро-алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів і щільності відповідних рядів і інтегралів Фур'є. Знання головних членів асимптотичної поведінки цих коефіцієнтів і щільності забезпечує високу точність при визначенні картини течій, різноманітних фізичних параметрів, зокрема поля швидкостей, в усій області включно з границею.

В даній роботі встановлений зв'язок між двома аналітичними підходами, причому окремі результати виявились дещо несподіваними.

Попри очевидні переваги розв'язку за методом суперпозиції у задоволенні граничних умов на збудованій круговій границі і при дослідженні локальної поведінки функції тока поблизу відповідних кутових точок (кути руху), вже при незначному відході від області збурення в бік вершини сектора (кута застою), принаймні на 10% у радіальному напрямку, відмінності у фізичних показниках, обрахованих за двома методами, стають такими невідчутними, що ними можна знехтувати і сміливо використовувати розвинення за власними функціями, перехід до якого від розв'язку за суперпозицією встановлено. Причому тоді у цьому розвиненні достатньо скористатися лише кількома, а то й одним першим (головним) членом, чого ні в якому разі не можна робити біля границі з неоднорідними граничними умовами. Все сказане повністю підтверджує справедливність висновків Моффата [17] щодо асимптотичної структури течії поблизу вершини і для скінченного сектора, причому як в області, де визначальним є вплив однорідних границь, так і в незначній області збурення поля неоднорідними граничними умовами.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо двовимірну течію Стокса у плоскому секторі з кутом при вершині  $2\alpha$  (рис. 1). Течію спричиняє дотична швидкість  $V(\vartheta)$  на круговій границі  $r=a$ , тоді як бічні стінки  $|\vartheta|=\alpha$  нерухомі:

$$\begin{aligned} u_r &= 0, & u_{\vartheta} &= 0, & 0 \leq r \leq a, & \vartheta = \pm\alpha, \\ u_r &= 0, & u_{\vartheta} &= V(\vartheta), & r = a, & |\vartheta| \leq \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

У нашому аналізі обмежимося кутами розхилу сектора  $2\alpha \leq \pi$  і вважатимемо функцію  $V(\vartheta)$  неперервною і парною. Компоненти вектора швидкості можна подати через скалярну функцію тока  $\Psi(r, \vartheta)$ :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad u_{\vartheta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (2)$$

Функція тока для повільної течії в'язкої рідини задовольняє однорідне бігармонічне рівняння [19, 20]

$$\Delta \Delta \Psi = 0, \quad (3)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$  – оператор Лапласа в полярних координатах  $(r, \vartheta)$ .

Для функції тока  $\Psi$  маємо класичну бігармонічну задачу по знаходженню функції, значення якої і нормальної похідної якої задані на границі області:

$$\begin{aligned} \Psi &= 0, & \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} &= 0, & 0 \leq r \leq a, & \vartheta = \pm\alpha, \\ \Psi &= 0, & \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= -V(\vartheta), & r = a, & |\vartheta| \leq \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Крім математичної задачі знаходження розв'язку рівнянь (3), (4), ставиться і фізична задача дослідження картини течій поблизу границь області, зокрема в кутах руху, встановлення полів завихрення і тиску.

## 2. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для розв'язання бігармонічної граничної задачі (3), (4) використаємо два аналітичні методи. Обидва вони ґрунтуються на певних частинних розв'язках однорідного бігармонічного рівняння (3), однак спосіб і, як наслідок, якість виконання граничних умов (4) різняться.

### 2.1. Метод однорідних розв'язків

Фактично цей метод є узагальненням класичного метода Фур'є розв'язання рівняння Лапласа в

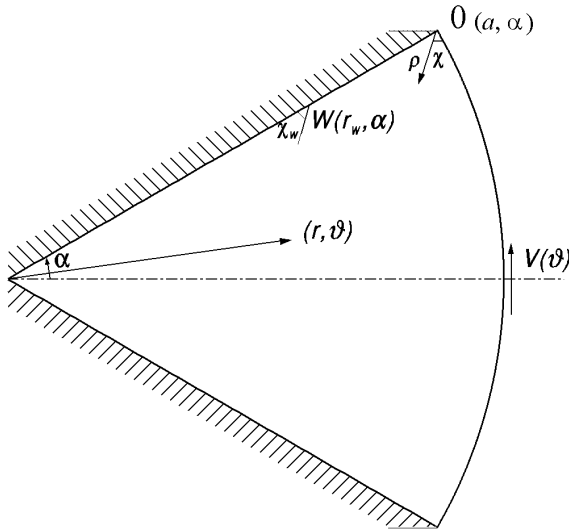


Рис. 1. Схема секторної порожнини  $0 \leq r \leq a$ ,  $|\vartheta| \leq \alpha$  з нерухомими бічними гранями і заданою на круговій границі дотичною швидкістю  $V(\vartheta)$ .

Зазначені локальна система координат  $(\rho, \chi)$  у кутовій точці  $O(a, \alpha)$  і точка розділення  $W(r_w, \alpha)$

області типу прямокутника або сектора, коли границя має кутові точки. Згідно цього підходу [8] функція тока вибирається у такому вигляді:

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{C_n}{\lambda_n^2 - 1} \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n + 1} \phi_n(\vartheta), \quad (5)$$

де  $\phi_n(\vartheta)$  – такі власні функції

$$\begin{aligned} \phi_n(\vartheta) = & \cos(\lambda_n - 1)\alpha \cos(\lambda_n + 1)\vartheta - \\ & - \cos(\lambda_n + 1)\alpha \cos(\lambda_n - 1)\vartheta, \end{aligned} \quad (6)$$

а власні значення  $\lambda_n \in \mathbb{C}$  є комплексні корені рівняння

$$\sin 2\alpha\lambda + \lambda \sin 2\alpha = 0, \quad (7)$$

з  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ,  $\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n$  (тут  $\bar{\phantom{x}}$  позначає комплексну спряженість), звідки випливає  $\phi_{-n}(\vartheta) = \bar{\phi}_n(\vartheta)$ . Комплексні коефіцієнти  $C_n$  ( $C_{-n} = \bar{C}_n$ ,  $C_0 = 0$ ) потрібно знайти.

Функції  $\phi_n(\vartheta)$  і  $\phi'_n(\vartheta)$  дорівнюють нулю при  $|\vartheta| = \alpha$ , тобто граничні умови (4) на  $|\vartheta| = \alpha$  виконуються тотожно для довільних  $C_n$ . Визначення справжніх  $C_n$  є доволі нетривіальною задачею: необхідно розкласти дві задані функції – значення  $\Psi$  і її нормальної похідної на  $r = a$  – по неортогональним комплексним функціям  $\phi_n(\vartheta)$ . В окремих, відмінних від нашого, випадках граничних умов на  $r = a$  (за [21] так званих канонічних задачах) завдяки спеціальним відношенням біортогональності для  $C_n$  можна встановити явні вирази [8, 22]. В іншому разі, і нашому зокрема, для їх

знаходження доводиться використовувати нескінченні системи алгебраїчних рівнянь, які розв'язуються простою редукцією, а отримуються різними шляхами. Зокрема, за методом найменших квадратів [22], або прямою коллокацією [23] і таке ін.; більш ґрунтовно дивіться у роботі [21].

Хоча цей метод і виглядає доволі просто, неминуче постає складне питання повноти представлення (5), тобто чи достатньо в ньому врахувати певну кількість членів, аби з довільною бажаною точністю наблизити дві довільні функції, задані на  $r = a$ . Аби відповісти на нього, очевидно треба знати асимптотику  $C_n$  при великих  $n$ , що не забезпечується розв'язком за редукцією. В частинному випадку  $V(\alpha) = 0$  (див., зокрема, [8]) гарних результатів вдається досягти і невеликою кількістю членів розкладу (5). В іншому разі результати задоволення граничних умов на  $r = a$  біля кутових точок незадовільні; докладну дискусію і аналіз можна знайти в [9, 21].

## 2.2. Метод суперпозиції

За цим методом функція тока  $\Psi$  у зрізаному клині подається у вигляді суми двох бігармонічних функцій

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (8)$$

які повинні мати достатню функціональну свободу, аби задовольнити довільним граничним умовам для функції і її нормальної похідної на границях  $r = a$  і  $|\vartheta| = \alpha$ , відповідно.

Функція  $\Psi_1$  отримується стандартним розділенням змінних, а саме

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & a \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_m} + B_m \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_m + 2} \right] \cos \alpha_m \vartheta, \\ & \text{де } \alpha_m = \frac{2m-1}{2\alpha} \pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Аби побудувати  $\Psi_2$ , вводимо нову змінну  $\rho = \ln(a/r)$  і шукаємо розв'язок бігармонічного рівняння (3) у формі  $\Psi_2 = F(\rho, \vartheta) a e^{-\rho}$ . Для функції  $F$  з (3) отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \rho^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial \rho^2 \partial \vartheta^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \vartheta^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + F = 0 \quad (10)$$

в області  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $|\vartheta| \leq \alpha$ . Розв'язок цього рівняння, парний по  $\vartheta$ , можна вибрати у вигляді такого інтегралу Фур'є

$$F = \int_0^{\infty} \left[ C(\beta) \frac{\operatorname{sh} \beta \vartheta}{\operatorname{sh} \beta \alpha} \sin \vartheta + D(\beta) \frac{\operatorname{ch} \beta \vartheta}{\operatorname{ch} \beta \alpha} \cos \vartheta \right] \sin \beta \rho d\beta, \quad (11)$$

де щільності  $C(\beta)$  і  $D(\beta)$  поки невідомі.

Оскільки  $\Psi_1 = 0$  при  $|\vartheta| = \alpha$  для довільних  $A_m$  і  $B_m$  і  $\Psi_2 = 0$  при  $r = a$  ( $\rho = 0$ ) для будь-яких  $C(\beta)$  і  $D(\beta)$ , то з умови  $\Psi = 0$  випливають вимоги  $\Psi_1 = 0$  при  $r = a$  і  $\Psi_2 = 0$  при  $|\vartheta| = \alpha$ , які призводять, відповідно, до співвідношень  $A_m + B_m = 0$  і  $C(\beta) \sin \alpha + D(\beta) \cos \alpha = 0$ . Останні будуть виконані, якщо ввести нові невідомі коефіцієнти  $X_m$  і щільність  $Y(\beta)$ :

$$A_m = X_m \frac{(-1)^m}{2\alpha_m}, \quad B_m = -X_m \frac{(-1)^m}{2\alpha_m}, \quad (12)$$

$$C(\beta) = -\frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{Y(\beta)}{\beta} \cos \alpha, \quad D(\beta) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{Y(\beta)}{\beta} \sin \alpha. \quad (13)$$

Тоді у нових позначеннях функція тока  $\Psi$  у секторі, яка обнуляється на його границі і має достатню функціональну свободу для задоволення другої граничної умови на контурі, прийме такий вигляд:

$$\Psi = a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\alpha_m} X_m \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_m} - \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_m+2} \right] \cos \alpha_m \vartheta + r \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} Y(\beta) P(\beta, \vartheta) \frac{\sin \beta \rho}{\beta} d\beta, \quad (14)$$

де

$$P(\beta, \vartheta) = \frac{\text{ch } \beta \vartheta}{\text{ch } \beta \alpha} \cos \vartheta \sin \alpha - \frac{\text{sh } \beta \vartheta}{\text{sh } \beta \alpha} \sin \vartheta \cos \alpha. \quad (15)$$

Застосовуючи наступний ряд Фур'є

$$\text{ch } (\beta+i)\vartheta = \frac{2}{\alpha} \text{ch } (\beta+i)\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \alpha_m}{\alpha_m^2 + (\beta+i)^2} \cos \alpha_m \vartheta,$$

отримуємо такий розклад Фур'є:

$$P(\beta, \vartheta) = \frac{4\beta p(\beta)}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \alpha_m}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)} \cos \alpha_m \vartheta, \quad (16)$$

де

$$c_m = \alpha_m - 1, \quad d_m = \alpha_m + 1, \quad (17)$$

$$p(\beta) = \text{th } \beta \alpha \sin^2 \alpha + \text{cth } \beta \alpha \cos^2 \alpha.$$

За допомогою розкладу (16) і наступного інтегралу Фур'є (тут  $\gamma > 0$ )

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma} = e^{-\gamma \rho} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \sin \beta \rho d\beta \quad (18)$$

граничні умови (4) для нормальної похідної від  $\Psi$  перетворюємо на таку нескінченну інтегро-алгебраїчну систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $X_m$  і щільності  $Y(\beta)$ :

$$\begin{cases} Y(\beta) \Delta(\beta) - \frac{4\beta^2}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m X_m}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)} = 0, & \beta \geq 0; \\ X_m - \frac{4\alpha_m^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta p(\beta) Y(\beta)}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)} d\beta = -\alpha_m V_m, & m \geq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Тут введені такі позначення

$$\Delta(\beta) = 1 + \frac{\beta \sin 2\alpha}{\text{sh } 2\beta \alpha}, \quad (20)$$

$$V_m = \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} V(\vartheta) \cos \alpha_m \vartheta d\vartheta.$$

### 2.2.1. Аналіз нескінченної системи

Аби переконатися у точності поки що формального розв'язку (14), потрібно дослідити збіжність розв'язку нескінченної системи (19). Для цього спочатку поглянемо на її вільні члени.

Нехай парна функція  $V(\vartheta)$  є двічі диференційованою. Тоді, інтегруючи по частинах, можна отримати

$$V_m = \frac{2}{\alpha_m \alpha} V(\alpha) + \bar{V}_m, \quad (21)$$

$$\bar{V}_m = \frac{(-1)^m}{\alpha_m^2 \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} V''(\vartheta) \cos \alpha_m \vartheta d\vartheta,$$

причому  $\bar{V}_m = \mathcal{O}(\alpha_m^{-3})$  при  $m \rightarrow \infty$ . Насправді,  $(-1)^{m-1} \bar{V}_m$ ,  $m \geq 1$  – це коефіцієнти Фур'є функції  $V(\vartheta) - V(\alpha)$ , яка дорівнює 0 при  $\vartheta = \pm \alpha$ .

Послідовність  $\alpha_m V_m$  є обмеженою, проте при  $V(\alpha) \neq 0$  вільні члени системи (19) не прямують до нуля при  $m \rightarrow \infty$ . Аби зробити нескінченну систему більш зручною – зі спадаючими вільними членами – зробимо в (19) таку заміну невідомих:

$$X_m = X_0 + x_m, \quad Y(\beta) = Y_0 + y(\beta), \quad (22)$$

де певні константи  $X_0$  і  $Y_0$  потрібно визначити у подальшому розгляді. Тоді відносно нових невідомих

мих отримаємо таку нескінченну систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(\beta) \Delta(\beta) - \frac{4\beta^2}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m x_m}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)} = s(\beta), \\ \beta \geq 0, \\ x_m - \frac{4\alpha_m^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta p(\beta) y(\beta)}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)} d\beta = r_m, \\ m \geq 1, \end{array} \right. \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} s(\beta) &= X_0 S(\beta) - Y_0 \Delta(\beta), \\ r_m &= -\alpha_m V_m - X_0 + Y_0 R_m, \end{aligned} \quad (24)$$

$$S(\beta) = \frac{4\beta^2}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)}, \quad (25)$$

$$R_m = \frac{4\alpha_m^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta p(\beta)}{(c_m^2 + \beta^2)(d_m^2 + \beta^2)} d\beta. \quad (26)$$

Ряд  $S(\beta)$  шляхом простих перетворень можна підсумувати як

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \frac{\beta}{2\pi i} \left[ \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1-i\beta}{c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1+i\beta}{c}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1+i\beta}{c}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1-i\beta}{c}\right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Тут  $c = \pi/\alpha$ ;  $\psi$  – пси- (або дігамма-) функція [24].

Інтеграл  $R_m$  можна подати у явному вигляді

$$R_m = \frac{4\alpha_m^2}{\pi} \left[ I_t \sin^2 \alpha + I_c \cos^2 \alpha \right], \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{4\alpha_m} \left[ \psi\left(m + \frac{1}{c}\right) - \psi\left(m - \frac{1}{c}\right) \right], \\ I_c &= \frac{1}{4\alpha_m} \left[ \psi\left(m - \frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) - \psi\left(m - \frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right) \right] - \\ &\quad - \frac{c}{4\alpha_m(\alpha_m^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далі, використовуючи асимптотичне представлення (див. [24], п. 6.3.18)

$$\psi(\zeta) = \ln \zeta - \frac{1}{2\zeta} - \frac{1}{12\zeta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\zeta^4}\right), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad |\arg \zeta| < \pi,$$

отримуємо такі асимптотичні рівності:

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \frac{2}{\pi} + \mathcal{O}(\beta^{-2}), \quad \beta \rightarrow \infty, \\ R_m &= \frac{2}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_m^{-2}), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

Отже, за гладкої функції  $V(\vartheta)$  можна записати

$$\left\{ \begin{array}{l} s(\beta) = \left(\frac{2}{\pi} X_0 - Y_0\right) + \mathcal{O}(\beta^{-2}), \quad \beta \rightarrow \infty, \\ r_m = \left(-\frac{2}{\alpha} V(\alpha) - X_0 + \frac{2}{\pi} Y_0\right) + \mathcal{O}(\alpha_m^{-2}), \quad m \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (31)$$

Покладаючи для  $X_0$  і  $Y_0$  такі значення

$$X_0 = -\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \frac{V(\alpha)}{\alpha}, \quad Y_0 = -\frac{4\pi}{\pi^2 - 4} \frac{V(\alpha)}{\alpha}, \quad (32)$$

ми позбуваємось головних членів у (31), а отже  $s(\beta)$  і  $r_m$  затухатимуть, відповідно, як  $\mathcal{O}(\beta^{-2})$  і  $\mathcal{O}(\alpha_m^{-2})$  при  $\beta \rightarrow \infty$  і  $m \rightarrow \infty$ .

Можна показати, що сума  $S(\beta)$  і інтеграли  $R_m$ , які є сумами недиагональних елементів відповідно 1-го та інших ( $m \geq 1$ ) рядків матриці нескінченної системи (19), чітко менші за одиницю. Тоді за загальною теорією лінійних нескінченних систем [25] система (19) є цілком регулярною, і метод простої редукції збігається до єдиного ‘головного’ розв’язку за умови обмежених правих частин. Хоча редукцію можна застосувати і безпосередньо до системи (19), проте представлення (22), (32) дозволяє значно покращити збіжність розв’язку і застосувати до (19) метод ‘покращеної’ редукції, або, що те саме, просто редукцію до вже більш зручної – з затухаючими вільними членами – системи (23):

$$x_m = 0, \quad m > M, \quad (33)$$

причому на практиці достатньо обмежитись незначною кількістю перших членів, за звичай п’ятьма ( $M = 5$ ). Цей процес покращення редукції і збіжності є стандартною для чисельних методів технікою прискорення збіжності шляхом виділення повільної частини у замкнутому вигляді і можна продовжити, якщо врахувати в (22) подальші члени (асимптотичного) розкладу.

### 2.2.2. Точний розв’язок нескінченної системи

В окремому випадку при  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ , коли клиновидна порожнина стає напівкруглою, і задано сталу кругову швидкість  $V(\vartheta) = V_0$ , нескінченна система (19) має точний розв’язок у замкнутій формі:

$$X_m = X_0 = -\frac{4\pi V_0}{\pi^2 - 4}, \quad Y(\beta) = Y_0 = -\frac{8V_0}{\pi^2 - 4} \quad (34)$$

для всіх  $m$  і  $\beta$ .

Дійсно, у цьому випадку маємо  $\alpha_m = 2m - 1$  і

$$\alpha_m V_m = \frac{4}{\pi} V_0, \quad R_m = \frac{2}{\pi}, \quad S(\beta) = \frac{2}{\pi},$$

звідки  $r_m = 0$ ,  $s(\beta) = 0$ . Тому з однорідної регулярної нескінченної системи (23) отримаємо

$$x_m = 0, \quad m \geq 1, \quad y(\beta) = 0, \quad 0 \leq \beta < \infty, \quad (35)$$

звідки і впливає розв'язок (34).

### 3. ФУНКЦІЯ ТОКА ТА ІНШІ ФІЗИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Підставляючи співвідношення (22) в (14) і виділяючи головну частину у замкнуту форму, за допомогою суми (59) та інтегралів (60), (61) отримаємо таке представлення функції тока у секторній порожнині:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{r^2 - a^2}{2a} \left[ X_0 \frac{\alpha}{\pi} \arctan \frac{2(ar)^{c/2} \cos \frac{\pi\vartheta}{2\alpha}}{a^c - r^c} - \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} x_m \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_m} \cos \alpha_m \vartheta \right] + \\ & + Y_0 \frac{\alpha}{\pi} \left[ \arctan \frac{a^c - r^c}{2(ar)^{c/2} \cos \frac{\pi\vartheta}{2\alpha}} \cos \vartheta \sin \alpha - \right. \\ & \left. - \arctan \left( \frac{a^c - r^c}{a^c + r^c} \operatorname{tg} \frac{\pi\vartheta}{2\alpha} \right) \sin \vartheta \cos \alpha \right] + \\ & + r \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y(\beta)}{\beta} \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta \vartheta}{\operatorname{ch} \beta \alpha} \cos \vartheta \sin \alpha - \right. \\ & \left. - \frac{\operatorname{sh} \beta \vartheta}{\operatorname{sh} \beta \alpha} \sin \vartheta \cos \alpha \right] \sin \left( \beta \ln \frac{a}{r} \right) d\beta, \end{aligned} \quad (36)$$

де  $c = \pi/\alpha$ . Попри дещо складний вигляд, вираз (36) дозволяє ефективно розраховувати функцію тока і поле швидкостей в усій області. Аби отримати компоненти вектора швидкості на контурі порожнини, треба здійснити певні прості граничні переходи.

Для напівкруглої порожнини ( $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ,  $c = 2$ ) та сталої швидкості  $V(\vartheta) = V_0$ , враховуючи (34) і (35), розв'язок (36) набуває простого замкнутого вигляду

$$\begin{aligned} \Psi = & - \frac{2V_0}{\pi^2 - 4} \left( \pi r \cos \vartheta - \right. \\ & \left. - \frac{\pi(a^2 - r^2) + 4ar \cos \vartheta}{2a} \arctan \frac{2ar \cos \vartheta}{a^2 - r^2} \right), \end{aligned} \quad (37)$$

який співпадає з тим, що вже визначено в [10].

Виразів (36) і (2) достатньо для отримання поля швидкостей і, зокрема, ліній тока. Тут важливою є асимптотична поведінка  $x_m$ ,  $y(\beta)$ . Загалом, при довільній граничній швидкості  $V(\vartheta)$  у (22)

$x_m = \mathcal{O}(\alpha_m^{-1})$ ,  $m \rightarrow \infty$  і  $y(\beta) = \mathcal{O}(\beta^{-1})$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ . Проте, якщо  $V'(\alpha) = 0$ , що виконується і для важливого частинного випадку сталої граничної швидкості  $V(\vartheta) = V_0$ , то  $x_m = o(\alpha_m^{-2})$ ,  $m \rightarrow \infty$  і  $y(\beta) = o(\beta^{-2})$ ,  $\beta \rightarrow \infty$  (більш докладно дивіться в [9]). Тоді ряди і інтеграли у виразі (36) і похідних від нього збігаються рівномірно і абсолютно в усій області  $0 < r \leq a$ ,  $|\vartheta| \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ .

Оскільки вираз (36) задовольняє бігармонічне рівняння (3) і граничні умови (4) для функції  $\Psi$  тотожно, то оцінкою його якості є лише точність задоволення цих умов для похідних від  $\Psi$ . Так обраховані, для  $M = 5$  в (33), значення кругової швидкості  $u_\vartheta$  на  $r = a$  при певних, позаяк довільних  $\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$  і як завгодно близькому наближенні до кутів  $r = a$ ,  $|\vartheta| = \alpha$  відрізняються від заданого сталого значення щонайгірше у п'ятому знаку.

Аналітичний вираз (36) також дозволяє знайти на бічних гранях точки, в яких нульова лінія тока роздвоюється. Ці точки розділення спричиняють існування так званих сепаратрис – нульових, окрім граничних, ліній тока, які зумовлюють існування вихрового пакету, що часто спостерігається в експериментах. Знайдемо положення цих точок і кути нахилу сепаратрис таким чином.

Нехай точка  $W(r_w, \alpha)$  на бічній грані є точкою розділення нульової лінії тока (див. рис. 1). Розкладемо функцію тока  $\Psi(r, \vartheta)$  в околі цієї точки в ряд Тейлора по  $\Delta r = r_w - r$ ,  $\Delta \vartheta = \alpha - \vartheta$ . Тоді з використанням виразу (2) можна записати

$$\begin{aligned} \Psi(r_w - \Delta r, \alpha - \Delta \vartheta) = & \Psi(r_w, \alpha) + \\ & + [u_\vartheta|_W \Delta r - (ru_r)|_W \Delta \vartheta] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ - \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \Big|_W (\Delta r)^2 + 2 \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \Big|_W \Delta r \Delta \vartheta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial (ru_r)}{\partial \vartheta} \Big|_W (\Delta \vartheta)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial r^2} \Big|_W (\Delta r)^3 + 3 \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta} \Big|_W (\Delta r)^2 \Delta \vartheta + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \Big|_W \Delta r (\Delta \vartheta)^2 - \frac{\partial^2 (ru_r)}{\partial \vartheta^2} \Big|_W (\Delta \vartheta)^3 \right] + \\ & + \mathcal{O}((\Delta r)^4, (\Delta \vartheta)^4). \end{aligned} \quad (38)$$

Далі, компоненти швидкості  $u_r$ ,  $u_\vartheta$  разом зі своїми частинними похідними по  $r$  дорівнюють нулю. Тоді, якщо точка  $(r - \Delta r, \alpha - \Delta \vartheta)$  належить нульовій лінії тока, то мають виконуватись такі співвідно-

шення:

$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right|_W = 0, \quad 3 \left. \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \right|_W \Delta r - \left. \frac{\partial^2 (r u_r)}{\partial \vartheta^2} \right|_W \Delta \vartheta = 0. \quad (39)$$

Перше визначає величину  $r_w$ , а друге – кут нахилу, тобто

$$\operatorname{tg} \chi_w = \frac{r_w \Delta \vartheta}{\Delta r} = 3 \left. \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \right|_W / \left. \frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} \right|_W. \quad (40)$$

### 3.1. Локальна поведінка функції тока

За допомогою представлення (36) можна проаналізувати поведінку функції тока в околі кутів. Зокрема, вводячи локальну систему координат  $\rho, \chi$  з центром у кутовій точці  $O(a, \alpha)$  (див. рис. 1), як

$$\rho \cos \chi = r \sin(\alpha - \vartheta), \quad \rho \sin \chi = a - r \cos(\alpha - \vartheta),$$

і переходячи у виразі (36) до нових локальних координат, після розкладу всіх членів у ряди по  $\rho$  отримаємо при  $\rho \rightarrow 0$

$$\Psi = -\frac{4V_0}{\pi^2 - 4} \rho \left[ \chi \cos \chi - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \chi \right) \sin \chi \right] + \mathcal{O}(\rho^2). \quad (41)$$

З виразу (41) видно, що біля кутових точок, зокрема  $O(a, \alpha)$ , поведінка потоку співпадає з відомим розв'язком Тейлора [12] для течії Стокса у чвертьплощині, в якій стінка  $\chi = 0$  рухається зі сталою швидкістю.

### 3.2. Завихрення і тиск

Окремий інтерес представляють поля завихрення  $\omega(r, \vartheta)$ ,

$$\omega = \nabla^2 \Psi, \quad (42)$$

і тиску  $p(r, \vartheta)$ . Функція тиску визначається з рівнянь Стокса

$$\nabla p = \mu \Delta \vec{u}, \quad (43)$$

(тут  $\vec{u} = (u_r, u_\vartheta)$  – вектор швидкості, що виражається через функцію тока формулами (2);  $\mu$  – в'язкість рідини) прямим інтегруванням з точністю до однорідного стану стиску-розтягу, як

$$p/\mu = -Q + \text{const}, \quad (44)$$

де  $Q$  – гармонічна функція, спряжена з функцією завихрення  $\omega$  умовами Коші-Рімана.

Відмітимо, що локально, біля кутових точок  $(a, \pm\alpha)$ , картини ліній рівного завихрення і тиску (зокрема для  $2\alpha=60^\circ$ , див. рис. 3, а і б відповідно) цілком співпадають з тими, що можна отримати з розв'язку Тейлора [12] для течії Стокса у чвертьплощині з однією рухомою (зі сталою швидкістю) стінкою.

## 4. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ДВОМА МЕТОДАМИ

Розглянемо питання, як взаємопов'язані два доволі різні представлення (5) і (14) функції  $\Psi$ . Для цього уважно дослідимо інтегральну частину  $\Psi_2$  представлення (14). Враховуючи парність функції  $Y(\beta)$ , що видно з (19), подамо  $\Psi_2$  у комплексній формі:

$$\Psi_2(r, \vartheta) = \frac{\alpha r}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{-1} Y(\beta) P(\beta, \vartheta) e^{i\rho\beta} d\beta. \quad (45)$$

Тепер введемо до розгляду такі мероморфні функції  $X(\zeta)$  і  $F(\zeta, \vartheta)$  комплексної змінної  $\zeta$ :

$$X(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\alpha_m X_m}{(c_m^2 + \zeta^2)(d_m^2 + \zeta^2)}, \quad (46)$$

$$F(\zeta, \vartheta) = \frac{\zeta}{\Delta_M(\zeta)} Q(\zeta, \vartheta) X(\zeta), \quad (47)$$

де введені наступні позначення:

$$\begin{aligned} \Delta_M(\zeta) &= \operatorname{sh} 2\alpha\zeta + \zeta \sin 2\alpha, \\ Q(\zeta, \vartheta) &= \operatorname{ch} \zeta\vartheta \operatorname{sh} \zeta\alpha \cos \vartheta \sin \alpha \\ &\quad - \operatorname{sh} \zeta\vartheta \operatorname{ch} \zeta\alpha \sin \vartheta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (48)$$

Тоді вираз (45) можна переписати як

$$\Psi_2(r, \vartheta) = \frac{r}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta, \vartheta) e^{i\rho\beta} d\beta. \quad (49)$$

Цей інтеграл можна обрахувати за теоремою про лишки.

Замикаючі контури слід вибрати у вигляді послідовності півкіл  $|\zeta| = R_n$ ,  $\operatorname{Im} \zeta > 0$ , причому  $R_n = (n+1/4)\pi/\alpha$ . Причина вибору саме таких контурів, які розділяють корені  $\zeta_n$  рівняння  $\Delta_M(\zeta)=0$  (воно насправді співпадає з рівнянням (7) з точністю до множника у змінній), є цілком подібною до пояснень Файлона [26], тобто аби знехтувати інтегралом по півколу  $|\zeta| = R_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Дійсно, це можна зробити завдяки оцінкам

$$|\Delta_M(\zeta)| \geq c(|\zeta| + e^{2\alpha|\operatorname{Re} \zeta|}), \quad |\zeta| = R_n, \quad (50)$$

де  $c > 0$  – певна константа, незалежна від  $n$ .

Всередині замкнутих контурів підінтегральна функція має прості полюси в точках  $\zeta = ic_m$ ,  $\zeta = id_m$  і нулях  $\Delta_M(\zeta)$ . Враховуючи значення лишків функції  $F(\zeta, \vartheta) e^{i\rho\zeta}$ , тобто

$$\operatorname{Res}_{\zeta=\zeta_n} F(\zeta, \vartheta) e^{i\rho\zeta} = \frac{\zeta_n}{\Delta'_M(\zeta_n)} Q(\zeta_n, \vartheta) X(\zeta_n) e^{i\rho\zeta_n},$$

$$\text{Res}_{\zeta=ic_m} F(\zeta, \vartheta) e^{i\rho\zeta} = \frac{Q(ic_m, \vartheta)}{\Delta_M(ic_m)} e^{-\rho(\alpha_m-1)} X_m,$$

$$\text{Res}_{\zeta=id_m} F(\zeta, \vartheta) e^{i\rho\zeta} = -\frac{Q(id_m, \vartheta)}{\Delta_M(id_m)} e^{-\rho(\alpha_m+1)} X_m,$$

отримаємо

$$\Psi_2(r, \vartheta) = r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n}{\Delta'_M(\zeta_n)} Q(\zeta_n, \vartheta) X(\zeta_n) e^{i\rho\zeta_n} + r \sum_{m=1}^{\infty} X_m e^{-\alpha_m\rho} \left\{ \frac{Q(ic_m, \vartheta) e^\rho}{\Delta_M(ic_m)} - \frac{Q(id_m, \vartheta) e^{-\rho}}{\Delta_M(id_m)} \right\}. \quad (51)$$

Нескладно показати, що

$$\frac{Q(ic_m, \vartheta) e^\rho}{\Delta_M(ic_m)} - \frac{Q(id_m, \vartheta) e^{-\rho}}{\Delta_M(id_m)} = -\frac{(-1)^m}{2\alpha_m} \left[ \frac{a}{r} - \frac{r}{a} \right] \cos \alpha_m \vartheta.$$

Тоді другий доданок у виразі для  $\Psi_2$  (51) відрізняється від  $\Psi_1$  з (14) лише знаком. А отже, маємо

$$\Psi(r, \vartheta) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n X(\zeta_n)}{\Delta'_M(\zeta_n)} Q(\zeta_n, \vartheta) \left( \frac{r}{a} \right)^{-i\zeta_n+1}, \quad \text{Im } \zeta_n > 0, \quad r < a. \quad (52)$$

Ця формула дає розклад розв'язку  $\Psi(r, \vartheta)$  в ряд за однорідними розв'язками

$$\Psi_n(r, \vartheta) = Q(\zeta_n, \vartheta) \left( \frac{r}{a} \right)^{-i\zeta_n+1}, \quad (53)$$

де  $\zeta_n$  – нулі функції  $\Delta_M(\zeta)$  з додатною уявною частиною і занумеровані у порядку зростання їх модулів.

Аби пов'язати вирази (5) і (53), зробимо в останньому заміну  $\zeta_n = i\lambda_n$ , де  $\lambda_n$  ( $\text{Re } \lambda_n > 0$ ) вже корені рівняння (5). З урахуванням

$$Q(i\lambda_n, \vartheta) = \frac{i}{2} \phi_n(\vartheta)$$

отримаємо

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \phi_n(\vartheta) \left( \frac{r}{a} \right)^{\lambda_n+1}, \quad \text{Re } \lambda_n > 0, \quad (54)$$

де

$$\tilde{C}_n = -\frac{a \lambda_n}{2 \Delta'_M(i\lambda_n)} X(i\lambda_n).$$

Якщо тут ввести позначення  $\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n$ ,  $\tilde{C}_{-n} = \bar{\tilde{C}}_n$ ,  $\phi_{-n}(\vartheta) = \bar{\phi}_n(\vartheta)$ ,  $n \geq 1$ , то з точністю до множника отримаємо (5).

Табл 1. Виконання граничної умови  $u_\vartheta|_{r=a}=1$  при  $2\alpha=60^\circ$  залежно від методу розв'язання: 1 – метод суперпозиції ( $M=5$ ), 2 – однорідні розв'язки ( $N=20$ ) за методом найменших квадратів, 3 – однорідні розв'язки ( $N=20$ ): точні значення коефіцієнтів за формулою (55)

$\vartheta/\alpha$	1	2	3
0.0	1.000	0.962	0.944
0.1	1.000	0.962	0.947
0.2	1.000	0.962	0.954
0.3	1.000	0.963	0.968
0.4	1.000	0.964	0.989
0.5	1.000	0.968	1.026
0.6	1.000	0.976	1.068
0.7	1.000	0.993	1.132
0.8	1.000	1.033	1.217
0.9	1.000	1.151	1.297
1.0	1.000	0	0

Отже, на цьому шляху встановлення зв'язку між розв'язками за методами однорідних розв'язків (5) і суперпозиції (14) отримали всі коефіцієнти розкладу за однорідними розв'язками (54) у явному вигляді:

$$\tilde{C}_n = -\frac{2a\lambda_n}{\alpha \cos 2\alpha\lambda_n + \sin \alpha \cos \alpha} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m X_m}{(c_m^2 - \lambda_n^2)(d_m^2 - \lambda_n^2)}, \quad n \geq 1, \quad \text{Re } \lambda_n > 0, \quad (55)$$

залежно від геометрії області і дійсних коефіцієнтів  $X_m$ , які легко встановити у спосіб, наведений вище.

### 5. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ І АНАЛІЗ

Для чисельного аналізу виберемо важливий частинний випадок сталої дотичної швидкості на кришці сектора  $u_\vartheta|_{r=a}=V(\vartheta) \equiv 1$ .

Перш за все, звернемо увагу на виконання граничних умов, зокрема єдиної неоднорідної умови (див. табл. 1). Очевидно, як не раз зазначалося раніше [9, 18], що метод суперпозиції (табл. 1, 1) тут поза конкуренцією – за доволі незначної кількості обчислювальних операцій (зрізана матриця лише  $5 \times 5$ ) досягається точне виконання всіх граничних умов, особливо у кутових точках, де дотична швидкість має розрив.

Проте, більш докладно потрібно зупинитись на іншому. З наведених даних виявляється, що розвинення за власними функціями (54) (сума береться від 1 до  $N=20$ ) з точними значеннями коефіцієнтів  $\tilde{C}_n$  дає гірший результат (табл. 1, 3),



ніж таке саме представлення, але вже з коефіцієнтами, встановленими за методом найменших квадратів (МНК) (табл. 1, 2). Причому це стосується як поточної збіжності, так і збіжності у розумінні середньо-квадратичної похибки. (Аналогічні результати отримані у роботі [22], де у більш простій ‘канонічній’ задачі точні коефіцієнти визначаються завдяки відомим співвідношенням біортогональності.) Узагальнимо цей на перший погляд дивний результат: для довільного скінченного  $N$  існує хоча б один, а отже і безліч наборів коефіцієнтів  $C_n$ ,  $1 \leq n \leq N$  таких, що відповідне зрізане розвинення за власними функціями є більш точним, аніж те, що отримане із точного розв’язку (54). Цей набір можна знайти за МНК. (Нагадаємо, що всі наведені у цій роботі типи розв’язків задовольняють бігармонічне рівняння тотожно незалежно від вибору коефіцієнтів, який впливає лише на якість виконання граничних умов.) З огляду на теорію рядів Фур’є, цей висновок – довільна скінченна кількість доданків точного розв’язку не є оптимальною – настільки ж неочікуваний, наскільки і прогнозований, оскільки не виконується головна необхідна умова цієї теорії – функції  $\phi_n(\vartheta)$ ,  $n \geq 1$  не є ортогональними.

Дискусію з цього приводу можна розвинути. Зокрема, зауважимо на таких двох моментах. По-перше, при збільшенні  $N$  коефіцієнти  $C_n$ , обраховані за МНК, збігаються до точних значень  $\tilde{C}_n$ . Так знайдеться досить велике  $N > 20$  таке, що  $C_n = \tilde{C}_n$ ,  $1 \leq n \leq 20$ . Проте інша частина  $C_n$  з ростом  $n$  значно відрізнятиметься від точних значень, аби задовольнити вимогам МНК. По-друге, якщо зафіксувати  $N$  у МНК і збільшувати його у зрізаному ‘точному’ розвиненні, виконання граничної умови для дотичної швидкості покращуватиметься в першу чергу у точках, ближчих до осі клина  $\vartheta=0^\circ$ , і ще довго буде поступатися МНК при наближенні до кутових точок і у середньоквадратичному розумінні загалом.

Вище викладене засвідчує, що точний вираз (54), аналогічно іншим розв’язкам за методом власних розвинень, є непридатним – його неможливо використати – в околі кутових точок збурюючої границі, в яких дотична швидкість має розрив ( $V(\alpha) \neq 0$ ). Попри це, розв’язок (54) є корисним не лише теоретично. З форми однорідних розв’язків і властивостей власних значень  $\lambda_n$  (див. [8, 17]) очевидно випливає швидке їхнє степеневе затухання при  $r < a$ . Тому для розв’язку (54) в цілому визначальним буде лише його перший член і коефіцієнт при ньому, а отже, при відході від границі збурення, принаймні на 10% у радіальному напрямку, зрізаний розв’язок (54),  $N=5$ , у наших обчислен-

нях майже не відрізняється від розв’язку за МНК і суперпозицією. Причому, цифра 10% тут досить умовна, а головний якісний висновок був відомий заздалегідь – чим далі ми відходимо від збурюючої границі, тим менше  $N$  можна вибирати, навіть 1, якщо ‘достатньо’ відійти. Ці висновки повністю підтверджують всі результати Моффата [17] і для скінченного клина (сектора) і дозволяють з використанням готових формул (54), (55) швидко порахувати необхідні фізичні показники на достатній відстані від границі  $r=a$ . З огляду на точність підрахунків і кількість обчислювальних операцій, нема ніякої необхідності звертатися ані до МНК, де потрібно розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку, принаймні,  $20 \times 20$ , аби забезпечити точність перших коефіцієнтів  $C_n$ , ані до розв’язку за суперпозицією, де треба порахувати невласні інтеграли від швидко осцилюючих функцій. Інша справа поблизу збурюючої границі і відповідних кутових точок, де, як вже зазначалося, треба застосовувати розв’язок за методом суперпозиції, в якому підінтегральні функції вже будуть повільно осцилюючі.

Все це дає гарне підґрунтя для отримання наступних результатів. На рис. 2 відображені картини течій для різних характерних кутів розхилу сектора  $2\alpha$ . Специфічний кут  $2\alpha=28.5^\circ$  (див. рис. 2, *a* – тут вихорів Моффата більше за три) обрано, аби порівняти картину з експериментальними даними Танеди [15, 16], якому вдалося візуалізувати два перші вихори. Два наступні кути  $60^\circ$  і  $90^\circ$  (три і два вихори, відповідно, див. рис. 2, *b* і *c*) – часто зустрічаються. Рис. 2, *d* демонструє, що вже при  $2\alpha=120^\circ$  лишається один вихор, хоча за формальною математикою вихорів є нескінченна кількість для всіх наведених прикладів і аж до певного кута  $146.3^\circ$ , при якому перший корінь характеристичного рівняння (7) стає дійсним. При  $2\alpha=120^\circ$  всі інші, окрім першого, вихори заховані на проміжку  $r < 0.005a$ , а тому нема ‘фізичного’ сенсу говорити про більш ніж один вихор, і картина надалі до кута  $180^\circ$  (напівкруг) не змінюватиметься.

На рис. 3, *a* і *b* для  $2\alpha=60^\circ$  зображені відповідно лінії рівного завихрення (за формулою (42)) і лінії рівного тиску (ізобари). Тут зроблені позначення з урахуванням того, що у поставленій задачі функція завихрення є парною по  $\vartheta$ , а тиску – непарною.

Табл. 2, згідно формул (39), (40), дає перші, тобто найближчі до збурюючої границі, точки розділення нульової лінії тока (за [19] точки нульового тертя) і кути нахилу сепаратрис у залежності від кута розхилу клина. Тут бачимо, що в діапа-

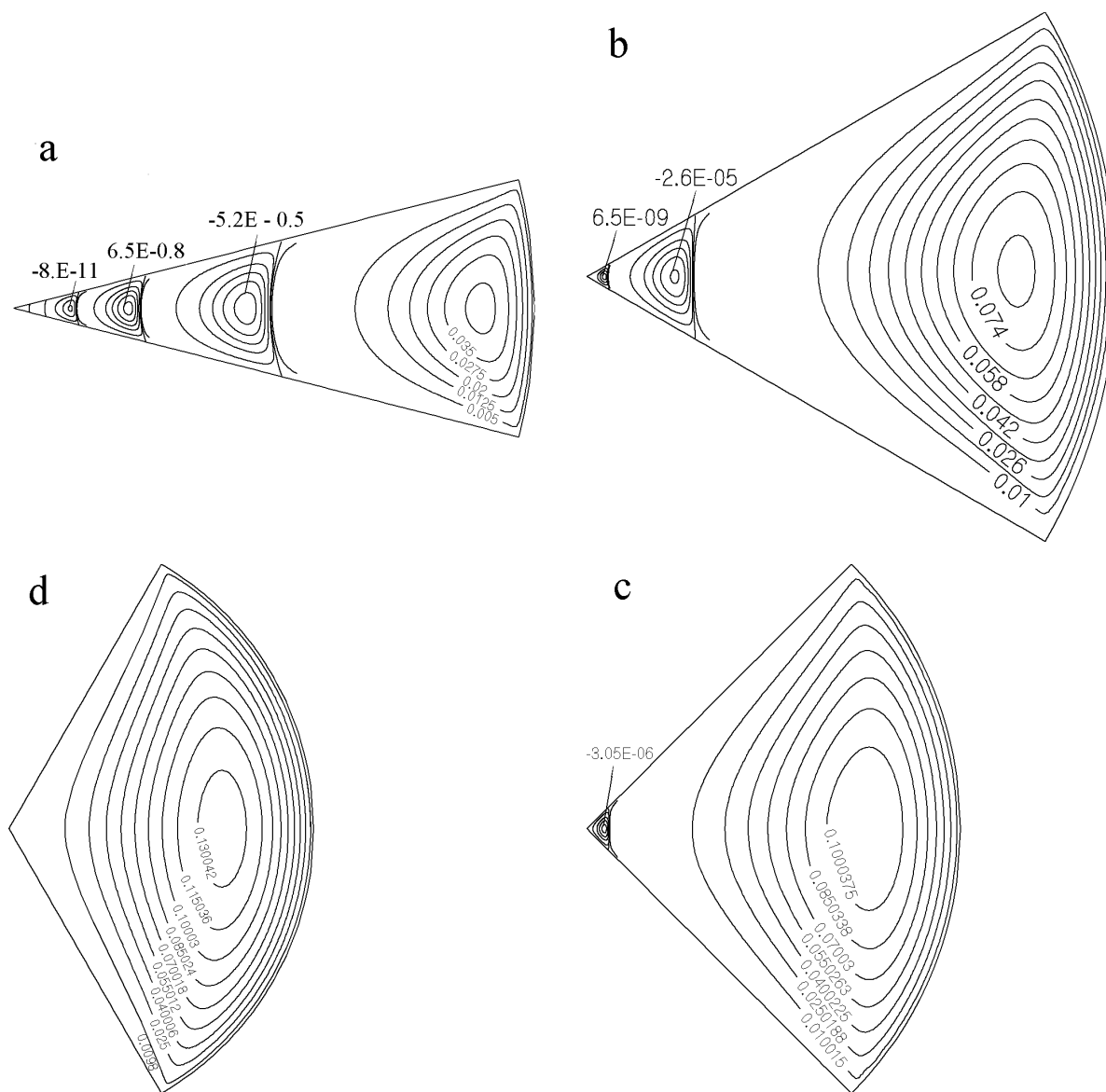


Рис. 2. Картини течій для кутів розхилу  $2\alpha$ :  
 $a - 28.5^\circ$ ;  $b - 60^\circ$ ;  $c - 90^\circ$ ;  $d - 120^\circ$

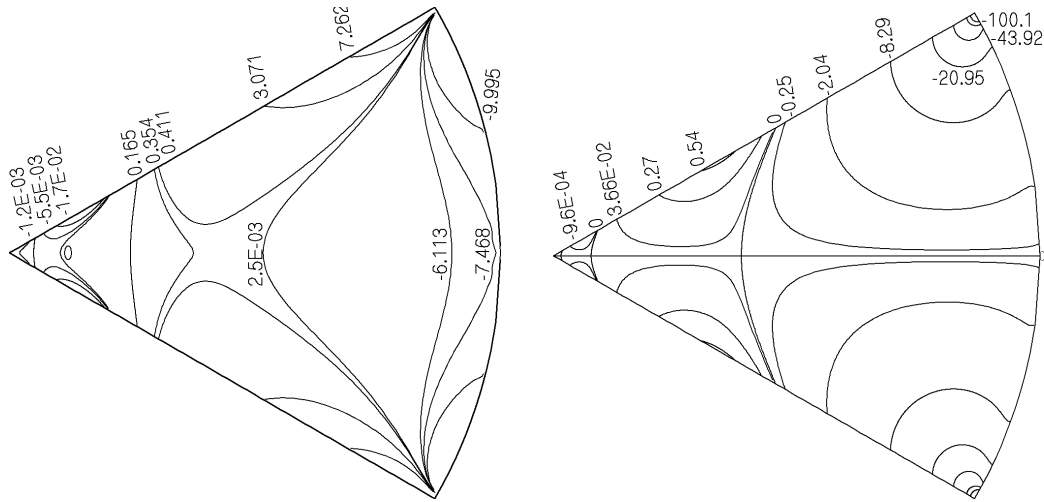
Табл 2. Точка нульового тертя  $r_w$  і кут нахилу сепаратриси  $\chi_w$  для кута розхилу сектора  $2\alpha$

$2\alpha, ^\circ$	$r_w$	$\chi_w, ^\circ$
10	0.804	58.52
28.5	0.530	58.07
60	0.236	56.15
90	0.080	52.44
120	0.009	45.44

зоні  $2\alpha$ , де наявний вихровий пакет, тобто більше ніж один вихор, кут нахилу сепаратриси хоч і спа-

дає, проте надзвичайно повільно і майже не змінюється. ‘Нефізичний’ (з точки зору малого відносного розміру області не першого вихора) випадок  $2\alpha=120^\circ$  наведений для того, щоб продемонструвати, що, як і передбачається, рано чи пізно кут нахилу сепаратриси  $\chi_w$  (до речі, разом з координатою  $r_w$  точки розділення нульової лінії тока) почне зменшуватися суттєво і має впасти на нуль при  $2\alpha=146.3^\circ$ , коли сепаратриси та інші, окрім першого, вихори Моффата зникнуть і формально.

Загалом, хоч в [19, 27] правильно зазначається, що кут, під яким розділяється нульова лінія то-


 Рис. 3. Лінії завихрення (а) і ізобари (b) при  $2\alpha=60^\circ$ 

ка на жорсткій границі, не визначається лише локальними умовами і залежить від загальної картини обтікання тіла, за результатами табл. 2 ці міркування необхідно уточнити для нашого випадку. Дійсно, кут розділення хоч і незначно, але чутливий лише до геометрії всієї області, а саме кута розхилу сектора  $2\alpha$ , тобто він відчуває, під яким кутом нахилена протилежна жорстка стінка, і очевидно не залежить від конкретного значення заданої дотичної швидкості.

## ВИСНОВКИ

Результати цієї роботи ще раз засвідчують на незамінності методу суперпозиції у задачах для течій Стокса в областях з негладкими границями і негладкими граничними умовами. По-перше, як і раніше, це особливо стосується області поблизу збурюючої границі, задоволення неоднорідних граничних умов на ній і дослідження локальної поведінки фізичних полів в околі відповідних з цією границею куткових точок. По-друге, завдяки методу суперпозиції встановлений перехід до розв'язку за методом власних розвинень, який значно спрощує, порівняно з тим-таки методом суперпозиції чи методом найменших квадратів, обчислення необхідних характеристик при відході від невеликої області збурення у значну область застою, де домінує вплив однорідних граничних умов.

## ДОДАТОК

1. В основній частині використані значення інтегралів

$$I_t = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{th} px \, dx}{(x^2 + q^2)(x^2 + r^2)} = \quad (56)$$

$$= \frac{1}{r^2 - q^2} \left[ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{pr}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{pq}{\pi}\right) \right],$$

$$I_c = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{cth} px \, dx}{(x^2 + q^2)(x^2 + r^2)} = \quad (57)$$

$$= \frac{1}{r^2 - q^2} \left[ \psi\left(\frac{pr}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{pq}{\pi}\right) \right] - \frac{\pi}{2p(q+r)qr},$$

де  $p, q, r > 0$ . (Ці інтеграли не включені до п.2.5.47 таблиць [28]. Тоді як формула (6) табл. 97 в [29] містить помилку.)

Ці інтеграли можна порахувати кількома шляхами. Ми використали теорему про лишки, замикаючи контур у верхню півплощину комплексної площини  $\zeta$  і знаходячи значення лишків у точках  $\zeta_n = i(2n-1)\pi/2p$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\zeta_q = iq$ ,  $\zeta_r = ir$  і  $\zeta_n = in\pi/p$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\zeta_q = iq$ ,  $\zeta_r = ir$  для інтегралів  $I_t$  і  $I_c$ , відповідно, а потім використавши суму [28], п.5.1.6:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} [\psi(b) - \psi(a)]. \quad (58)$$

Інший підхід полягає у використанні розкладів

$$\operatorname{th} px = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8px}{(2n-1)^2\pi^2 + 4p^2x^2},$$

$$\operatorname{cth} px = \frac{1}{px} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2px}{n^2\pi^2 + p^2x^2},$$

які призводять до очевидного інтегрування правильних дробів з подальшим застосуванням (58).

Варто відмітити, що в формулі (6) табл. 97 в [29], яка виражає (розбіжний) інтеграл через (розбіжний) ряд, пропущений множник 2. Правильний результат такий:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{th} px \frac{x}{x^2 + q^2} dx = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2pq + (2n-1)\pi},$$

який, з рештою, також призводить до значення інтегралу  $I_t$ .

2. Ми також використали значення суми [30]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-(2n-1)A} \cos(2n+1)x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sh} A} \right), \quad (59)$$

та інтеграли [28], п.2.5.47:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} cx} \cdot \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2c} \operatorname{th} \frac{b\pi}{2c} \right), \quad (60)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} cx} \cdot \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{b\pi}{2c}}{\cos \frac{a\pi}{2c}} \right). \quad (61)$$

1. *Rayleigh Lord*. On the flow of viscous fluids, especially in two dimensions // *Phil. Mag.*– 1893.– (ser. 5), **36**.– P. 354–372.
2. *Rayleigh Lord*. Hydrodynamical notes // *Phil. Mag.*– 1911.– (ser. 6), **21**.– P. 177–195.
3. *Hassé H. R.* The bending of uniformly loaded clamped plate in the form of circular sector // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1950.– **3**.– P. 271–278.
4. *Morley L. S. D.* Variational reduction of the clamped plate to two successive membrane problems with an application to uniformly loaded sectors // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1963.– **16**.– P. 451–471.
5. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости.– М.: Гостехиздат, 1950.– 232 с.
6. *Woinowsky-Krieger S.* Clamped semicircular plate under uniform load // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*– 1955.– **22**.– P. 129–278.
7. *Woinowsky-Krieger S.* Über die Verwendung von Biplarkoordinaten zur Lösung einiger Probleme der Plattenbiegung // *Ing.-Archiv.*– 1956.– **24**.– S. 47–52.
8. *Liu C. H., Joseph D. D.* Stokes flow in wedge-shaped trenches // *J. Fluid Mech.*– 1977.– **80**, Part 3.– P. 443–463.
9. *Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V., Peters G. W. M., Meijer H. E. H.* Steady Stokes flow in an annular cavity // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1996.– **49**, Pt. 4.– P. 593–619.
10. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Two-dimensional Stokes flow in a semicircle // *Прикладна гідромеханіка.*– 1999.– **1(73)**, N 1.– С. 35–37.
11. *Goodier J. N.* An analogy between the slow motion of a viscous fluid in two dimensions, and systems of plane stress // *Phil. Mag.*– 1934.– (ser. 7), **17**.– P. 554–576.
12. *Taylor G. I.* On scraping viscous fluid from a plane surface // *Miszellaneen der Angewandten Mechanik* (ed. M. Schäfer).– Berlin, Akademie-Verlag, 1962.– S. 313–315.
13. *Dean W. R., Montagnon P. E.* On the steady motion of viscous liquid in a corner // *Proc. Cambridge Phil. Soc.*– 1949.– **45**.– P. 389–395.
14. *Moffatt H. K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.*– 1964.– **18**.– P. 1–18.
15. *Taneda S.* Visualization of separating Stokes flows // *J. Phys. Soc. Japan.*– 1979.– **46**.– P. 1935–1942.
16. *Дайк ван М.* Альбом течений жидкости и газа.– М.: Мир, 1986.– 180 с.
17. *Moffatt H. K.* Viscous eddies near a sharp corner // *Arch. Mech. Stosow.*– 1964.– **2**.– S. 365–372.
18. *Meleshko V. V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // *Proc. R. Soc. Lond.*– 1996.– A **452**.– P. 1999–2002.
19. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
20. *Meleshko V. V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // *Appl. Mech. Rev.*– 2003.– **56**.– P. 33–85.
21. *Spence D. A.* A class of biharmonic end-strip problems arising in Elasticity and Stokes flow // *IMA J. Appl. Math.*– 1983.– **30**.– P. 107–139.
22. *Shankar P. N.* On the use of biorthogonality relations in the solution of some boundary value problems for the biharmonic equation // *Current Sci.*– 2003.– **85**, N 7.– P. 975–979.
23. *Wang C. Y.* Low Reynolds number flow due to a rotating finned shaft in a cylinder // *Z. angew. Math. Phys.*– 1997.– **48**.– S. 439–450.
24. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
25. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.– Л.: Физматгиз, 1962.– 708 с.
26. *Filon L. N. G.* On the expansion of polynomials in series of functions // *Proc. Lond. Math. Soc.*– 1907.– ser. 2, **4**.– P. 396–430.
27. *Michael D. H., O'Neill M. E.* The separation of Stokes flow // *J. Fluid Mech.*– 1977.– **80**.– P. 785–794.
28. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.
29. *Bierens de Haan D.* Nouvelles tables d'intégrales définies.– London: Hafner, 1965.– 716 p.
30. *Oberhettinger F.* Fourier expansions: a collection of formulas.– London: Academic Press, 1973.– 64 p.