ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2005. Том 8, N 1-2. С. 16 – 27

УДК 519.2+600.1

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ИХ ОПИСАНИЕ

И. И. ГОРБАНЬ

Украинский научно-исследовательский и учебный центр проблем стандартизации, сертификации и качества, Киев

Получено 06.05.2005 ⋄ Пересмотрено 15.08.2005

Исследованы недетерминированные массовые явления, для которых вероятностная мера не определена. Эти явления, названные гиперслучайными, наблюдаются тогда, когда условия проведения экспериментов меняются неизвестным образом. Разработаны основы математического аппарата для описания гиперслучайных явлений. Показано, что оценки, описывающие такие явления, несут больше информации и характеризуют их полнее, чем аналогичные вероятностные и числовые характеристики, рассчитываемые на основе классических статистических методов.

Дослiдженi недетермiнованi масовi явища, для яких iмовiрнiсна мiра не визначена. Цi явища, названi гiпервипадковими, спостерiгаються тодi, коли умови проведення експериментiв змiнюються невiдомим чином. Розробленi основи математичного апарату для опису гiпервипадкових явищ. Показано, що оцiнки, якi описують такi явища, несуть бiльше iнформацiї i характеризують їх бiльш повно, нiж вiдповiднi iмовiрнiснi та числовi характеристики, якi розраховуються на основi класичних статистичних методiв.

The non-determinated mass phenomena, for which probability measure is undefined, are considered. Such phenomena are referred to as the hyper-random ones, and occur when the experimental conditions change in an unknown way. The fundamentals of mathematical apparatus for describing the hyper-random phenomena are developed. It is shown that the estimates describing such phenomena possess more information and characterize them in more detail than the corresponding probabilistic and numerical characteristics obtained by means of classical statistical methods.

ВВЕДЕНИЕ

На практике часто приходится сталкиваться с событиями, величинами и функциями, похожими на случайные. Результаты наблюдения указанных явлений, названных гиперслучайными [1], заранее предсказать нельзя. Как и случайные явления, они относятся к классу недетерминированных (неопределенных) [1 – 6]. Однако между случайными и гиперслучайными событиями существуют принципиальные отличия, связанные с условиями наблюдения.

Для случайных явлений эти условия полагаются неизменными. На этом основании для каждого события можно указать определенную вероятностную меру [7 – 9]. Для гиперслучайных явлений условия меняются неизвестным (неопределенным) образом. При этом задать вероятностную меру принципиально нельзя.

Характерным примером гиперслучайного явления может служить любое событие A, частота которого $p_N(A)$ в N опытах не имеет предела при $N\to\infty$. Гиперслучайной величиной оказывается результат измерения любого параметра, когда условия, при которых проводятся измерения, непредсказуемо меняются.

Для описания гиперслучайных явлений были предложены и разработаны специальные методы [1]. Цель данной статьи состоит в развитии этих методов применительно к гиперслучайным событиям и величинам и представлении возможностей их применения для описания акустических явлений.

1. ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ОПИСАНИЕ

Пусть заданы пространство Ω с элементарными событиями $\omega\in\Omega$ и σ – алгебра (борелевское поле $\mathcal{J}$) подмножеств (событий). При фиксированных условиях g каждому событию A можно поставить в соответствие вероятностную меру $P(A/g)$. Таким образом, тройкой $(\Omega,\mathcal{J},P)$ задается вероятностное пространство. Условия g могут быть детерминированными (полностью известными, т. е. $g=\text{const}$) или случайными (если определена вероятностная мера $P(g)$ $\forall g\in G$). В обоих случаях A является случайным событием – событием, для которого определена вероятностная мера.

При неопределенных условиях g (когда известно лишь G – множество возможных значений g, но неизвестно какое именно значение принимает величина g) $P(A/g)$ становится неопределенной величиной. События, для которых вероятностная мера не определена, нельзя считать случайными. Будем называть их гиперслучайными. Из сказанного следует, что гиперслучайные события задаются четверкой $(\Omega,\mathcal{J},G,P_g)$, где P_g – вероятностная мера при фиксированном $g\in G$.

Для гиперслучайного события задать вероятностную меру нельзя, но можно поставить в соответствие определенные величины, количественно характеризующие диапазон изменения вероятности события: верхнюю $P_S(A)$ и нижнюю $P_I(A)$ границы

$$P_S(A) = \sup_{g\in G} P(A/g), \qquad P_I(A) = \inf_{g\in G} P(A/g), \tag{1}$$

называемые в дальнейшем границами вероятности. В детерминированных (фиксированных) условиях ($g=\text{const}$) эти границы совпадают. Тогда гиперслучайное событие вырождается в случайное и величина $P(A)=P_S(A)=P_I(A)$ представляет собой вероятность случайного события A.

Нетрудно убедиться, что

1)
$$P_S(A) \ge 0, \qquad P_I(A) \ge 0; \tag{2}$$

2) для попарно несовместных событий

$$P_S(\bigcup_n A_n) \le \sum_n P_S(A_n), \qquad P_I(\bigcup_n A_n) \ge \sum_n P_I(A_n), \tag{3}$$

3)
$$P_S(\Omega) = P_I(\Omega) = 1. \tag{4}$$

Из выражений (1) – (4) следует, что $P_S(A)$ и $P_I(A)$ представляют собой нормированные полумеры. При этом

$$0 \le P_S(A) \le 1, \qquad 0 \le P_I(A) \le 1,$$

$$P_S(\emptyset) = P_I(\emptyset) = 0.$$

Для гиперслучайных явлений имеют место следующие соотношения:

1) если $A_m \subset A_{m+1}$, $m \ge 1$, то

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M), \qquad P_I(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M), \tag{5}$$

2) если $A_{m+1} \subset A_m$, $m \ge 1$, то

$$P_S(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M), \qquad P_I(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M). \tag{6}$$

Доказательство равенств (5) основано на том, что объединение событий $A_1, \ldots, A_M$, связанных между собой соотношением $A_1 \subset \ldots \subset A_M$, представляет собой событие A_M. При доказательстве равенств (6) используется то, что пересечение событий $A_1, \ldots, A_M$, связанных между собой соотношением $A_1 \supset \ldots \supset A_M$, совпадает с событием A_M.

Для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2) - P_I(A_1 \cap A_2), \tag{7}$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2) - P_S(A_1 \cap A_2), \tag{8}$$

аналогичные выражению, описывающему теорему сложения для случайных событий

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Для доказательства неравенств (7), (8) рассмотрим два события A_1 и A_2, в общем случае совместных. Верхняя граница частоты события $A_1 \cup A_2$ будет

$$P_S(A_1 \cup A_2) =$$
$$= \sup_{g\in G}(P(A_1/g) + P(A_2/g) - P(A_1 \cap A_2/g)) \le$$
$$\le \sup_{g\in G}(P(A_1/g) + P(A_2/g)) - \inf_{g\in G}(P(A_1 \cap A_2/g).$$

Отсюда следует неравенство (7). Нижняя граница частоты события $A_1 \cup A_2$ будет

$$P_I(A_1 \cup A_2) =$$
$$= \inf_{g\in G}(P(A_1/g) + P(A_2/g) - P(A_1 \cap A_2/g)).$$

Отсюда следует неравенство (8).

Отметим, что, когда события A_1 и A_2 несовместны, то $P_S(A_1 \cap A_2)=0$, $P_I(A_1 \cap A_2)=0$ и из выражений (7), (8) следует

$$P_S(A_1 \cup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2), \qquad P_I(A_1 \cup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2). \tag{9}$$

Когда же $A_1 \subset A_2$, то, согласно формуле (5),

$$P_S(A_1 \cup A_2) = P_S(A_2),$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) = P_I(A_2).$$

В общем случае для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cap A_2) \le P_S(A_1) P_S(A_2/A_1),$$
$$P_S(A_1) \ne 0,$$
$$P_I(A_1 \cap A_2) \ge P_I(A_1) P_I(A_2/A_1),$$
$$P_I(A_1) \ne 0, \tag{10}$$

аналогичные выражению

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1),$$

описывающему теорему умножения для случайных событий при $P(A_1) \ne 0$. В данном случае под $P_S(A_2/A_1)$ и $P_I(A_2/A_1)$ подразумеваются, соответственно, верхняя и нижняя границы вероятности события A_2 при условии, что произошло событие A_1. Доказательство неравенств (10) аналогично рассмотренному выше.

Гиперслучайные события A_1 и A_2 будем называть независимыми, если границы вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P_S(A_1 \cap A_2) = P_S(A_1) P_S(A_2),$$
$$P_I(A_1 \cap A_2) = P_I(A_1) P_I(A_2). \tag{11}$$

Смысл формул (11) заключается в том, что при независимых гиперслучайных событиях A_1 и A_2 границы функции распределения пересечения событий определяются лишь границами функции распределения события A_1 и границами функции распределения события A_2. При этом несущественно, произошло или не произошло событие A_1 до выяснения, каковы границы события A_2, и произошло или нет событие A_2 до выяснения, каковы границы события A_1. Результат будет один и тот же.

Аналогами формулы полной вероятности и теоремы гипотез (теоремы Байеса) теории вероятности служат следующие теоремы, также доказываемые по рассмотренной выше схеме.

Теорема 1. Пусть событие A может произойти совместно с одним и только одним событием из набора $H_1, \ldots, H_M$, образующего полную группу несовместных гипотез. Тогда

$$P_S(A) \le \sum_{m=1}^{M} P_S(H_m) P_S(A/H_m),$$
$$P_I(A) \ge \sum_{m=1}^{M} P_I(H_m) P_I(A/H_m). \tag{12}$$

Теорема 2. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ – множество попарно несовместных гипотез, образующих полную группу. Тогда для каждой пары событий H_m, A справедливы неравенства

$$P_S(H_m/A) \le \frac{P_S(H_m \cap A)}{P_I(A)} \le$$
$$\le \frac{P_S(H_m) P_S(A/H_m)}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_I(H_m) P_I(A/H_m)},$$

$$P_I(H_m/A) \ge \frac{P_I(H_m \cap A)}{P_S(A)} \ge$$
$$\ge \frac{P_I(H_m) P_I(A/H_m)}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_S(H_m) P_S(A/H_m)}.$$

2. СКАЛЯРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

Скалярной гиперслучайной величиной X будем называть произвольную числовую функцию, определенную на пространстве Ω элементарных событий ω, для которой вероятностная мера не определена. Значения x гиперслучайной величины X могут быть получены с помощью некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$.

Для описания гиперслучайных величин можно предложить аналоги вероятностных характеристик случайных величин: функции распределения вероятности, плотности распределения вероятности, характеристической функции, образующей функции моментов, образующей функции факториальных моментов и др. Остановимся на первых трех из них.

Аналогами функции распределения могут служить функции, определяемые следующим образом:

$$F_S(x) = \sup_{g \in G} P\{X \le x/g\},$$
$$F_I(x) = \inf_{g \in G} P\{X \le x/g\}. \tag{13}$$

Здесь $P\{X \le x/g\}$ – вероятность выполнения неравенства $X \le x$ в условиях g.

Из выражений (13) видно, что функции $F_S(x)$ и $F_I(x)$ определены, соответственно, как верхняя и нижняя границы вероятности выполнения условия $X \le x$. В дальнейшем будем называть их границами функции распределения. Функции $F_S(x)$ и $F_I(x)$ обладают теми же свойствами, что и функция распределения вероятности случайной величины: они неотрицательные ($F_S(x) \ge 0$, $F_I(x) \ge 0$), ограниченные ($0 \leq F_S(x) \leq 1$, $0 \leq F_I(x) \leq 1$) и неубывающие. Кроме того, $F_S(x) \geq F_I(x)$, при минимальном значении гиперслучайной величины (если оно существует) границы совпадают и равны нулю, а при максимальном (если оно существует) – совпадают и равны единице.

Между границами функции распределения расположена зона неопределенности (рис. 1). Ее ширина определяется разностью $\Delta F(x) = F_S(x) - F_I(x)$: чем больше неопределенность, тем больше величина $\Delta F(x)$. Если X – случайная величина, то границы функции распределения совпадают и разность $\Delta F(x)$ равна нулю.

Для выяснения особенностей границ функции распределения при высоком уровне неопределенности рассмотрим гиперслучайную величину X, определенную на интервале $[a, b]$. По мере возрастания неопределенности (приближения к полному хаосу [10 – 13]) верхняя граница стремится к единице, а нижняя – к нулю. При этом верхнюю границу можно рассматривать, например, как функцию

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ (1-\varepsilon)/2 & \text{при} \quad x = a, \\ 1-\varepsilon & \text{при} \quad x \in (a, b), \\ 1-\varepsilon/2 & \text{при} \quad x = b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b, \end{cases} \qquad (14)$$

а нижнюю – как функцию

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \varepsilon/2 & \text{при} \quad x = a, \\ \varepsilon & \text{при} \quad x \in (a, b), \\ (1+\varepsilon)/2 & \text{при} \quad x = b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b, \end{cases} \qquad (15)$$

где $\varepsilon \to 0$ (рис. 2). Определенные таким образом зависимости $F_S(x)$, $F_I(x)$ стремятся при $\varepsilon \to 0$ к функциям, имеющим единичные скачки в точках a и b соответственно. Если $a \to -\infty$, а $b \to \infty$, эти единичные скачки находятся на минус и плюс бесконечности.

Гиперслучайную величину будем называть непрерывной, если на любом конечном интервале границы ее функции распределения непрерывны и существуют кусочно-непрерывные их производные. Для непрерывной гиперслучайной величины аналогами плотности вероятности случайной

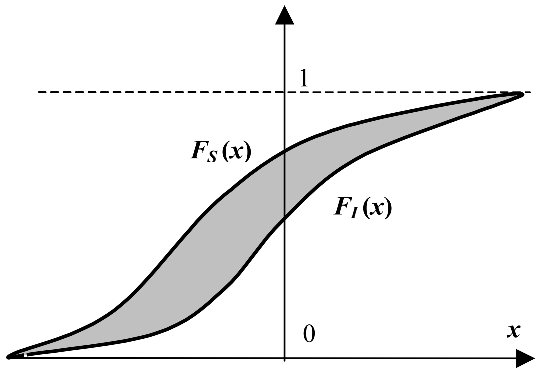


Рис. 1. Границы функции распределения и зона неопределенности (затемненная область)

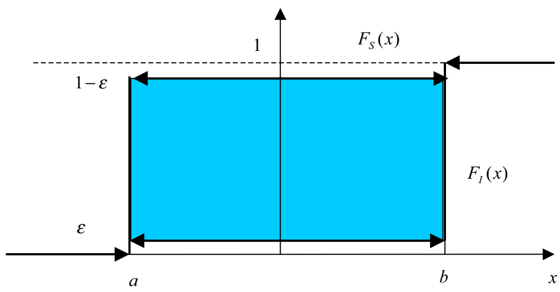


Рис. 2. Пример расположения границ функции распределения гиперслучайной величины X и зоны неопределенности (затемненная область) при приближении к хаосу ($\varepsilon \to 0$)

величины могут служить функции

$$f_S(x) = \frac{dF_S(x)}{dx}, \qquad f_I(x) = \frac{dF_I(x)}{dx}, \qquad (16)$$

представляющие собой производные верхней и нижней границ функции распределения и называемые в дальнейшем границами плотности распределения.

Используя обобщенные функции, можно определить границы плотности распределения не только для непрерывных гиперслучайных величин, но и для тех, у которых границы функции распределения представляют собой кусочно-непрерывные функции (например, функций (14), (15)).

Нетрудно убедиться, что границы плотности распределения обладают следующими свойствами плотности вероятности случайной величины: поскольку $F_S(x)$ и $F_I(x)$ неубывающие, то они неотрицательны ($f_S(x) \geq 0$, $f_I(x) \geq 0$); поскольку первообразные $F_S(x)$, $F_I(x)$ функций $f_S(x)$, $f_I(x)$ при

$x \to \infty$ равны единице, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_S(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_I(x)dx = 1$$

и

$$F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_S(x)dx,$$

$$F_I(x_2) - F_I(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_I(x)dx.$$

Аналогами характеристической функции случайной величины могут служить границы характеристической функции гиперслучайной величины, под которыми понимается преобразование Фурье границ плотности распределения:

$$\begin{aligned} Q_S(j\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\exp(j\omega x)dx, \\ Q_I(j\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_I(x)\exp(j\omega x)dx. \end{aligned} \qquad (17)$$

Границы характеристической функции обладают свойствами характеристической функции: они ограничены ($|Q_S(j\omega)| \le Q_S(0) = 1$, $|Q_I(j\omega)| \le Q_I(0) = 1$) и в случае вещественных гиперслучайных величин являются комплексно самосопряженными ($Q_S(-j\omega) = Q_S^*(j\omega)$, $Q_I(-j\omega) = Q_I^*(j\omega)$).

В отличие от границ функции распределения, границы плотности распределения и границы характеристической функции не столь наглядно характеризуют зону неопределенности, хотя с их помощью можно ввести полезные для этого величины

$$\Delta f(x) = f_S(x) - f_I(x),$$

$$\Delta Q(j\omega) = Q_S(j\omega) - Q_I(j\omega).$$

Информативными характеристиками могут оказаться средние границ:
среднее границ функции распределения

$$F_0(x) = (F_S(x) + F_I(x))/2,$$

среднее границ плотности распределения

$$f_0(x) = (f_S(x) + f_I(x))/2$$

и среднее границ характеристической функции

$$Q_0(j\omega) = (Q_S(j\omega) + Q_I(j\omega))/2.$$

Эти средние связаны между собой очевидными соотношениями:

$$f_0(x) = \frac{dF_0(x)}{dx},$$

$$Q_0(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\exp(j\omega x)dx.$$

Для описания гиперслучайных величин могут быть использованы различные числовые характеристики, аналогичные характеристикам случайных величин: математическому ожиданию, дисперсии, среднеквадратическому отклонению и др.

Математическими ожиданиями границ $M_S[\varphi(X)]$, $M_I[\varphi(X)]$ функции $\varphi(X)$ гиперслучайной величины X с границами плотности распределения $f_S(x)$, $f_I(x)$ будем называть интегралы

$$\begin{aligned} M_S[\varphi(X)] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f_S(x)dx, \\ M_I[\varphi(X)] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f_I(x)dx. \end{aligned} \qquad (18)$$

Математические ожидания границ существуют только тогда, когда существуют (в смысле абсолютной сходимости) интегралы (18).

Из выражений (17), (18) видно, что границы характеристической функции – это математические ожидания верхней и нижней границы комплексной гиперслучайной величины $\exp(j\omega X)$. Из выражений (18) следует, что математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix} гиперслучайной величины X, представляемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X) = X$, описываются выражениями

$$\begin{aligned} m_{Sx} = M_S[X] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_S(x)dx, \\ m_{Ix} = M_I[X] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_I(x)dx. \end{aligned} \qquad (19)$$

Для вещественной гиперслучайной величины X дисперсии границ D_{Sx} и D_{Ix} определим как

$$\begin{aligned} D_{Sx} &= M_S[(X - m_{Sx})^2], \\ D_{Ix} &= M_I[(X - m_{Ix})^2], \end{aligned} \qquad (20)$$

а среднеквадратические отклонения σ_{Sx} и σ_{Ix} границ – как

$$\sigma_{Sx} = \sqrt{D_{Sx}}\,, \qquad \sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}\,. \tag{21}$$

Математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} гиперслучайной величины X характеризуют средние значения X, рассчитанные для верхней и нижней границ плотности распределения. Дисперсии границ D_{Sx} и D_{Ix} величины X, а также среднеквадратические отклонения границ σ_{Sx} и σ_{Ix} величины X характеризуют разброс значений X относительно соответствующих математических ожиданий m_{Sx} и m_{Ix}.

Учитывая, что при $F_S(x_1)=F_I(x_2)$ имеет место неравенство $x_1 \leq x_2$, нетрудно показать, что всегда $m_{Sx} \leq m_{Ix}$. В то же время, величина дисперсии D_{Sx} может быть больше, меньше или равна D_{Ix}.

В качестве интегральных характеристик можно предложить также среднее математических ожиданий границ функции $\varphi(X)$, определяемое как $M_0[\varphi(X)]=(M_S[\varphi(X)]+M_I[\varphi(X)])/2$, среднее математических ожиданий границ функции X, определяемое как $m_{0x}=(m_{Sx}+m_{Ix})/2$, среднее дисперсий границ $D_{0x}=M_0[(X-m_{0x})^2]$ и среднее среднеквадратических отклонений $\sigma_{0x}=\sqrt{D_{0x}}$.

Кроме того, можно ввести ряд других характеристик, дающих представление о гиперслучайной величине, в частности, начальные моменты границ $m_{S\nu}$ и $m_{I\nu}$ ν-го порядка, определив их как математические ожидания границ функции $\varphi(X)=X^{\nu}$, центральные моменты $\mu_{S\nu}$ и $\mu_{I\nu}$ границ ν-го порядка, определив их как математические ожидания соответственно границ функциий $\varphi(X)=(X-m_{Sx})^{\nu}$ и $\varphi(X)=(X-m_{Ix})^{\nu}$ и т. п.

3. ВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

Материалы предыдущего раздела обобщаются на векторные гиперслучайные величины, каждая компонента которых представляет собой скалярную гиперслучайную величину.

Определим границы функции распределения векторной гиперслучайной величины $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_M)$ как

$$F_S(\vec{x}) = \sup_{g\in G} P\{X_1 \leq x_1,\ldots,X_M \leq x_M/g\}, \tag{22}$$

$$F_I(\vec{x}) = \inf_{g\in G} P\{X_1 \leq x_1,\ldots,X_M \leq x_M/g\}, \tag{23}$$

границы плотности распределения – как

$$f_S(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_S(\vec{x})}{\partial x_1\ldots\partial x_M}\,,$$
$$f_I(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_I(\vec{x})}{\partial x_1\ldots\partial x_M}\,, \tag{24}$$

а границы характеристической функции – как

$$Q_S(j\vec{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x})\exp(j\vec{\omega}\vec{x})d\vec{x},$$
$$Q_I(j\vec{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x})\exp(j\vec{\omega}\vec{x})d\vec{x}.$$

Все они обладают теми же свойствами, что и аналогичные характеристики векторных случайных величин, а также специфическими свойствами, аналогичными свойствам скалярных гиперслучайных величин. В частности, $F_S(\vec{x}) \geq F_I(\vec{x})$, причем границы гиперслучайных величин совпадают при устремлении компонент вектора $\vec{x}$ к минус и плюс бесконечности.

Рассмотрим L-мерную гиперслучайную величину $\vec{Z}=(\vec{X},\vec{Y})$, состоящую из M-мерной гиперслучайной величины $\vec{X}$ и $(L-M)$-мерной гиперслучайной величины $\vec{Y}$. По аналогии со случайными величинами введем понятия границ условной функции распределения $F_S(\vec{y}/\vec{x})$, $F_I(\vec{y}/\vec{x})$, границ условной плотности распределения $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ и границ условной характеристической функции $Q_S(j\vec{\omega}_y/\vec{x})$, $Q_I(j\vec{\omega}_y/\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{Y}$ при условии, что гиперслучайная величина $\vec{X}$ приняла конкретное значение $\vec{x}$.

Границы совместной плотности распределения $f_S(\vec{x},\vec{y})$, $f_I(\vec{x},\vec{y})$ системы гиперслучайных величин $\vec{Z}=(\vec{X},\vec{Y})$ связаны с границами условной плотности распределения $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{Y}$ и границами плотности распределения $f_S(\vec{x})$, $f_I(\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{X}$ неравенствами

$$f_S(\vec{x},\vec{y}) \leq f_S(\vec{x})f_S(\vec{y}/\vec{x}),$$
$$f_I(\vec{x},\vec{y}) \geq f_I(\vec{x})f_I(\vec{y}/\vec{x}), \tag{25}$$

следующими из выражений (10).

Гиперслучайные величины $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ будем называть независимыми, если границы плотности распределения $f_S(\vec{x},\vec{y})$ и $f_I(\vec{x},\vec{y})$ допускают факторизацию:

$$f_S(\vec{x},\vec{y}) = f_S(\vec{x}) f_S(\vec{y}),$$
$$f_I(\vec{x},\vec{y}) = f_I(\vec{x}) f_I(\vec{y}). \qquad (26)$$

Нетрудно убедиться, что для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ факторизуются не только границы плотности распределения, но также границы функции распределения и характеристической функции:

$$F_S(\vec{x},\vec{y}) = F_S(\vec{x}) F_S(\vec{y}),$$

$$F_I(\vec{x},\vec{y}) = F_I(\vec{x}) F_I(\vec{y}),$$

$$Q_S(j\vec{\omega}_x, j\vec{\omega}_y) = Q_S(j\vec{\omega}_x) Q_S(j\vec{\omega}_y),$$

$$Q_I(j\vec{\omega}_x, j\vec{\omega}_y) = Q_I(j\vec{\omega}_x) Q_I(j\vec{\omega}_y).$$

Следует обратить внимание на то, что независимость гиперслучайных величин не означает, что между ними отсутствует связь. Она просто не проявляется на уровне установленных полумер. Уместно отметить, что понятие независимости случайных величин, широко используемое в теории вероятности, следует трактовать аналогично: связь между случайными величинами может существовать, хотя на уровне вероятностной меры она не наблюдается.

Границы плотности распределения M-мерной гиперслучайной величины $(X_1, \ldots, X_M)$ определяются следующими неравенствами:

$$f_S(x_1,\ldots,x_M) \le$$
$$\le f_S(x_M/x_1,\ldots,x_{M-1}) \ldots f_S(x_2/x_1) f_S(x_1), \qquad (27)$$

$$f_I(x_1,\ldots,x_M) \ge$$
$$\ge f_I(x_M/x_1,\ldots,x_{M-1}) \ldots f_I(x_2/x_1) f_I(x_1). \qquad (28)$$

Здесь $f_S(x_m/x_1,\ldots,x_{m-1})$, $f_I(x_m/x_1,\ldots,x_{m-1})$, $(m=\overline{2,M})$ – границы одномерных условных плотностей распределения; $f_S(x_1)$, $f_I(x_1)$ – границы одномерной безусловной плотности распределения. Доказательство этих соотношений может быть проведено методом математической индукции с использованием неравенств (25).

Отметим, что если компоненты гиперслучайной величины независимы, справедливо

$$f_S(x_1,\ldots,x_M) = f_S(x_1) \ldots f_S(x_M),$$

$$f_I(x_1,\ldots,x_M) = f_I(x_1) \ldots f_I(x_M).$$

Для векторного M-мерного гиперслучайного вектора определим средние границ функции распределения, плотности распределения и характеристической функции:

$$F_0(\vec{x}) = (F_S(\vec{x}) + F_I(\vec{x}))/2,$$

$$f_0(\vec{x}) = (f_S(\vec{x}) + f_I(\vec{x}))/2,$$

$$Q_0(j\vec{\omega}) = (Q_S(j\vec{\omega}) + Q_I(j\vec{\omega}))/2.$$

Эти средние связаны между собой очевидными соотношениями, аналогичными скалярному случаю:

$$f_0(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_0(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M},$$

$$Q_0(j\vec{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\vec{x}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) d\vec{x}.$$

В качестве основных числовых характеристик векторных гиперслучайных величин можно предложить математические ожидания границ M-мерной векторной функции $\vec{\varphi}(\vec{X})$ гиперслучайной L-мерной величины $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_L)$ с границами плотности распределения $f_S(x_1,\ldots,x_L)$ и $f_I(x_1,\ldots,x_L)$, определяемые как

$$M_S[\vec{\varphi}(\vec{X})] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1,\ldots,x_L) \times$$
$$\times f_S(x_1,\ldots,x_L) dx_1 \ldots dx_L, \qquad (29)$$

$$M_I[\vec{\varphi}(\vec{X})] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1,\ldots,x_L) \times$$
$$\times f_I(x_1,\ldots,x_L) dx_1 \ldots dx_L \qquad (30)$$

(если интегралы существуют).

Частным случаем характеристик (29), (30) являются математические ожидания границ $\vec{m}_{Sx}$ и $\vec{m}_{Ix}$ величины $\vec{X}$, представляющие собой математические ожидания границ функции $\vec{\varphi}(\vec{X})=\vec{X}$:

$$\vec{m}_{Sx} = M_S[\vec{X}], \qquad \vec{m}_{Ix} = M_I[\vec{X}]. \qquad (31)$$

Для L-мерного гиперслучайного вектора $\vec{X}$ с вещественными компонентами характеристикой разброса могут служить дисперсии границ $\vec{D}_{Sz}$, $\vec{D}_{Iz}$, представляющие собой математические ожидания границ, соответственно, функций

$$\vec{\varphi}(\vec{X}) = \big((X_l - m_{Sx_l})^2, \quad l=\overline{1,L}\big),$$

$$\vec{\varphi}(\vec{X}) = \big((X_l - m_{Ix_l})^2, \quad l=\overline{1,L}\big)$$

и среднеквадратические отклонения $\vec{\sigma}_{Sx}$, $\vec{\sigma}_{Ix}$ границ, компоненты которых определены как величины, равные квадратному корню из компонент векторов $\vec{D}_{Sx}$, $\vec{D}_{Ix}$. Здесь m_{Sx_l} и m_{Ix_l} – l-ые компоненты векторов $\vec{m}_{Sx}$ и $\vec{m}_{Ix}$ соответственно.

Для L-мерного гиперслучайного комплексного вектора $\dot{\vec{Z}}=\vec{X}+j\vec{Y}$ характеристикой разброса могут служить комплексные дисперсии границ $\dot{\vec{D}}_{Sz}$, $\dot{\vec{D}}_{Iz}$, представляющие собой L-мерные математические ожидания векторов

$$\left((X_l-m_{Sx_l})^2+j(Y_l-m_{Sy_l})^2, \quad l=\overline{1,L}\right),$$

$$\left((X_l-m_{Ix_l})^2+j(Y_l-m_{Iy_l})^2, \quad l=\overline{1,L}\right),$$

и комплексные среднеквадратические отклонения границ $\dot{\vec{\sigma}}_{Sz}$ и $\dot{\vec{\sigma}}_{Iz}$, вещественные компоненты которых равны корню из соответствующих вещественных компонент комплексных дисперсий границ $\dot{\vec{D}}_{Sz}$, $\dot{\vec{D}}_{Iz}$, а мнимые – корню из соответствующих мнимых компонент этих величин.

Весьма полезными характеристиками могут быть начальные моменты границ $m_{S\nu_1\ldots\nu_L}$ и $m_{I\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_L$ компонент L-мерной гиперслучайной вещественной величины $\vec{X}$, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{S\nu_1\ldots\nu_L} &= M_S[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}], \\ m_{I\nu_1\ldots\nu_L} &= M_I[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}] \end{aligned} \qquad (32)$$

(ν_l – целое положительное число; $l=\overline{1,L}$), а также центральные моменты границ $\mu_{S\nu_1\ldots\nu_L}$ и $\mu_{I\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_L$. Они определяются как

$$\begin{aligned} &\mu_{S\nu_1\ldots\nu_L} = \\ &= M_S[(X_1-m_{Sx_1})^{\nu_1}\ldots(X_L-m_{Sx_L})^{\nu_L}], \end{aligned} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} &\mu_{I\nu_1\ldots\nu_L} = \\ &= M_I[(X_1-m_{Ix_1})^{\nu_1}\ldots(X_L-m_{Ix_L})^{\nu_L}]. \end{aligned} \qquad (34)$$

Смешанные центральные моменты границ второго порядка $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$ вещественных гиперслучайных величин X_1 и X_2 можно назвать корреляционными моментами границ, смешанные начальные моменты границ второго порядка $m_{S_{11}}$ и $m_{I_{11}}$ – ковариационными моментами границ, а смешанные центральные моменты второго порядка, нормированные на соответствующие среднеквадратические отклонения σ_{Sx_1}, σ_{Sx_2} и σ_{Ix_1}, σ_{Ix_2} границ – коэффициентами корреляции границ

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{\mu_{S_{11}}}{\sigma_{Sx_1}\sigma_{Sx_2}}, \\ r_I &= \frac{\mu_{I_{11}}}{\sigma_{Ix_1}\sigma_{Ix_2}}. \end{aligned} \qquad (35)$$

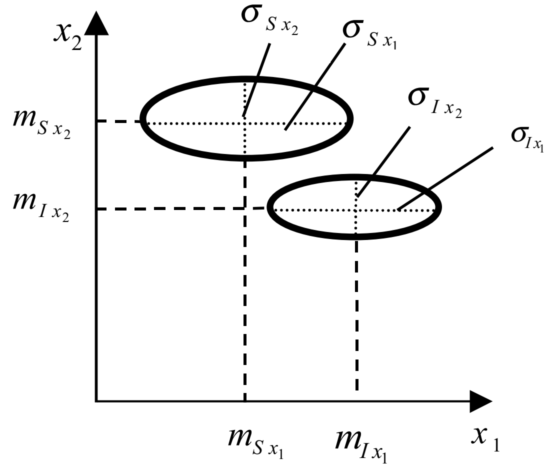


Рис. 3. Эллипсы рассеяния при гауссовских законах распределения: $\mu_{S_{11}}=\mu_{I_{11}}=0$

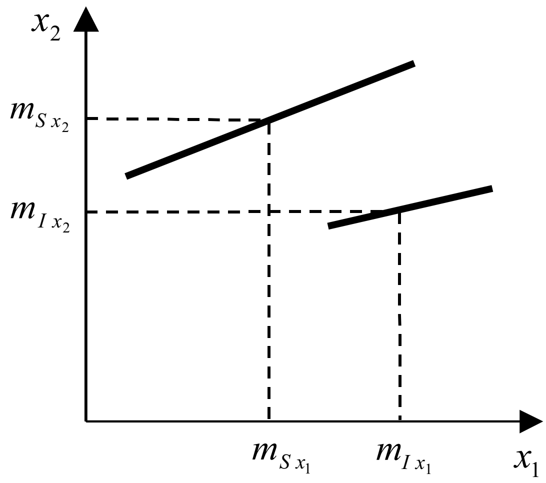


Рис. 4. Эллипсы рассеяния при гауссовских законах распределения: $r_S=r_I=1$

Корреляционные моменты границ $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$, ковариационные моменты границ $m_{S_{11}}$ и $m_{I_{11}}$ и математические ожидания границ m_{Sx_1}, m_{Sx_2}, m_{Ix_1} и m_{Ix_2} двух гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \mu_{S_{11}} &= m_{S_{11}} - m_{Sx_1}m_{Sx_2}, \\ \mu_{I_{11}} &= m_{I_{11}} - m_{Ix_1}m_{Ix_2}, \end{aligned} \qquad (36)$$

аналогичными известному соотношению для случайных величин.

Определим ковариационные моменты границ $m_{S_{11}}$ и $m_{I_{11}}$ комплексной гиперслучайной величины $\dot{Z}=X+jY$ как математические ожидания границ произведения действительной и мнимой частей этой величины:

$$m_{S_{11}} = M_S[XY], \qquad m_{I_{11}} = M_I[XY],$$

а корреляционные моменты границ $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$ – как математические ожидания границ произведения ее центрированных вещественных и мнимой частей:

$$\mu_{S_{11}} = M_S[(X - m_{Sx})(Y - m_{Sy})],$$

$$\mu_{I_{11}} = M_I[(X - m_{Ix})(Y - m_{Iy})].$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть некоррелированными, если их корреляционные моменты границ равны нулю: $\mu_{S_{11}}=\mu_{I_{11}}=0$. При этом $r_S=r_I=0$ и ковариационные моменты границ согласно выражению (36) связаны с математическими ожиданиями границ следующими зависимостями:

$$m_{S_{11}} = m_{Sx_1} m_{Sx_2},$$

$$m_{I_{11}} = m_{Ix_1} m_{Ix_2}.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть ортогональными, если ковариационные моменты границ равны нулю: $m_{S_{11}}=m_{I_{11}}=0$. При этом корреляционные моменты границ $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$, как видно из выражения (36), оказываются связанными с математическими ожиданиями границ следующим образом:

$$\mu_{S_{11}} = -m_{Sx_1} m_{Sx_2},$$

$$\mu_{I_{11}} = -m_{Ix_1} m_{Ix_2}.$$

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы, то при гауссовских законах распределения оси эллипсов рассеяния ориентированы вдоль осей координат (рис. 3). Если существует линейная зависимость между этими величинами, то $r_S=r_I=1$ и эллипсы рассеяния вырождаются в отрезки прямых (рис. 4):

$$x_2 = \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} x_1 + \left(m_{Sx_2} - \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} m_{Sx_1} \right),$$

$$x_2 = \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} x_1 + \left(m_{Ix_2} - \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} m_{Ix_1} \right).$$

Нетрудно показать, что из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин можно обобщить на случай N комплексных гиперслучайных величин. Комплексные гиперслучайные величины $X_1, \ldots, X_N$ назовем некоррелированными (попарно), если для всех $n \neq m$, $n, m = \overline{1, N}$ имеют место равенства

$$M_S[X_n X_m^*] = M_S[X_n] M_S[X_m^*],$$

$$M_I[X_n X_m^*] = M_I[X_n] M_I[X_m^*],$$

и ортогональными (попарно), если при тех же условиях

$$M_S[X_n X_m^*] = M_I[X_n X_m^*] = 0.$$

Здесь звездочкой обозначена процедура комплексного сопряжения.

В векторном случае для средних границ функции распределения можно ввести следующие характеристики: вектор среднего математических ожиданий границ функции $\varphi(X)$

$$M_0[\vec{\varphi}(\vec{X})] = \big(M_S[\vec{\varphi}(\vec{X})] + M_I[\vec{\varphi}(\vec{X})]\big)/2,$$

вектор среднего математических ожиданий границ гиперслучайной функции X

$$\vec{m}_{0x} = (\vec{m}_{Sx} + \vec{m}_{Ix})/2,$$

вектор среднего дисперсий границ

$$\vec{D}_{0x} = \big(M_0[(X_l - m_{0x_l})^2], \quad l = \overline{1, L}\big),$$

вектор среднего среднеквадратических отклонений $\vec{\sigma}_{0x}$, компоненты которого равны корню из компонент дисперсии $\vec{D}_{0x}$, среднее начальных моментов границ

$$m_{0\nu_1\ldots\nu_L} = (m_{S\nu_1\ldots\nu_L} + m_{I\nu_1\ldots\nu_L})/2,$$

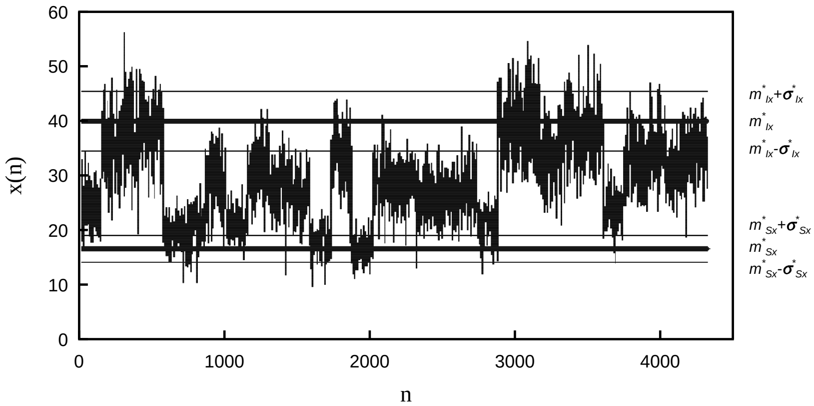
среднее центральных моментов границ

$$\mu_{0\nu_1\ldots\nu_L} = (\mu_{S\nu_1\ldots\nu_L} + \mu_{I\nu_1\ldots\nu_L})/2$$

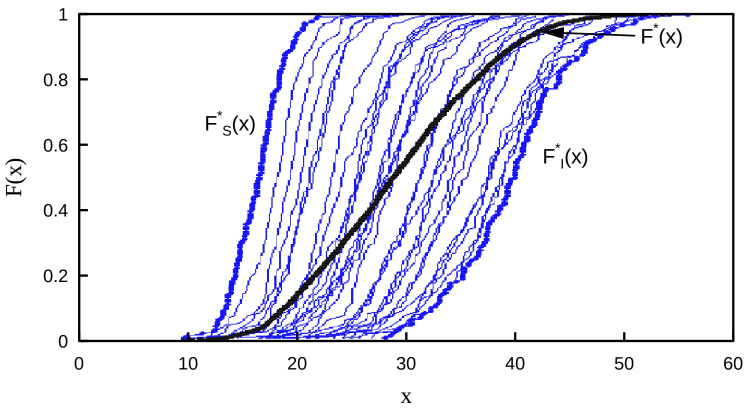
и др.

Для гиперслучайных скалярных величин X_1 и X_2 очевидным образом можно ввести среднее корреляционных моментов $\mu_{011}=(\mu_{S11}+\mu_{I11})/2$ и среднее ковариационных моментов $m_{011}=(m_{S11}+m_{I11})/2$. Если гиперслучайные величины некоррелированы, то среднее корреляционных моментов границ μ_{011} равно нулю. Если же они ортогональны, то нулю равно среднее ковариационных моментов m_{011}.

Кроме указанных характеристик, может быть предложен еще ряд других, аналогичных используемым при описании векторных случайных величин.



а



б

Рис. 5. Результаты регистрации уровня шума (*а*) и оценок функции распределения (*б*)

4. ОПИСАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Проиллюстрируем возможности использования предложенного математического аппарата для описания акустических явлений на примере измерения уровня шума в океане с помощью гидроакустического устройства, которое на протяжении многих месяцев несколько раз в день регистрирует данные в фиксированной точке океана. Естественно, за время наблюдения акустические условия существенно меняются. Это может быть обусловлено разными причинами: изменчивостью метеорологических условий, суточной и сезонной вариабельностью активности живых организмов, изменением условий судоходства и др. Исходя из этого, уровень шума $x(n)$ является функцией номера измерения n (рис. 5, *а*).

Задачу измерения уровня шума можно формулировать по-разному. Интересуясь усредненными характеристиками, можно считать, что условия зафиксированы самим фактом проведения исследований в конкретной точке океана. Тогда уровень шума представляет собой случайную величину. Все данные, полученные в результате измерений, можно рассматривать как выборку из генеральной совокупности случайной величины, по которой можно оценить вероятностные и числовые характеристики, например, оценку функции распределения (кривая $F^*(x)$ на рис. 5, *б*), оценку математического ожидания, оценку дисперсии, оценку корреляционного момента и др.

Воспользовавшись дополнительными сведениями, например, о времени проведения измерений, метеоусловиях, наличии судов в исследуемом районе в разные периоды времени, можно сгруппировать полученные данные таким образом, чтобы связать тот или иной результат измерения с определенными условиями. Тогда при фиксированных условиях уровень шума оказывается случайной величиной, по выборке из соответствующей генеральной совокупности которой можно получить соответствующие оценки вероятностных и числовых характеристик. Вся же совокупность данных может рассматриваться либо как выборка из генеральной совокупности случайной величины (если известно априорное распределение вероятностей условий), либо как выборка из генеральной совокупности гиперслучайной величины (если закон распределения условий неизвестен и нет оснований считать, что он существует).

Не располагая обширной дополнительной априорной информацией и учитывая лишь то, что акустические условия меняются достаточно медленно, можно построить схему с измерением уровня шума на ряде примыкающих друг к другу временных интервалов, где условия можно считать неизменными. Множество данных, соответствующих каждому такому интервалу, представляет собой выборку из генеральной совокупности случайной величины. При этом весь объем данных, полученных при разных условиях, нельзя рассматривать в качестве выборки из генеральной совокупности определенной случайной величиной. Это – выборка из генеральной совокупности гиперслучайной величины.

Во всех случаях, когда результат измерения представляет собой гиперслучайную величину, вне зависимости от того, каким образом она сформирована, по полученной выборке из ее генеральной совокупности можно рассчитать оценки границ вероятностных характеристик и числовые характеристики границ, в частности оценки верхней и нижней границ функции распределения $F^*_S(x)$, $F^*_I(x)$ (см. рис. 5, *б*), оценки математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, среднеквадратических отклонений σ^*_{Sx}, σ^*_{Ix} (прямые на рис. 5, а), оценки дисперсий границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix} и пр.

Приведенные результаты свидетельствуют, что оценки границ функции распределения $F^*_S(x)$, $F^*_I(x)$ и числовые характеристики границ (в частности, m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, σ^*_{Sx}, σ^*_{Ix}) несут значительно больше информации об исследуемой величине, чем функция распределения $F^*(x)$ и аналогичные числовые характеристики, рассчитанные по всему объему данных. Нетрудно убедиться, что оценка средней границ функции распределения $F^*_0(x)$ близка к оценке функции распределения $F^*(x)$, а оценки средних числовых характеристик границ близки к соответствующим оценкам числовых характеристик, получаемым по всему объему данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Многие реальные явления содержат элементы неопределенности, описать которые известными вероятностными способами не удается. К ним относятся события, величины и функции, происходящие при неопределенных условиях. Для характеристики такого класса явлений, названных гиперслучайными, предложено использовать полумеры, задаваемые на борелевском поле. Они характеризуют верхнюю и нижнюю границы области неопределенности. Для гиперслучайных событий эти полумеры представляют собой границы условных вероятностей событий, а для гиперслучайных величин – границы условных функций распределения.

2. Случайные события и величины представляют собой частный случай гиперслучайных явлений. Для случайных событий и величин рассматриваемые полумеры совпадают и вырождаются в вероятностную меру. При возрастании неопределенности границы области неопределенности расширяются и при полной неопределенности (полном хаосе) занимают предельные значения.

3. Для описания гиперслучайных событий и величин разработан специальный математический аппарат. Его основу составляют характеристики и параметры, аналогичные используемым в теории вероятностей.

4. Установлено, что оценки, описывающие гиперслучайные явления, несут больше информации об исследуемом явлении и характеризуют его полнее, чем аналогичные вероятностные и числовые характеристики, рассчитываемые классическими статистическими методами. Поэтому тогда, когда есть основания полагать, что при проведении измерений условия меняются и при этом не известно, каким образом, следует отдавать предпочтение предлагаемым методам описания неопределенных явлений.

В настоящее время в печати находится монография [14], в которой развиваются предложенный подход и методы описания гиперслучайных явлений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность академикам НАН Украины В. Т. Гринченко и В. С. Королюку, а также доктору физ.-мат. наук профессору Ю. С. Мишуре за критические замечания и конструктивное обсуждение материалов статьи.

1. *Горбань И. И.* Случайность, гиперслучайность, хаос и неопределенность // Стандартизацiя, сертифiкацiя, якiсть.– 2005.– N 3.– С. 41–48.
2. *Бочарников В. П.* Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике.– С.-Пб: Наука РАН, 2001.– 328 с.
3. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике.– М.: Радио и связь, 1990.– 288 с.
4. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств.– М.: Радио и связь, 1982.– 432 с.
5. *Нечеткие* множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Я. Я. Ягера.– М.: Радио и связь, 1986.– 430 с.
6. *Surgeno M.* Fuzzy decision making problems // Trans. Soc. Instr. Control Engng, Tokyo.– 1975.– **11**, N 6.– P. 85–90.
7. *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике.– М.: Наука, 1985.– 637 с.
8. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика.– М.: Наука, 1986.– 535 с.
9. *Горбань I. I.* Теорiя ймовiрностей i математична статистика для наукових працiвникiв i iнженерiв.– К.: IПММС НАН України, 2003.– 244 с.
10. *Шустер Г.* Детерминированный хаос.– М.: Мир, 1988.– 240 с.
11. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах.– М.: Постмаркет, 2000.– 350 с.
12. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Turbulence, ideal // Encyclopedia of nonlinear science.– London: Taylor Francis, 2005.– P. 955–957.
13. *Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы.– К.: Наук. думка, 2005.– 263 с.
14. *Горбань И. И.* Теория гиперслучайных явлений.– К.: ДП УкрНДНЦ (в печати).