

Численное исследование динамической прочности толстостенных цилиндрических оболочек с технологическими особенностями типа трещин

П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко, О. С. Бейнер

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложен численный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений в упругих толстостенных цилиндрических оболочках с трещинами при динамическом нагружении. Метод основан на двухмерном осесимметричном алгоритме Уилкинса и уравнениях механики хрупкого разрушения. Исследована прочность толстостенных нагруженных импульсом внутреннего давления цилиндров с технологическими особенностями типа математических разрезов в местах закрепления торцов сваркой.

Ключевые слова: цилиндрические толстостенные оболочки, динамическая прочность, алгоритм Уилкинса, технологическая особенность типа трещины, хрупкое разрушение.

Введение. Толстостенные цилиндрические динамически нагруженные оболочки находят применение в технологических процессах импульсной штамповки, в атомной энергетике, производстве высокоточных источников света и в других областях техники.

Теоретическому исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) нагруженных импульсным давлением по внутренней поверхности упругих бесконечно длинных многослойных осесимметричных толстостенных цилиндров посвящены работы [1–9]. В [1, 3, 7] получены приближенные аналитические решения для двухслойного цилиндра с использованием условия несжимаемости материала в случаях внутренней нагрузки в виде полусинусоидального импульса, давления в виде функции Хевисайда и экспоненциального импульса. Такие виды нагружения характерны для штамповки на пресс-пушке, на газодетонационных прессах, штамповки бризантными взрывчатыми веществами (БВВ) и электрогидравлической штамповки. Сопоставление аналитических решений с данными численных расчетов характеристико-разностным методом и методом Уилкинса [6, 9] позволило установить область применимости приближенных зависимостей, в результате чего разработаны инженерные (аналитические) методики проекционного и проверочного расчетов [10, 11], а также численная методика проверочного расчета достаточно длинных матриц цилиндрической и близкой к ней формы [10].

Численное исследование осесимметричного НДС и расчет на прочность толстостенных цилиндрических и конических оболочек конечной длины, нагруженных импульсным давлением по внутренней поверхности, приведено в [8, 12–14], ударом заготовки – в [15, 16].

Влияние жесткого закрепления всей поверхности одного из торцов на двухмерное динамическое НДС и прочность толстостенных цилиндрических и конических оболочек проанализировано в [8, 12].

В конструкциях оболочка может по-разному крепиться к основанию. В ряде случаев такое крепление осуществляется вдоль кольцевых частей торца сваркой. Часть торцевой поверхности при этом оказывается жестко закрепленной, на оставшейся части имеется технологическая особенность (разрез) типа трещины.

Как известно из механики хрупкого разрушения [17–22], напряжения у вершины трещины имеют сингулярность, а НДС и прочность материала описываются с использованием коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Существуют критические значения КИН, при превышении которых трещина начинает расти (раскрываться), а конструкция соответственно разрушаться.

Как показал обзор литературных источников, анализ осесимметричного НДС и расчет на прочность толстостенных динамически нагруженных цилиндрических оболочек с технологическими особенностями типа трещин в местах закрепления торцов не проводились. Отсутствуют также методики осуществления такого исследования.

Цель данной работы – разработка численной методики оценки прочности толстостенных цилиндрических оболочек, имеющих технологические особенности закрепления торца типа математического разреза, при внутреннем импульсном нагружении. Прочность оболочки оценивается с учетом сложного напряженного состояния материала посредством определения эквивалентных напряжений по третьей теории прочности, в окрестности технологической трещины – путем расчета эквивалентного КИН, учитывающего как нормальный отрыв берегов трещины, так и их сдвиг [22]. Соответствующие составляющие эквивалентного КИН определяются известными методами механики хрупкого разрушения [17–22].

Математическая постановка краевой задачи. Численный метод. В соответствии с [8, 23] приведем математическую формулировку задачи исследования. Рассматриваются цилиндрические полые толстостенные оболочки. Левый торец оболочки совместим с плоскостью $x = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, x . Уравнения движения в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{dv_r}{dt}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau}{r} = \rho \frac{dv_x}{dt}, \quad (1)$$

где t – время; ρ – плотность материала; v_r, v_x – компоненты вектора скорости перемещений; $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \tau$ – компоненты тензора напряжений. Геометрические соотношения представим в виде

$$e_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad e_\varphi = \frac{v_r}{r}; \quad e_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \gamma = \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r}, \quad (2)$$

где $e_r, e_\varphi, e_x, \gamma$ – компоненты тензора скоростей деформаций.

Материал оболочки полагался изотропным упругим. Уравнения состояния такого материала хорошо известны [8, 23, 24]:

$$e_r = \frac{1}{E} \frac{d}{dt} [\sigma_r - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_x)]; \quad \gamma = \frac{2(1 + \mu)}{E} \frac{d\tau}{dt}, \quad (3)$$

где E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона. Выражения для e_φ и e_x получаем из (3) путем циклической перестановки индексов.

Система уравнений (1)–(3) замыкается начальными и граничными условиями. Начальные условия полагались нулевыми. Граничные условия на закрепленных, свободных либо нагруженных поверхностях (кинематические или силовые) имели стандартный вид. Кроме того, использовались некоторые виды граничных условий специального типа – например, скользящее закрепление, условие симметрии, а также условия на поверхностях конструктивных особенностей типа математических разрезов. На плоскости симметрии ($x = \text{const}$) граничное условие формулировалось следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

На плоскости скольжения ($x = \text{const}$) ставилось условие $v_x = \tau = 0$, что математически эквивалентно условию симметрии (4).

При наличии конструктивных особенностей типа трещин по кольцевой части торца ($x = 0$) граничные условия учитывались путем комбинации силовых, кинематических и смешанных условий на закрепленной (приваренной) и незакрепленной частях торца соответственно:

$$v_x = v_r = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_x = \tau = 0, \quad u > 0 \quad \text{или} \quad \tau = u = 0, \quad (6)$$

где u – осевое смещение, причем в момент соударения ($u = 0$, $v_x < 0$) осевая скорость обнулялась: $v_x = 0$.

Таким образом, условие (5) является стандартным кинематическим, (6) – может быть либо силовым, либо смешанным. Это позволяет учитывать одностороннее контактное взаимодействие берегов разреза (непровара) с жестким торцом основания без трения. Необходимость учета контактного взаимодействия отмечалась в ряде работ [25, 26]. Подход (5), (6) – инженерное приближение одной из строгих моделей динамического одностороннего контактного взаимодействия берегов трещины [25]: с одной стороны, он достаточно прост и удобен для численной реализации, с другой – позволяет учитывать основные динамические эффекты, возникающие при ударе берега разреза ($x = +0$) о жесткое основание: скольжение без трения; повторные локальные отслоения и возобновления контакта.

Нагружение оболочки проводилось осесимметричным импульсом давления $P(t)$, равномерно приложенным к внутренней поверхности полого тела.

Краевая задача (1)–(6) интегрировалась численно с применением явной по времени интегро-интерполяционной по пространству конечно-разностной схемы Уилкинса [8, 23]. В двухмерном варианте этого метода плоское

сечение тела разбивается на четырехугольные элементы и используется четырехточечная дискретная аппроксимация непрерывных функций. Несмотря на то что эта схема разработана одной из первых в своей области [23], она до настоящего времени широко применяется в практике численного моделирования нестационарной реакции упругих и упругопластических элементов конструкций на импульсное деформирование. В частности, она реализована в коммерческом пакете LS-DYNA-3D, который является одним из ведущих в области моделирования ударного деформирования.

Положительные особенности метода следующие: во-первых, использование явной схемы интегрирования по времени позволяет адекватно и экономно моделировать задачи динамического деформирования, где необходимо отслеживать локальные быстро протекающие процессы, во-вторых, численные аппроксимации функций фактически являются конечно-разностными. Такие аппроксимации при явной схеме интегрирования по времени дают возможность отказаться от традиционно используемых в методе конечных элементов (МКЭ) понятий: матрицы жесткости и массы; функции формы и пр. Это значительно упрощает численную реализацию рассматриваемого алгоритма и существенно экономит ресурсы вычислительной техники. Поскольку этот алгоритм хорошо известен и в настоящее время является одним из традиционных, конечно-разностные аналоги уравнений (1)–(6) здесь опускаются.

Учет влияния конструктивных особенностей типа трещин на динамическую прочность цилиндрических толстостенных оболочек. Ниже будут численно исследованы особенности расчета на динамическую прочность цилиндрических оболочек при закреплении одного из торцов путем сварки (рис. 1). Часть торца при этом оказывается неподвижно закрепленной, на оставшейся части имеется математический разрез типа трещины. Практический интерес представляет оценка, базирующаяся на методах механики хрупкого разрушения, НДС и КИН в вершинах образовавшихся технологических трещин, которая позволяет определить: опасен или не опасен с точки зрения прочности данный “непровар” в условиях заданного динамического нагружения оболочки.

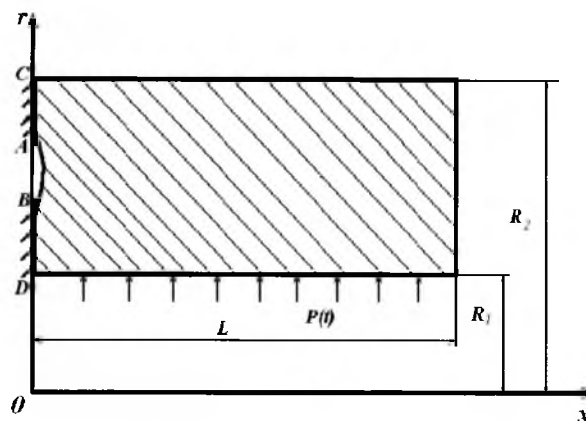


Рис. 1. Объект исследования.

Поскольку при осесимметричном нагружении подобной конструкции ненулевой является только одна компонента сдвиговых напряжений, для описания НДС в окрестности такой технологической трещины будем использовать методы механики разрушения для плоских задач [22], учитывающие совместное влияние коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва K_1 и сдвига K_2 .

Согласно [22] введем эквивалентный КИН по формуле

$$K_{\text{эКВ}} = \sqrt{K_1^2 + 1,78K_2^2}, \quad (7)$$

условие прочности при разрушении проверяется по критерию

$$K_{\text{эКВ}} \leq K_{1c}, \quad (8)$$

где K_{1c} – предельный КИН для трещины нормального отрыва, при превышении которого начинается рост трещины, т.е. разрушение.

Если ввести в вершине трещины местную полярную систему координат δ, θ (рис. 2), то напряжения в ее окрестности будут иметь вид [22]

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_2 \sin \theta \right]; \\ \tau_{\delta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \cos \frac{\theta}{2} [K_1 \sin \theta + K_2 (3 \cos \theta - 1)] \end{aligned} \quad (9)$$

с корневой сингулярностью у вершины трещины.

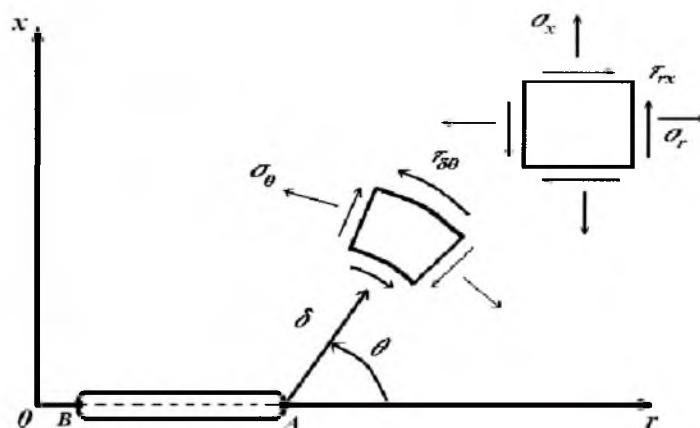


Рис. 2. К определению напряжений в окрестности вершины трещины.

При этом положительное направление для θ будем всегда выбирать в глубь материала, а не жесткого основания. Наложение на трещину основной цилиндрической системы координат r, x позволит получить два типа вершин трещин:

1) вершина типа *A*: распространение трещины возможно в положительном направлении оси *r*;

2) вершина типа *B*: распространение трещины возможно в отрицательном направлении оси *r*.

В случае вершины типа *A* при $\theta = 90^\circ$ имеем

$$\sigma_\theta = \sigma_r, \quad \tau_{\delta\theta} = -\tau_{rx},$$

в случае вершины типа *B* при $\theta = 90^\circ$ –

$$\sigma_\theta = \sigma_r, \quad \tau_{\delta\theta} = \tau_{rx}.$$

Подставляя эти значения в систему (9) и решая ее относительно K_1 и K_2 , находим соответствующие КИН для вершин трещин обоих типов:

$$\begin{aligned} K_{1A,B} &= -(2\sigma_r \pm 3\tau_{rx})\sqrt{\pi\delta}; \\ K_{2A,B} &= -(2\sigma_r \pm \tau_{rx})\sqrt{\pi\delta}. \end{aligned} \quad (10)$$

При подстановке (10) в (7) получим эквивалентные КИН для вершин трещин типа *A* и *B*:

$$K_{\text{эква},A,B} = \sqrt{1,78K_{2A,B}^2 + \chi_{A,B}K_{1A,B}^2}, \quad (11)$$

где $\chi_{A,B}$ – множитель, учитывающий то обстоятельство, что трещина нормального отрыва может расти и быть опасной только при растягивающих напряжениях, $\chi_{A,B} = (1 + \text{sign } K_{1A,B})/2$.

При численных расчетах в качестве σ_r и τ_{rx} выбирали среднее арифметическое соответствующих величин в двух соседних конечно-разностных ячейках с общей вершиной трещины, параметр δ принимали равным $h_x/2$, где h_x – шаг конечно-разностной сетки вдоль осевой координаты у вершины трещины. Вершина трещины при этом обязательно должна совпадать с узлом разностной сетки.

Заметим, что в задачах подобного типа с неподвижной частью границы сингулярными будут не только точки *A* и *B*, но и точки изломов *C* и *D* (рис. 1). Сингулярность в них будет в два раза слабее, чем у трещины [27], с порядком $\delta^{-1/4}$.

Несмотря на наличие сингулярностей в точках *A*, *B*, *C* и *D* (рис. 1), алгоритм Уилкинса позволяет решить эту проблему даже в случае чисто упругих постановок задач благодаря тому, что напряжения вычисляются не в узлах, а в центрах ячеек разностной сетки. Конструируя разностную сетку так, чтобы точки *A*, *B*, *C* и *D* совпали с ее узлами, близлежащие напряжения к этим точкам будут всегда вычисляться на каких-то конечных расстояниях от них, пропорциональных шагам сетки, и поэтому также будут всегда конечными.

В численных экспериментах моделировался изготовленный из стали 30ХГСА стальной толстостенный полый цилиндр (рис. 1), левый торец ($x = 0$) которого тем или иным образом крепился к жесткому основанию, правый ($x = L$) был свободен от нагрузок. Наружная поверхность ($r = R_2$) свободна от нагрузок, на внутреннюю ($r = R_1$) действует динамическое давление $P(t)$. Геометрические характеристики оболочки таковы: $R_1 = 0,035$ м; $R_2 = 0,0525$ м; $L = 0,07$ м. Физико-механические характеристики стали: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $\rho = 7850$ кг/м³; предел текучести $\sigma_T = 850$ МПа. МПа. Коэффициент запаса прочности принят равным 1,2, допускаемые напряжения – 708 МПа.

На практике широко распространена штамповка на гидравлических пресс-пушках. Известно [10, 11], что при этом виде штамповки давление на внутреннюю поверхность матрицы изменяется во времени по полусинусоидальному закону:

$$P(t) = P_0 \sin(\lambda t) H\left(\frac{\pi}{\lambda} - t\right), \quad (12)$$

где λ – характеристическая частота синусоиды; P_0 – амплитудное значение нагрузки; $H(t)$ – функция Хевисайда.

В качестве примера применения предложенной методики выполним расчет на прочность матрицы в виде стального цилиндра, размеры которого приведены выше, для штамповки на пресс-пушке. Массу снаряда пресс-пушки полагаем равной 0,5 кг, радиус – 0,03 м, дульную скорость – 50 м/с, высоту столба жидкости в переходнике пушки – 0,04 м, эквивалентную высоту столба жидкости в гидравлической камере – 0,125 м. Согласно [10, 11] при этих параметрах штамповки амплитуду нагрузки P_0 можно оценить в 80 МПа, характеристическую частоту синусоиды нагружения λ – в 10^4 с⁻¹.

Рассматривались три способа крепления левого торца матрицы к основанию сварными швами: 1 – по внутреннему краю ($r \in [R_1, R_1 + S_i]$); 2 – по внешнему краю ($r \in [R_2 - S_i, R_2]$); 3 – по внутреннему и наружному краям ($r \in [R_1, R_1 + S_i] \cup [R_2 - S_i, R_2]$). В различных вариантах расчетов изменялась также эффективная глубина проплавления шва: $S_1 = 0,003$ м; $S_2 = 0,006$ м; $S_3 = 0,01$ м.

Конечно-разностная сетка выбиралась путем численного эксперимента. Рассматривались два вида сетки: $n_x \times n_r = 35 \times 19$ и $n_x \times n_r = 18 \times 10$, где n_x, n_r – количество узлов вдоль оси и радиуса соответственно.

Рассматривался приваренный по внутреннему краю цилиндр, эффективная глубина проплавления шва принималась равной половине толщины оболочки. Нагрузка имела вид полусинуса (12). На рис. 3 показано изменение во времени величины $\sigma_i (h_x^2 + h_r^2)^{1/4}$ (σ_i – интенсивность напряжений) для двух соседних с вершиной трещины конечно-разностных ячеек. Кривые 1 получены на мелкой сетке (35×19), кривые 2 – на более (~ в два раза) крупной сетке (18×10). Результаты оказались довольно близкими. Это свидетельствует о том, что напряжения в окрестности вершины трещины, а следовательно, и коэффициент интенсивности вычисляются достаточно точно. В дальнейших расчетах использовалось разбиение 35×19 . Как сле-

дует из рис. 3, с помощью алгоритма Уилкинса можно получать стабильные КИН, не изменяющиеся при дальнейшем дроблении сетки. Это выгодно отличает данный метод от МКЭ, использование которого не позволяет получать стабильные КИН, поэтому для их определения приходится прибегать к, в общем-то, недостаточно строго обоснованным методам экстраполяции [19].

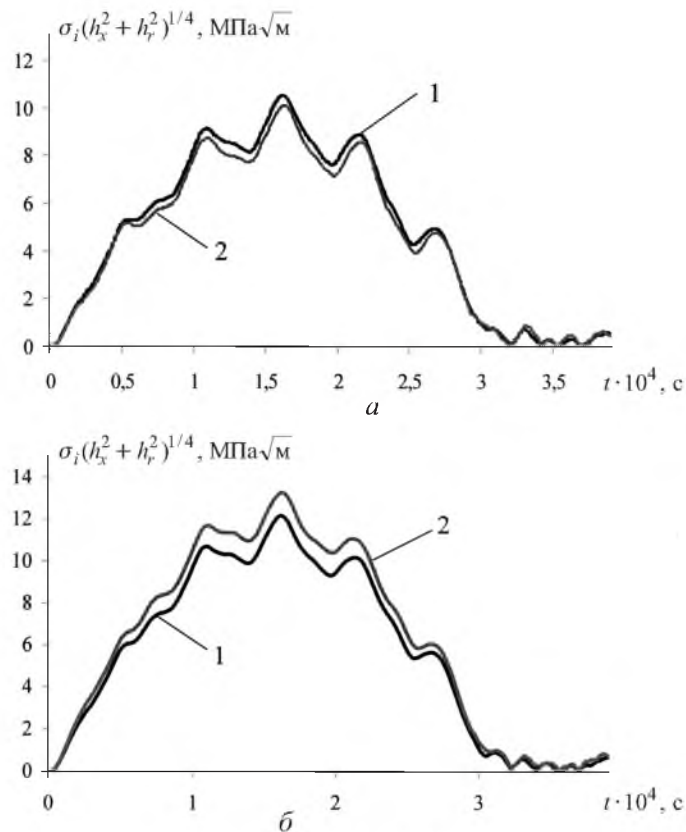


Рис. 3. Изменение во времени величины $\sigma_i(h_x^2 + h_r^2)^{1/4}$ для двух соседних с вершиной трещины верхней (а) и нижней (б) конечно-разностных ячеек.

Некоторые результаты расчетов в упругой области толстостенного полого цилиндра до момента времени $5 \cdot 10^{-4}$ с приведены в таблице.

Поскольку точки A , B , C и D (рис. 1) сингулярны, под напряжениями в окрестности данных точек следует понимать: для точек C и D – напряжения в центре соответствующей угловой конечно-разностной ячейки; для точек A и B – среднее арифметическое напряжений в двух соседних с точкой ячейках.

Отметим, что напряжения в точках C и D в связи с их сингулярностью для упругого тела равны бесконечности, для упругопластического тела – конечной величине, ограниченной пределом текучести. Появление пластических деформаций в этих точках не опасно с точки зрения прочности, а только приводит к перераспределению напряжений в окрестности этих точек.

Результаты расчетов в упругой области толстостенного полого цилиндра, прикрепленного посредством сварки к жесткому основанию

№ способа крепления	Глубина проплавления, мм	Максимальные эквивалентные напряжения по третьей теории прочности, МПа				Максимальные эквивалентные КИН, МПа $\sqrt{м}$	
		в окрестности точек					
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
1	3	–	489,6	146,4	542,3	–	34,66
	6	–	345,7	167,5	403,9	–	20,97
	10	–	241,6	191,0	374,6	–	10,35
2	3	376,8	–	223,4	117,9	21,94	–
	6	334,8	–	226,6	100,7	13,43	–
	10	328,3	–	246,5	86,0	8,84	–
3	3	196,0	285,5	255,0	394,5	13,41	14,03
	6	143,1	175,8	238,2	365,9	6,64	6,36
	Равна толщине матрицы	–	–	233,4	360,6	–	–

Крепление по способу № 1. Такое крепление оказалось наиболее опасным как по КИН, так и по максимальным эквивалентным напряжениям, но при этом условия прочности не нарушались. Для рассмотренных трех глубин проплавления максимальные эквивалентные напряжения по третьей теории прочности возникали в окрестности угловой точки *D*. При использовании данной конечно-разностной сетки они не превышали допускаемых (таблица). Расчеты по определению КИН в окрестности точки *B* для трех глубин проплавления проведены без учета возникновения пластических деформаций с использованием линейной механики разрушения, что приводит к увеличению коэффициента запаса прочности.

Крепление по способу № 2. Для всех трех глубин проплавления максимальные эквивалентные напряжения достигались в окрестности точки *A*. Причем на данной сетке они не превышают допускаемых.

Крепление по способу № 3. Для всех трех глубин проплавления максимальные эквивалентные напряжения достигались в окрестности точки *D* и на данной сетке не превышали допускаемых.

Из приведенных данных видно, что для всех способов крепления при рассмотренном виде нагружения максимальная величина $K_{э\text{кв}}$ не превышает $34,7 \text{ МПа}\sqrt{м}$. Для выбранного материала наличие исследуемых видов несплохов не опасно при данном динамическом нагружении и не приводит к отрыву цилиндра от основания, т.е. нарушению его прочности в целом [21]. Тем не менее для ряда сталей (45, 40Х, 7Х2 и др.) при таком уровне КИН в случае эксплуатации в условиях низких (до 77 К) температур может наблюдаться рост трещины [21].

При этом нагружении наиболее опасна приварка по внутреннему краю цилиндра. Минимальные значения максимальных эквивалентных напряжений наблюдаются при креплении по способу № 2. Однако при этом наи-

большие КИН несколько выше, чем при креплении по способу № 3 для всех глубин проплавления.

Как и ожидалось, КИН уменьшаются вместе с уменьшением размеров трещины (увеличением суммарной величины проплавления).

Проводились также расчеты матрицы, размеры которой и параметры нагружения соответствовали представленным выше; при этом либо отсутствовало закрепление обоих торцов, либо закрепление левого торца – скользящее, правого – отсутствовало. Установлено, что для этих случаев крепления максимальные значения эквивалентных напряжений практически равны (300 МПа), что ниже допусковых. Причем в первом случае они достигались в окрестности точки D , во втором – в средней части матрицы. Как следует из анализа, для всех рассмотренных случаев крепление сваркой приводит к увеличению максимальных эквивалентных напряжений в матрице по сравнению с матрицей со свободными торцами или одним свободным, а другим скользяще закрепленным.

Выводы

1. Предложена и опробована методика численного расчета с помощью алгоритма Уилкинса сингулярных особенностей нестационарного двухмерного НДС, возникающих в окрестности закрепления торцов и дефектов типа трещин, образующихся при приварке упругой толстостенной цилиндрической оболочки к жесткому основанию.

2. Для трех способов закрепления торцов оценена прочность стальных толстостенных динамически нагруженных импульсом внутреннего давления цилиндров. Обнаружено, что в зависимости от вида закрепления будет меняться место локализации и уровень максимальных КИН в конструкции. Матрица удовлетворяет требованиям прочности. При этом наиболее опасным оказывается сварное соединение торца вдоль внутреннего кольца оболочки, и для ряда сталей при низких температурах может наблюдаться рост трещины и нарушение условий прочности. С уменьшением размеров технологической трещины (глубины непровара) КИН также уменьшаются.

3. Установлено, что крепление сваркой приводит к увеличению максимальных эквивалентных напряжений в матрице для всех рассмотренных случаев по сравнению с матрицей со свободными или одним свободным, а другим скользяще закрепленным торцами.

Резюме

Запропоновано числовий метод визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень у пружних товстостінних циліндричних оболонках із тріщинами при динамічному навантаженні. Метод базується на двовимірному осесиметричному алгоритмі Уїлкінса та рівняннях механіки крихкого руйнування. Досліджено міцність товстостінних навантажених імпульсом внутрішнього тиску циліндрів із технологічними особливостями типу математичних розрізів у місцях закріплення торців зварюванням.

1. Лепихин П. П., Рубан А. П., Максимук Б. Я. Расчет на прочность рабочих камер газодетонационных прессов // Вопросы механики деформируемого твердого тела. – 1981. – Вып. 2. – С. 107 – 111.
2. Лепихин П. П. Решение динамической задачи для двухслойного толсто-стенного цилиндра // Там же. – 1979. – Вып. 1. – С. 55 – 60.
3. Лепихин П. П. Напряженно-деформированное состояние двухслойной цилиндрической оснастки при нагружении импульсным нормальным давлением синусоидальной формы // Там же. – С. 35 – 40.
4. Чжоу Сун Чжун, Грейф Р. Численное определение волн напряжений в слоистых средах // Ракет. техника и космонавтика. – 1966. – № 1. – С. 93 – 101.
5. Кяэрди Х. Х., Поверус Л. Ю. Исследование распространения цилиндрических и сферических упругих и термоупругих волн в слоистых средах методом конечных элементов // Тр. симп. “Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах”. – Таллин, 1973. – Т. 2. – С. 127 – 134.
6. Лепихин П. П. Теоретическое и экспериментальное исследование взаимодействия двухслойных упругих цилиндров с волной давления в жидкости // Пробл. прочности. – 1981. – № 7. – С. 14 – 18.
7. Лепихин П. П., Деменко В. Ф., Ромащенко В. А., Бабич Ю. Н. Напряженно-деформированное состояние двухслойных цилиндрических матриц для штамповки бризантными взрывчатыми веществами и электрогидравлической штамповки // Авиационно-косм. техника и технология. – 2002. – Вып. 33. – С. 118 – 127.
8. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Бейнер О. С. и др. О применимости одномерных моделей для оценки динамической прочности осесимметричных тел // Пробл. прочности. – 2002. – № 3. – С. 120 – 126.
9. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Бейнер О. С. К обоснованию инженерной методики прочностного расчета динамически нагруженных цилиндрических оболочек // Междунар. конф. “Конструкционная прочность материалов и ресурс оборудования АЭС”: Тез. докл. – Киев: ИПП НАН Украины, 2003. – С. 66.
10. ОСТ 1.41177-78. Расчет на прочность матриц для штамповки импульсными нагрузками листовых полусферических оболочек и замкнутых осесимметричных обечаек. – Введ. 01. 07. 79.
11. ОСТ 1.52766-86. Матрицы для штамповки импульсными нагрузками листовых полусферических оболочек и замкнутых осесимметричных обечаек. Расчет на прочность. – Введен 01. 07. 87.
12. Яцишин В. Д. Методика расчета НДС цилиндрической оснастки при осесимметричном импульсном нагружении // Использование импульсных источников энергии в промышленности: Тез. докл. Всесоюз. конф. – Харьков, 1985. – С. 151.
13. Яцишин В. Д. Метод пространственных характеристик в осесимметричной задаче динамической упругости. – Харьков, 1987. – 22 с. – Деп. в ВИНТИ, № 1824-В88.

14. Яцишин В. Д. Контроль точности и устойчивости решения осесимметричных задач динамической теории упругости // Вопросы упругого и пластического деформирования твердого тела. – Харьков, 1988. – С. 69 – 75.
15. Кривцов В. С., Лепихин П. П., Деменко В. Ф., Нарыжный А. Г. Исследование особенностей динамического деформирования осесимметричных заготовок в матрицу на основе компьютерного моделирования технологических систем для импульсного формообразования // Технол. системы. – 2002. – № 4. – С. 26 – 38.
16. Кривцов В. С., Лепихин П. П., Деменко В. Ф., Нарыжный А. Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния матриц для импульсного формообразования осесимметричных тонкостенных деталей // Авиаци.-косм. техника и технология. – 2002. – Вып. 32. – С. 8 – 19.
17. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
18. Хеллан К. Введение в механику разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 364 с.
19. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
20. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
21. Троценко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1993. – Т. 1. – 288 с.
22. Брок Д. Основы механики разрушения. – М.: Высш. шк., 1980. – 368 с.
23. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212 – 263.
24. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
25. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках // Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. – Киев: Наук. думка, 1993. – Т. 4. – 240 с.
26. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1985. – 264 с.
27. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

Поступила 23. 03. 2004