ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2006. Том 8, N 1. С. 22 – 30

УДК 532.5:517.958

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 24.06.2005

Исходная общая задача теории относительного движения жидкости в виде уравнения Лапласа с граничными и начальными условиями переформулирована как начально-краевая задача для системы двух уравнений, состоящей из уравнения Лагранжа–Коши и уравнения Лапласа. Установлена гиперболичность уравнения Лагранжа–Коши для квазипотенциала относительной скорости жидкости. Показано, что свободная поверхность жидкости является характеристикой этой формы уравнения Лагранжа–Коши. Доказана возможность существования многозначных решений рассматриваемой задачи и приведен пример такого решения (задача о “летящем цилиндре”). Сформулированы условия совместности данных Коши на свободной поверхности жидкости как на характеристике.

Вихідну загальну задачу теорії відносного руху рідини у вигляді рівняння Лапласа з граничними та початковими умовами переформульовано як початково-крайову задачу для системи двох рівнянь, що складається з рівняння Лагранжа–Коші та рівняння Лапласа. Встановлено гіперболічність рівняння Лагранжа–Коші для квазіпотенціала відносної швидкості рідини. Показано, що вільна поверхня є характеристикою цієї форми рівняння Лагранжа–Коші. Доведено можливість існування багатозначних розв’язків задачі, що розглядається, та наведено приклад такого розв’язку (задача про “літаючий циліндр”). Сформульовано умови сумісності даних Коші на вільній поверхні рідини як на характеристиці.

The input general problem of the theory of relative fluid motion for Laplace equation with initial and boundary conditions is reformulated as an initial-boundary value problem for the system of two equations consisting of Lagrange - Cauchy equation and Laplace equation. It is established that Lagrange - Cauchy equation for quasipotential of relative fluid motion is hyperbolic. It is shown that the free surface of a fluid is the characteristic of this form of Lagrange - Cauchy equation. The possibility of existence of many-valued solutions of a considered problem is proved and the example of such solution is given (the problem on “the flying cylinder”). Conditions of compatibility of Cauchy data on a liquid free surface considered as the characteristic are formulated.

ВВЕДЕНИЕ

Исходная общая начально-краевая задача нелинейной теории волн в рамках модели идеальной однородной несжимаемой жидкости имеет, как известно, вид

$$\Delta\Phi(r,t)=0, \quad r\in\Omega, \quad t\in[t_0,t_1), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=(v_0+\omega\times r)\cdot\nu, \quad r\in S, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=(v_0+\omega\times r)\cdot\nu-\frac{f_t}{\sqrt{(\nabla f)^2}}, \quad r\in\Sigma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2-\nabla\Phi\cdot(v_0+\omega\times r)- -g_0\cdot r+\frac{p_0}{\rho}=F_0(t), \quad r\in\Sigma, \tag{4}$$

$$\Phi(r,t_0)=\Phi^0(r), \quad f(r,t_0)=f^0(r), \tag{5}$$

где t – время; t_0, t_1 – начальный и конечный моменты времени; x,y,z – пространственные координаты; $r=(x,y,z)$ – радиус-вектор жидкой частицы; $\Phi(x,y,z,t)$ – потенциал абсолютной скорости жидкости, взятый в подвижной системе координат $Oxyz$; Ω – занятая жидкостью область; Σ – свободная поверхность жидкости; $f(x,y,z,t)$ – задающая свободную поверхность функция; S – твердая граница жидкой области; ν – орт внешней нормали к свободной поверхности; v_0 и $\omega(t)$ – векторы поступательной и угловой скоростей подвижной системы координат $Oxyz$ соответственно; $\Phi^0(x,y,z)$ и $f^0(x,y,z)$ – начальные значения искомых функций; ρ – плотность жидкости; p_0 – значение давления на свободной поверхности; g_0 – вектор ускорения силы тяжести; $F_0(t)$ – произвольная функция времени; $\nabla=(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$ – оператор градиента по пространственным переменным; Δ – оператор Лапласа по x,y,z. В случае безграничной жидкости эти соотношения дополняются известными условиями на бесконечности, а в случае ограниченной области Ω — интегральным условием постоянства объема жидкости.

В терминах математической физики эта задача классифицируется как задача для уравнения Лапласа $\Delta\Phi=0$ в изменяющейся со временем области Ω, с условиями Неймана на твердой части границы, кинематическим и динамическим условиями на свободной поверхности Σ, а также начальными условиями в момент $t=t_0$.

Одна из специфических особенностей задачи (1)

– (5) заключается в том, что решение эллиптического уравнения (т. е. уравнения Лапласа) оказывается колебательным по времени, т.е. имеет все признаки решений гиперболического (волнового) уравнения. Анализ причин возникновения этого любопытного обстоятельства в случае линейных волн на поверхности безграничной жидкости показывает, что колебательный характер решения эллиптического уравнения является следствием кинематического и диамического условий на свободной поверхности жидкости, которые в ходе решения задачи сводятся к классическому уравнению колебаний осциллятора. Точнее, в линейном случае кинематическое и динамическое условия (3), (4) принимают на свободной поверхности $f(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$ соответственно вид [1, стр. 405]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (z = 0),$$

где g – величина вектора g_0 ускорения силы тяжести. Отсюда после соответствующих преобразований (дифференцирований и подстановок) для временнóй составляющей решения $T(t)$ в методе разделения переменных получается классическое уравнение осциллятора:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \sigma^2 T = 0,$$

где σ – собственная частота колебаний жидкости. Это уравнение и определяет изменение со временем потенциала (а значит, и поля скоростей жидкости) в каждой *отдельной* точке пространства (x, y, z). Уравнение же Лапласа "отвечает" за *распределение* этого потенциала во всей пространственной области $\Omega(t)$.

Таким образом, гиперболический (колебательный) характер решения уравнения эллиптического типа обусловлен в случае *линейной* волновой задачи условиями на свободной поверхности жидкости. При этом оказывается [1, стр. 407], что решение единственно. Цель настоящей работы – показать, что в *нелинейном* случае решения общей волновой задачи (1) – (5) также имеют гиперболический характер, однако, в отличие от линейного случая, они могут быть многозначными.

1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Динамическое условие представляет собой интеграл Лагранжа–Коши, который рассматривается, во-первых, в точках свободной поверхности, и, во-вторых, при фиксированном давлении $p = p_0$. В свою очередь, интеграл Лагранжа–Коши является, как известно, промежуточным соотношением в процессе решения гидродинамических уравнений Эйлера (при потенциальных внешних силах). Этот интеграл заменяет систему трех скалярных уравнений Эйлера относительно *компонент* скорости и давления одним скалярным уравнением относительно *потенциала* скорости и того же давления. Следовательно, решения исходной задачи (1) – (5) должны удовлетворять интегралу Лагранжа – Коши не только на свободной поверхности, но и в любой точке жидкого объема. Поэтому, по существу, исходной задачей является не (1) — (5), а задача в виде *системы* двух уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\cdot(v_0 + \omega\times r) - g_0 + \frac{P(r,t)}{\rho} = F_0(t), \tag{6}$$

$$\Delta\Phi(r, t) = 0, \tag{7}$$

с граничным условием

$$P(r, t) = p_0, \quad r \in \Sigma, \tag{8}$$

прежними условиями на твердой стенке (2) и на свободной поверхности (3), а также начальными условиями (5). Здесь $P(r, t)$ – неизвестное давление как функция пространственных переменных и времени. В системе уравнений (6), (7) второе уравнение относится к эллиптическому типу, а первое, насколько известно, не классифицировано. Поэтому возникает задача определения типа этого уравнения.

Прежде всего заметим, что кроме неизвестных потенциала скорости и давления, первое уравнение (т. е. интеграл Лагранжа–Коши) содержит также неизвестную произвольную функцию времени. Таким образом, это уравнение является недоопределенным, поскольку зависит от трех искомых функций. Его особенностью является то, что оно содержит только производные от потенциала скорости, но не содержит самого потенциала, а в отношении давления наоборот – содержит только давление и не содержит производных от него.

Если давление и произвольную функцию времени считать известными, то интеграл Лагранжа–Коши можно рассматривать как нелинейное уравнение с частными производными 1-го порядка относительно потенциала скорости. В дальнейшем интеграл Лагранжа – Коши, трактуемый как дифференциальное уравнение, для краткости называется *основным* уравнением. Его интегрированием должно заканчиваться решение исходной системы гидродинамических уравнений Эйлера, однако это – сложная задача.

Ниже решается задача классификации основного уравнения, т.е. выясняется, является оно параболическим, гиперболическим, эллиптическим или, возможно, некоторого смешанного типа. Эта задача представляется важной, поскольку уравнения перечисленных классов решаются, как известно, совершенно разными методами. Классификация проводится на основе теории характеристик [2].

Уравнения в частных производных именно 1-го порядка, описывающие гиперболические волны, рассматривались в [3]. Интеграл Лагранжа – Коши в форме, используемой в настоящей работе, приведен в [4]. Современное состояние проблемы разрешимости уравнений гидродинамики освещено в обзоре [5]. Линейное уравнение 1-го порядка, часто встречающееся в гидродинамике и описывающее, в частности, свободную поверхность жидкости, решалось в [6].

2. ОБЩАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость постоянной плотности ρ, совершающая некоторое движение в поле силы тяжести. Это движение описывается в подвижной декартовой системе координат $Oxyz$, начало O и ориентация осей x, y, z которой произвольны. Жидкость занимает пространственную область Ω и в общем случае погружена в некоторую бóльшую область (полость) Π, так что

$$\Omega \subseteq \Pi \subseteq R^3.$$

В частном случае, когда

$$\Omega = \Pi = R^3,$$

жидкость безгранична по всем направлениям и не имеет свободной поверхности. В этих предположениях задача Коши для 3-мерных уравнений Эйлера при неподвижной системе координат $Oxyz$ исследовалась во всей полноте Н.М.Гюнтером [7].

При условии

$$\Omega = \Pi \subseteq R^3$$

жидкость также не имеет свободной поверхности, но ограничена по объему и целиком заполняет некоторую полость (знаменитая задача Н.Е.Жуковского). В дальнейшем изучается случай, когда

$$\Omega \subset \Pi \subset R^3. \qquad (9)$$

Физически это означает, что жидкость имеет *свободную поверхность* (это обстоятельство отражается первым знаком включения) и находится в полости *конечных* размеров (второй знак включения).

В предположении, что абсолютное движение жидкости является безвихревым (при подходящих начальных условиях такое движение возможно, поскольку силы тяжести имеют потенциал), будем представлять интеграл Лагранжа – Коши в наиболее естественном для случая подвижной полости виде [4]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2-\nabla\psi\cdot(\omega\times r)-(g_0-w_0)\cdot r+\frac{1}{\rho}P_0 = C(t), \qquad (10)$$

$$(x,y,z)\in\Omega(t), \quad t\in[t_0,t_1), \qquad (11)$$

где в дополнение к ранее принятым обозначениям $\psi(x,y,z,t)$ – квазипотенциал относительной скорости жидкости; $w_0(t)$ – вектор абсолютного ускорения начала O подвижной системы координат; $P_0(x,y,z,t)$ – известная функция, задающая поле давлений в жидкости; $C(t)$ – новая произвольная функция времени.

Замечание. В условиях (11), задающих область изменения независимых переменных, использовано обозначение $\Omega(t)$ вместо Ω из (9), чтобы подчеркнуть изменчивость области определения интеграла Лагранжа–Коши и, следовательно, то, что этот интеграл должен быть определен в любой точке охватывающей области Π, а не только в точках области Ω.

В соотношении (10) известными считаются величины $\omega(t)$, g_0, $w_0(t)$, $P_0(x,y,z,t)$ и $C(t)$, а искомой — функция $\psi(t)$.

Для уравнения (10) формулируется общая задача Коши. Она заключается в поиске решения этого уравнения, удовлетворяющего на некоторой заданной начальной гиперповерхности

$$B=\{(x,y,z,t_0):\varphi(x,y,z,t_0)=0\}$$

пространства-времени $R^4\ni(x,y,z,t)$ условию

$$\psi(x,y,z,t_0)\Big|_B=\psi^0(x,y,z). \qquad (12)$$

Здесь $\psi^0(x,y,z)$ и $\varphi(x,y,z,t_0)$ – известные функции. В частном случае начальная поверхность B может совпадать со свободной поверхностью $\Sigma(t_0)$, и тогда

$$\varphi(x,y,z,t_0)=f(x,y,z,t_0).$$

Если $\varphi(x,y,z,t_0)\equiv t_0$, то $B=\{(x,y,z,t_0):t_0=0\}$ и начальные условия задают значения квазипотенциала ψ на гиперплоскости $t_0=0$ пространства-времени R^4, совпадающей со всем 3-мерным пространством (x, y, z). В общем же случае начальные условия задаются на гиперповерхности $t = t_0(x, y, z)$ из R^4, где $t_0(x, y, z, t)$ – решение уравнения

$$\varphi(x, y, z, t_0) = 0$$

относительно переменной t_0. В этом случае значения потенциала задаются не во всем 3-мерном пространстве (x, y, z), а лишь в области определения функции $t_0(x, y, z)$.

Ниже устанавливается тип основного уравнения (10) в области $\Omega(t) \times [t_0, t_1)$.

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Имея в виду применение метода характеристик, построим для основного уравнения (10) эквивалентную систему квазилинейных уравнений.

Введем обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = t,$$

$$p_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad p_4 = \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (13)$$

Тогда основное уравнение (10) представится в следующем стандартном виде:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \psi, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0, \qquad (14)$$

где

$$F = p_4 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - (x_3\omega_y - x_2\omega_z)p_1 -$$
$$-(x_1\omega_z - x_3\omega_x)p_2 - (x_2\omega_x - x_1\omega_y)p_3 - C(x_4) -$$
$$-(g_x - w_x)x_1 - (g_y - w_y)x_2 - (g_z - w_z)x_3 +$$
$$+\frac{1}{\rho}P_0(x_1, x_2, x_3, x_4). \qquad (15)$$

В формуле (15) величины (g_x, g_y, g_z), $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ и (w_x, w_y, w_z) обозначают проекции векторов g_0, ω и w_0 на оси x, y, z (а не производные). Эти проекции зависят только от времени $x_4 = t$. Заметим также, что в уравнении Лагранжа–Коши в форме (14) функция F не зависит от искомой функции ψ, но зависит от ее частных производных.

Продифференцируем уравнение (14) по переменным x_k, используя соотношения

$$\frac{dF}{dx_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\psi} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}.$$

В результате получим следующую систему 4-х уравнений в частных производных относительно величин p_i:

$$a_1\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + a_4\frac{\partial p_1}{\partial x_4} = b_1,$$
$$a_1\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial p_2}{\partial x_3} + a_4\frac{\partial p_2}{\partial x_4} = b_2,$$
$$a_1\frac{\partial p_3}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial p_3}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial p_3}{\partial x_3} + a_4\frac{\partial p_3}{\partial x_4} = b_3,$$
$$a_1\frac{\partial p_4}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial p_4}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial p_4}{\partial x_3} + a_4\frac{\partial p_4}{\partial x_4} = b_4, \qquad (16)$$

где коэффициенты a_i при производных и правые части b_i являются функциями от независимых переменных x_i и зависимых переменных p_i, определяемыми соотношениями

$$a_1 = p_1 - (x_3\omega_y - x_2\omega_z), \quad a_2 = p_2 - (x_1\omega_z - x_3\omega_x),$$

$$a_3 = p_3 - (x_2\omega_x - x_1\omega_y), \quad a_4 = 1; \qquad (17)$$

$$b_1 = \omega_z p_2 - \omega_y p_3 + (g_x - w_x) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial x_1},$$
$$b_2 = \omega_x p_3 - \omega_z p_1 + (g_y - w_y) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial x_2},$$
$$b_3 = \omega_y p_1 - \omega_x p_2 + (g_z - w_z) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial x_3},$$
$$b_4 = (x_3\omega_y^{\bullet} - x_2\omega_z^{\bullet})p_1 + (x_1\omega_z^{\bullet} - x_3\omega_x^{\bullet})p_2 +$$
$$+(x_2\omega_x^{\bullet} - x_1\omega_y^{\bullet})p_3 + (g_x^{\bullet} - w_x^{\bullet})x_1 + (g_y^{\bullet} - w_y^{\bullet})x_2 +$$
$$+(g_z^{\bullet} - w_z^{\bullet})x_3 - -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial x_4} + C^{\bullet}(x_4). \qquad (18)$$

Точка в формуле для b_4 обозначает дифференцирование по времени $x_4 = t$.

Система уравнений (1) является *квазилинейной*, поскольку в ней коэффициенты при старших производных (1-го порядка) от искомых функций зависят от этих функций.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФОРМА

Построим характеристическую форму, с помощью которой затем классифицируем рассматриваемую задачу Коши.

Используем обозначения Р.Куранта [2, стр.177] и представим систему квазилинейных уравнений (1) в следующем матричном виде:

$$\sum_{i=1}^{n} A^i u_i + b = 0, \quad n = 4. \qquad (19)$$

Здесь u – 4-мерный вектор неизвестных величин, причем

$$u = (u^1, u^2, u^3, u^4) = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

u_i – вектор частных производных от u, т.е.

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = (u^1_{x_i}, u^2_{x_i}, u^3_{x_i}, u^4_{x_i}),$$

A^i – диагональные 4×4-матрицы вида

$$A^i = \mathrm{diag}\ [a_i,\ a_i,\ a_i,\ a_i],$$

$b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ – вектор правых частей уравнения (1).

Введем в рассмотрение характеристическую матрицу A на некотором многообразии

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\} \subset R^4,$$

определяемую соотношением

$$A = A^1\phi_1 + A^2\phi_2 + A^3\phi_3 + A^4\phi_4. \qquad (20)$$

Здесь $\phi_i = \partial\phi/\partial x_i$ – частные производные скалярной функции $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, задающей многообразие M.
Замечание. Характеристическая матрица A зависит от многообразия M, так как содержит производные $\phi_i = \partial\phi/\partial x_i$.

Матрицы $A^i\phi_i$ в формуле (20) являются, очевидно, диагональными. Поэтому матрица A как сумма дигональных матриц также будет диагональной. Вводя в рассмотрение векторы

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad \mathrm{grad}\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$$

(заметим, что оператор grad отличен от ранее введенного оператора ∇, поскольку действует по 4-м переменным, а не по трем), представим матрицу A в виде

$$A = \mathrm{diag}\ [a \cdot \mathrm{grad}\phi,\ a \cdot \mathrm{grad}\phi,\ a \cdot \mathrm{grad}\phi,\ a \cdot \mathrm{grad}\phi], \qquad (21)$$

где точка обозначает скалярное произведение векторов.

Формула (21) позволяет легко найти характеристическую форму задачи, которая по определению равна детерминанту матрицы A. Вычислив этот детерминант и обозначив через $Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ искомую характеристическую форму, получаем равенство

$$Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (a \cdot \mathrm{grad}\phi)^4, \qquad (22)$$

где компоненты вектора a задаются формулами (17), а функция ϕ определяет многообразие M. Расписав в равенстве (22) скалярное произведение векторов с учетом соотношения (17) и заменив p_i обозначениями Куранта u^i, получим окончательное выражение для характеристической формы в виде

$$Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \{[u^1 - (x_3\omega_y - x_2\omega_z)]\phi_1 +$$
$$+[u^2 - (x_1\omega_z - x_3\omega_x)]\phi_2 +$$
$$+[u^3 - (x_2\omega_x - x_1\omega_y)]\_3 + \phi_4\}^4. \qquad (23)$$

Замечание. Формула (23) конкретизирует известное выражение характеристической формы на случай уравнения Лагранжа–Коши. Физически функции u^1, u^2, u^3 означают потенциальные составляющие относительной скорости жидкости, так как

$$u^1 = p_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad u^2 = p_2 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u^3 = p_3 = \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

В свою очередь, производные ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 геометрически являются компонентами нормали к гиперповерхности M, рассматриваемой в пространстве R^3 в момент времени t. Заметим также, что форма Q не зависит от ускорений g_0, $w_0(t)$ и давления $P_0(x, y, z, t)$, так как не содержит компонент вектора b. Отсюда следует, что эти ускорения и давление не влияют на тип уравнения Лагранжа–Коши.

5. ТИП И ХАРАКТЕРИСТИКИ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА – КОШИ

Тип уравнения Лагранжа–Коши, как следует из теории характеристик, зависит от свойств нелинейного однородного (по переменным ϕ_i) алгебраического уравнения вида

$$Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = 0. \qquad (24)$$

Из выражения (22) для характеристической формы Q следует, что уравнение (24) имеет один вещественный 4-кратный корень для ϕ_4 вида

$$\phi_4 = -(a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3) \qquad (25)$$

при произвольных остальных величинах ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Кратность этого корня, равная 4, отражает то, что компоненты u^i вектора u удовлетворяют системе (1) четырех уравнений, каждое из которых определяется одним и тем же дифференциальным оператором $L_i[\cdot]$ и имеет вид

$$L_i[u^i] = a_1\frac{\partial u^i}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial u^i}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial u^i}{\partial x_3} + a_4\frac{\partial u^i}{\partial x_4} - b_i = 0,$$
$$i = 1, 2, 3, 4. \qquad (26)$$

Этому уравнению соответствует характеристическая форма

$$Q_i(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)=a_1\phi_1+a_2\phi_2+a_3\phi_3+a_4\phi_4,$$

которая, очевидно, обращается в нуль при условии (25). Но поскольку в случае (26) число уравнений совпадает с числом вещественных корней характеристической формы, уравнение (26), а с ним и система квазилинейных уравнений (1) являются *вполне гиперболическими* [см. 2, стр.178]

Далее, согласно общему определению теории квазилиненйых систем уравнений, любая гиперповерхность будет *характеристикой* уравнения Лагранжа – Коши, если на этой гиперповерхности обращается в нуль характеристическая форма Q. Докажем следующее утверждение.

Свободная поверхность $\Sigma(t)$ жидкости является характеристической поверхностью уравнения Лагранжа – Коши для относительного движения жидкости.

Для доказательства положим, что уравнение свободной поверхности $\Sigma(t)$ жидкости имеет вид

$$f(x,y,z,t)=0.$$

Найдем полную производную от обеих частей этого равенства, учитывая, что координаты x,y,z жидкой частицы, все время находящейся на поверхности $\Sigma(t)$, зависят от времени. Имеем

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \quad (27)$$

Но производные от x,y,z по времени представляют собой проекции относительной скорости жидкости на оси подвижной системы координат $Oxyz$, поэтому, как известно, можно написать

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial x}-(z\omega_y-y\omega_z),$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-(x\omega_y-z\omega_x),$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial x}-(y\omega_x-x\omega_y).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (27), используя формулы (13), (17) и возвращаясь к обозначениям Куранта, получаем равенство

$$f_4=-(a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3),$$

которое с точностью до обозначений f и ϕ совпадает с корнем (25) характеристической формы Q. Отсюда вытекает доказываемое утверждение.

Рассмотрим теперь подробнее соотношение (25) в предположении, что многообразие M при $t=t_0$ совпадает с начальной поверхностью B, т.е.

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)\Big|_{x_4=t_0}=\varphi(x,y,z,t_0)=0.$$

Это уравнение задает реальную поверхность в 3-мерном пространстве R^3 с вектором нормали

$$\varphi_1(x,y,z,t_0)=\frac{\partial\varphi(x,y,z,t_0)}{\partial x},$$

$$\varphi_2(x,y,z,t_0)=\frac{\partial\varphi(x,y,z,t_0)}{\partial y},$$

$$\varphi_3(x,y,z,t_0)=\frac{\partial\varphi(x,y,z,t_0)}{\partial z}.$$

В то же время, производная $\varphi_4=\partial\varphi/\partial t$ при $t=t_0$ определяет скорость

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z,t_0)}{\partial t}$$

изменения со временем поверхности B. Ясно, что производные функции φ по пространственным переменным связаны с ее производной по t соотношением (25) *не для всякой* поверхности B. Если же поверхность B такова, что на ней это соотношение выполняется, то эта начальная поверхность является характеристикой. При этом выражение (25) в момент $t=t_0$ превращается (после подстановки a_i из (17) и замены φ на f) в равенство

$$f_t^0=-\Big\{[\psi_x^0-(x_3\omega_y^0-x_2\omega_z^0)]f_x^0+$$

$$+[\psi_y^0-(x_1\omega_z^0-x_3\omega_x^0)]f_y^0+$$

$$+[\psi_z^0-(x_2\omega_x^0-x_1\omega_y^0)]f_z^0\Big\}, \quad (28)$$

где верхний индекс 0 означает, что соответствующие функции рассматриваются в момент $t=t_0$.

Соотношение (28) связывает производные по x,y,z от начального квазипотенциала $\psi^0(x,y,z)$ и начальной поверхности $f^0(x,y,z)=f(x,y,z,t_0)$ из условий Коши (12) в случае, когда начальная поверхность B совпадает с характеристикой. Примечательно, что это равенство включает также производную f_t от функции $f(x,y,z,t)$ по времени в момент $t=t_0$, которая обычно не требуется в случае нехарактеристической начальной поверхности B.

Отсюда вытекает следующий вывод.

При определении начальных условий Коши на свободной поверхности (т. е. на характеристике) *необходимо задавать не только начальные значения искомых квазипотенциала $\psi^0(x,y,z)$ и свободной поверхности $f^0(x,y,z)$, но и начальные значения их производных (для квазипотенциала задаются производные только по пространственным переменным ψ^0_x, ψ^0_y, ψ^0_z, а для свободной поверхности – одновременно по пространственным переменным f^0_x, f^0_y, f^0_z и по времени $f^0_t(x,y,z) = \partial f(x,y,z,t_0)/\partial t$). При этом должно выполняться дополнительное условие (28) совместности начальных значений этих производных.*

Замечание. Дополнительное условие совместности производных аналогично известному в гидромеханике требованию, чтобы начальное значение $\psi^0(x,y,z)$ решения уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ также удовлетворяло уравнению Лапласа, т. е. $\Delta\psi^0 = 0$.

Наконец, сформулируем следующий основной результат.

Общая задача Коши (10)–(12) для уравнения Лагранжа–Коши теории относительного движения жидкости всегда имеет решение $\psi(x,y,z,t)$. При этом, если начальная поверхность $B \subset R^4$ не является характеристической, решение $\psi(x,y,z,t)$ единственно, в противном случае решение многозначно.

Справедливость этого утверждения вытекает из гиперболичности уравнения Лагранжа – Коши [2, стр. 177]. При этом предполагается, что все встречающиеся здесь функции непрерывны вместе с их производными нужных порядков, а рассмотрения проводятся "в малом".

Многозначность означает, что существует более одного решения $\psi(x,y,z,t)$, принимающего на начальной поверхности B заданные значения

$$\psi_0(x,y,z) = \psi(x,y,z,t_0(x,y,z)),$$

где $t_0(x,y,z)$ – решение уравнения $f(x,y,z,t_0) = 0$, определяющего начальную поверхность B при ее совпадении в момент t_0 со свободной поверхностью $\Sigma(t_0)$ жидкости.

6. ПРИМЕР – "ЛЕТЯЩИЙ ЦИЛИНДР"

Полученные результаты проливают свет на природу многозначности решения задачи, условно названной "летящий цилиндр" и заключающейся в следующем [8].

Рассматривается абсолютно твердый прямой круговой цилиндр, частично заполненный идеальной однородной несжимаемой жидкостью и летящий в поле силы тяжести. Его движение происходит в неподвижной системе координат $O^*\xi,\eta,\zeta$, ось $O^*\zeta$ которой направлена по вектору g_0 ускорения силы тяжести, т. е. в проекциях на эти оси:

$$g_0 = (0,0,-g).$$

С цилиндром жестко связана система координат $Oxyz$ с началом O в его геометрическом центре и осью Ox, совпадающей с его центральной продольной осью. Считается, что при движении цилиндра ось Ox остается все время перпендикулярной вертикальной плоскости $O^*\eta\zeta$, а векторы $v_0(t)$ и $\omega(t)$ его поступательного и вращательного движения в проекциях на оси ξ,η,ζ имеют вид

$$v_0(t) = (0, v_\eta + w_\eta t, v_\zeta + w_\zeta t), \quad \omega(t) = (\alpha^\bullet(t), 0, 0), \tag{29}$$

где v_η, v_ζ и $w_\eta = \text{const}$, $w_\zeta = \text{const}$ – проекции на оси η,ζ векторов абсолютной начальной скорости v_0 и абсолютного ускорения w_0 точки O соответственно; $\alpha(t)$ – угол между осями Oy и $O\eta$ ($\alpha > 0$ при поворотах системы координат $Oxyz$ вокруг оси Ox против хода часовой стрелки). Точка у α обозначает дифференцирование по времени. Таким образом, летящий цилиндр все время остается горизонтальным, двигаясь с постоянным ускорением перпендикулярно своей продольной оси и одновременно вращаясь вокруг нее.

Одним из возможных режимов движения жидкости при перемещениях цилиндра по закону (29) является ее квазитвердое вращение, при котором все жидкие частицы движутся по круговым орбитам (параллельным плоскости Oyz и имеющим центры на оси Ox) с одинаковой угловой скоростью $\omega(t)$. Соответствующее точное аналитическое решение имеет вид (плоская задача)

$$\psi(y,z,t) \equiv 0, \quad \zeta(y,t) = h(t) + k(t)y. \tag{30}$$

Здесь $\zeta(y,t)$ – функция, задающая явно свободную поверхность жидкости согласно уравнению $f(y,z,t) = z - \zeta(y,t) = 0$, а коэффициенты $h(t)$ и $k(t)$ определяются формулами

$$h(t) = h_0\sqrt{\frac{1+k^2(t)}{1+k_0^2}}, \tag{31}$$

$$k(t) = \frac{w_\eta \cos\alpha(t) + (g+w_\zeta)\sin\alpha(t)}{w_\eta \sin\alpha(t) - (g+w_\zeta)\cos\alpha(t)}, \tag{32}$$

где h_0, k_0 – некоторые постоянные. Геометрически $\zeta(y,t)$ задает прямую в плоскости Oyz, $h(t)$ – точку пересечения этой прямой с осью z, а $k(t)$ – угловой коэффициент этой прямой. Здесь не приведено входящее в решение выражение для произвольной функции $C(t)$, которое выбирается очевидным образом из динамического условия при подстановке в него приведенных значений $h(t)$, $k(t)$.

Решение (30) – многозначно. Это значит, что существует целое множество наборов параметров $\{w_\eta, w_\zeta, \alpha(t)\}$ таких, что каждому из них соответствует своя пара функций $(h(t), k(t))$, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям:

$$h(t_0) = h_0, \quad k(t_0) = k_0.$$

Действительно, $h(t_0) = h_0$ при любом $k(t)$. В то же время, если в начальный момент

$$k_0 = \frac{w_\eta \cos\alpha_0 + (g + w_\zeta)\sin\alpha_0}{w_\eta \sin\alpha_0 - (g + w_\zeta)\cos\alpha_0}, \quad (\alpha_0 = \alpha(t_0)),$$

то это значение k_0 может быть обеспечено подходящим выбором ускорений w_η, w_ζ и начального угла поворота α_0. В частности, чтобы обеспечить нулевое начальное значение углового коэффициента, эти параметры должны быть связаны соотношением

$$w_\eta = -(g + w_\zeta)\mathrm{tg}\,\alpha_0.$$

Таким образом, коротко говоря, начальное условие (h_0, k_0) одно, а решений, удовлетворяющих этому начальному условию, – целое множество. Эти решения функционально задаются одинаково, но разнятся между собой значениями параметров объединяющей их функции. Поскольку функция, задающая это множество решений, одна, можно сказать, что решение у рассматриваемой задачи одно, но многозначно.

Рассмотрим теперь многозначное решение (30) в свете сформулированных выше теоретических результатов. В данном конкретном случае общая начально-краевая задача (6)–(8), (2), (3), (5) принимает следующий вид:

уравнение Лагранжа–Коши –

$$\psi_t + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \alpha^\bullet(t)(z\psi_y - y\psi_z) - y[g_y - v_y^\bullet + \alpha^\bullet(t)v_z] -$$

$$-z[g_z - v_z^\bullet - \alpha^\bullet(t)v_y] + \frac{1}{\rho}P(y,z,t) = C(t), \quad (33)$$

уравнение неразрывности –

$$\Delta\psi(y,z,t) = 0,$$

условие непротекания –

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0, \quad (y,z) \in S,$$

кинематическое условие –

$$\zeta_t + \alpha^\bullet(t)\zeta\zeta_y + \psi_y\zeta_y - \psi_z = -\alpha^\bullet(t)y, \quad (y,z) \in \Sigma(t), \quad (34)$$

динамическое условие –

$$P(y,z,t) = p_0, \quad (y,z) \in \Sigma(t),$$

начальные условия –

$$\psi(y,z,t_0) = \psi^0(y,z), \quad \zeta(y,t_0) = \zeta^0(y). \quad (35)$$

Здесь ψ_t, ψ_y, ψ_z, ζ_y, ζ_t – частные производные функций ψ, ζ; g_y, g_z и v_y, v_z – проекции постоянных по направлению векторов g_0 и $v_0(t)$ соответственно на вращающиеся оси Oyz; $\zeta^0(y)$ – начальная форма свободной поверхности жидкости.

Положим временно, что распределение давления внутри жидкости известно, т. е. $P(y,z,t) = P_0(y,z,t)$, и в этом предположении построим для уравнения Лагранжа–Коши (33) характеристическую форму (23).

Используя связь между переменными x_1, x_2, x_3, x_4 и x, y, z, t, находим, что в данном случае форма (23) имеет вид

$$Q(\varphi_y, \varphi_z, \varphi_t) = \{[\psi_y + z\alpha^\bullet(t)]\varphi_y +$$

$$+[\psi_z - y\alpha^\bullet(t)]\varphi_z + \varphi_t\}^4,$$

где φ_y, φ_z, φ_t – производные функции $\varphi(y,z,t)$, определяющей начальную поверхность B. Полагая поверхность B совпадающей со свободной поверхностью $\Sigma(t)$ и заменяя φ на $f = z - \zeta(y,t)$, из последнего соотношения получаем формулу

$$Q(\zeta_y, \zeta_z, \zeta_t) = \{[\psi_y + z\alpha^\bullet(t)](-\zeta_y) + [\psi_z - y\alpha^\bullet(t)] - \zeta_t\}^4.$$

Отсюда, рассматривая алгебраическое уравнение (24), находим его корень (25):

$$\zeta_t = -(\psi_y + z\alpha^\bullet(t))\zeta_y + \psi_z - y\alpha^\bullet(t).$$

Как и в общем случае, это соотношение определит именно *характеристику*, если частные производные по пространственным переменным от квазипотенциала ψ_y, ψ_z будут определены в точках $(y,z) \in \Sigma(t)$ этой поверхности. Но поскольку на свободной поверхности выполняется равенство $z = \zeta$, последнее соотношение в точках (y,z) характеристики будет иметь вид

$$\zeta_t = -(\psi_y + \zeta\alpha^\bullet(t))\zeta_y + \psi_z - y\alpha^\bullet(t). \quad (36)$$

Сравнение выражения (36) с (34) показывает, что кинематическое условие на свободной поверхности $\Sigma(t)$ является дифференциальным уравнением *характеристики* уравнения Лагранжа–Коши.

Замечание. Если мы хотим рассматривать при $t = t_0$ характеристику, начальные функции ψ^0, ζ^0 должны быть согласованы с кинематическим условием (34), т.е. должно выполняться соотношение

$$\zeta_t^* + \alpha^\bullet(t_0)\zeta^*\zeta_y^* + \psi_y^*\zeta_y^* - \psi_z^* = -\alpha^\bullet(t_0)y, \quad (y,z) \in \Sigma_0, \tag{37}$$

где ψ_y^*, ψ_z^* и ζ_t^*, ζ_y^* – значения частных производных заданных функций ψ^0 и ζ^0 в точках (y,z,t_0) начальной поверхности Σ_0. При других ψ^0 и ζ^0 (т. е. не удовлетворяющих этому условию) начальная поверхность не будет характеристикой.

То обстоятельство, что свободная поверхность $\Sigma(t)$ является характеристикой, приводит (при начальных условиях (35) с дополнительным условием согласованности (37)) к многозначности решения гидродинамической задачи Коши, что и подтверждает дальнейшее решение задачи о летящем цилиндре.

Действительно, подстановка выражений (30) в кинематическое условие (или, что то же, в уравнение характеристик) (34) дает соотношение

$$(k^\bullet + \omega k^2 + \omega)y = -(h^\bullet + hk\omega), \quad (\omega = \alpha^\bullet(t)).$$

В этом равенстве левая часть, зависящая от y, может быть равна зависящей только от t правой части тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} k^\bullet + \omega k^2 + \omega = 0, \\ h^\bullet + hk\omega = 0. \end{array} \right. \tag{38}$$

Последние два равенства представляют собой систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двух функций $k(t)$ и $h(t)$. Непосредственно проверяется, что второе из уравнеий (38) превращается в первое, если $h(t)$ выражается через $k(t)$ по формуле (31). В свою очередь, первое из этих уравнений имеет общее решение, определяемое формулой (32). Но поскольку величины w_η, w_ζ не входят в первое из уравнений (38), они являются произвольными постоянными решения (31) (производная функции $\alpha(t)$ – параметр этого уравнения). Наличие же в общем решении уравнения 1-го порядка *двух* произвольных постоянных, вместо обычной одной, приводит к тому, что любому начальному условию $k(t)\big|_{t=t_0} = k_0$ соотвествует бесконечно много решений (32), отвечающих тем парам постоянных (w_η, w_ζ), которые удовлетворяют этому начальному условию. Другими словами, решение (32) задачи Коши для рассматриваемого нелинейного уравнения 1-го порядка является многозначным. Отсюда вытекает многозначность решения задачи о летящем цилиндре, что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исходная общая задача теории относительного движения жидкости в виде уравнения Лапласа с граничными и начальными условиями переформулирована как начально-краевая задача для системы двух уравнений, состоящей из уравнения Лагранжа–Коши и уравнения Лапласа. Установлена гиперболичность уравнения Лагранжа–Коши для квазипотенциала относительной скорости жидкости. Показано, что свободная поверхность жидкости является характеристикой этой формы уравнения Лагранжа–Коши. Доказана возможность существования многозначных решений рассматриваемой задачи и приведен пример такого решения (полное решение задачи о “летящем цилиндре”). Сформулированы необходимые дополнительные начальные условия задачи Коши, если начальные значения квазипотенциала задаются не на произвольной начальной гиперповерхности $\varphi(x,y,z,t_0) = 0$, а на характеристике $f(x,y,z,t) = 0$ в ее начальном положении, т. е. при $t = t_0$.

Возвращаясь к системе двух уравнений, теперь ее можно классифицировать как смешанную гиперболо-эллиптическую систему. Поскольку в ней эллиптическое уравнение (уравнение Лапласа) не содержит производных по времени, характер ее решений во временно́й области полностью определяется гиперболической составляющей. Этим объясняется природа волновых движений жидкости как в линейном, так и в нелинейном случаях.

1. *Кочин Н. Е.,Кибель И. А.,Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть первая.– М.: ГИТТЛ, 1955.– 556 с.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.– М.: Мир, 1964.– 830 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.– М.: Мир, 1977.– 622 с.
4. *Луковский И. А., Золотенко Г. Ф.* Численное моделирование колебаний жидкости в закрытом подвижном прямоугольном сосуде // Гидромеханика.– 1998.– **72**.– С. 72–87.
5. *Юдович В. И.* О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики // Успехи механики.– 2002.– **1**,N 1.– С. 61–102.
6. *Гюнтер Н. М.* Об уравнении $\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = f$ // Матем. сб..– 1925.– **32**,N 2.– С. 279–304.
7. *Гюнтер Н. М.* Об основной задаче гидродинамики // Изв. физ.-мат. инст. им.В.А.Стеклова. Т.2.– 1927.– **32**,N 2.– С. 1–168.
8. *Золотенко Г. Ф.* Точное решение одной нелинейной начально–краевой задачи гидродинамики.– В кн.: Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем.– К.: Інст. матемтики НАНУ, 2003.– 57–74 с.