УДК 004.94

В. А. Іванюк, канд. техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЛАНЦЮГОВО-ДРОБОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ II РОДУ

У статті розглядаються ітераційні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду. Для збільшення швидкості збіжності ітераційних процесів запропоновано ланцюгово-дробовий метод розв'язування інтегральних рівнянь. Ефективність запропонованого методу перевірено на обчислювальних експериментах.

Ключові слова: *інтегральні рівняння, ланцюгові дроби, метод ітерацій.*

Вступ. Для опису складних динамічних систем ефективним математичним апаратом є інтегральні рівняння. Зокрема, при описі лінійних динамічних систем, як із зосередженими, так і з розподіленими параметрами, можна використовувати інтегральні рівняння Вольтерри II роду. Ефективність застосування таких динамічних моделей у прикладних дослідженнях безпосередньо залежить від алгоритмів та програмних засобів, за допомогою яких реалізують моделі.

Для реалізації інтегральних моделей, зазвичай, використовують квадратурні або ітераційні методи. Відмінною рисою ітераційних методів є простота машинної реалізації, що уможливлює їхнє ефективне застосування не лише як самостійних методів, але і як допоміжних методів для уточнення результатів, попередньо отриманих прямими методами. При цьому важливо, щоб ітераційний процес збігався з високою швидкістю.

Ефективним підходом при розв'язуванні інтегральних рівнянь ітераційними методами є застосування апарата ланцюгових дробів, характерною особливістю яких є те, що вони сходяться швидше, ніж інші послідовні ряди і містять більше важливих характеристик об'єктів у декількох перших членах.

Метою статті є розробка та дослідження ланцюгово-дробового методу розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду.

Ітераційний метод. Розглядається лінійне одномірне рівняння Вольтерри II роду

$$y(x)-\int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x),\ \ x\in[a,b]. \tag{1}$$

Загальною аналітичною формою розв'язку рівняння (1) є вираз

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,s) f(s) ds . \tag{2}$$

Резольвента $R(x,s)$ визначається виразом

$$R(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,s), \tag{3}$$

де $K_n(x,s)$ — ітеровані ядра, які задаються рекурентними співвідношеннями

$$K_1(x,s) = K(x,s),$$

$$K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_n(t,s) dt, \; n = 1,2,... \tag{4}$$

Існують різні способи точного та наближеного знаходження резольвенти і її використання для отримання розв'язку (2) в аналітичному вигляді.

Загальним прийомом отримання виразів (2) і (3) є представлення розв'язку за допомогою нескінченного ряду. Записуючи вихідне рівняння у вигляді

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) y(s) ds, \tag{5}$$

розв'язок подається у вигляді наступного ряду за степенями параметра λ:

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + ... + \lambda^n y_n(x) + ..., \tag{6}$$

після підстановки якого в (5) отримуємо

$$\begin{gathered} y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + ... + \lambda^n y_n(x) + ... = \\ = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \left[y_0(x) + \lambda y_1(x) + ... + \lambda^n y_n(x) + ... \right] ds. \end{gathered} \tag{7}$$

Прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях λ в лівій і правій частинах (7) приводить до співвідношень

$$y_0(x) = f(x),$$

$$y_1(x) = \int_a^x K(x,s) y_0(s) ds = \int_a^x K(x,s) f(s) ds,$$

$$y_2(x) = \int_a^x K(x,s) y_1(s) ds = \int_a^x K(x,s) \int_a^s K(s,s_1) f(s_1) ds_1 ds,$$

……………………………………………………

із яких отримуємо

$$y_1(x)=\int_a^x K(x,s)f(s)ds,$$

$$y_2(x)=\int_a^x K_2(x,s)f(s)ds, K_2(x,s)=\int_s^x K(x,s_1)K(s_1,s)ds_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

або в загальному випадку

$$y_{n+1}(x)=\int_a^x K_{n+1}(x,s)f(s)ds,\quad n=0,1,2,..., \tag{8}$$

де $K_{n+1}(x,s)$ має вигляд (4).

Ряд (6) з урахуванням (4) і (8) набуває вигляду

$$y(x)=f(x)+\sum_{v=1}^{\infty}\lambda^v\int_a^x K_v(x,s)f(s)ds\ , \tag{9}$$

звідки випливає вираз (3) для резольвенти при $\lambda=1$. Якщо $K(x,s)$ — неперервна функція при $a<s\le x<b$ і $f(x)$ неперервна при $a\le x\le b$, то ряд у правій частині (9) сходиться по x і λ при будь-яких λ, що дає змогу при розгляду методів розв'язування рівнянь Вольтерри не вводити вказаний параметр, вважаючи його компонентом ядра або одиницею [2].

При відомих значеннях $N=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|$, $M=\max\limits_{a\le s\le x\le b}\left|K(x,s)\right|$ можна оцінити *k*-те наближення до шуканого розв'язку за допомогою виразу

$$\left|y_k(x)\right|\le NM^k\frac{(b-a)^k}{k!}, \tag{10}$$

з якого видно, що приведений алгоритм має факторівальну збіжність.

Допустима при цьому похибка оцінюється наступним чином [2]:

$$\left|y(x)-y_n(x)\right|=\left|f(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda^k\int_a^x K_k(x,s)f(s)ds\right|\le$$

$$\le\sum_{k=n+1}^{\infty}NM^k\frac{(b-a)^k}{k!}=N\left(\exp\left(M(b-a)\right)-\sum_{k=0}^{n}M\frac{(b-a)^k}{k!}\right).$$

Ланцюгово-дробовий метод. Для збільшення швидкості збіжності ряду (9) доцільно використовувати теорію ланцюгових дробів або метод Паде [1; 5].

Розглядається степеневий ряд

$$L=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots, \tag{10}$$

який відповідає (6), при $c_i = y_i$, $z = \lambda$, та зв'язаний з ним визначник Ганкеля, який означений наступним чином:

$$H_0^{(n)} = 1,$$

$$H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix},\ k = 1,2,3,... \tag{11}$$

Для ряду (10) існує правильний C-дріб

$$1 + \frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \frac{a_3 z|}{|1} + \ldots, \tag{12}$$

який відповідає L (у точці $z = 0$), коефіцієнти якого знаходяться за допомогою наступних виразів [3]:

$$H_k^{(1)} \neq 0 \text{ і } H_k^{(2)} \neq 0,\ k = 1,2,3,...$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)},$$

$$a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}},\ a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}},\ m = 1,2,3,... \tag{13}$$

Для приведення виразу (12) до дробово-раціонального виду виконаємо згортання ланцюгового дробу [5]:

$$y(z) = \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{z}{h_2 + \cfrac{z}{\ddots + h_{n-2} + \cfrac{z}{h_{n-1} + \cfrac{z}{h_n}}}}}.$$

Провівши наступні елементарні перетворення, отримаємо

$$y(z) = \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{z}{h_2 + \cfrac{z}{\ddots + h_{n-2} + \cfrac{z}{h_{n-1}h_n + z}}}}.$$

Позначивши $H_{21} = h_n \cdot h_{n-1}$, $H_{22} = 1$ та зробивши позначення отримаємо:

$$
y(z) = \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{z}{\ddots + \cfrac{z}{h_{n-2} + \cfrac{h_n z}{H_{21} + H_{22} z}}}} =
$$

$$
= \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{z}{\ddots + \cfrac{H_{21} z + z^2}{h_{n-2} H_{21} + \left(h_{n-2} H_{22} + h_n\right) z}}}.
$$

Наступні дії виконуємо аналогічно. Для зручності використовуємо матрицю, в яку записуємо результати всіх обчислень:

$$
H = \begin{pmatrix}
h_n & & & & & \\
h_{n-1}H_{11} & 1 & & & & \\
h_{n-2}H_{21} & h_{n-2}H_{22} + H_{11} & & & & \\
h_{n-3}H_{31} & h_{n-3}H_{32} + H_{21} & 1 & & & \\
h_{n-4}H_{41} & h_{n-4}H_{42} + H_{31} & h_{n-4}H_{43} + H_{32} & & & \\
h_{n-5}H_{51} & h_{n-5}H_{52} + H_{41} & h_{n-5}H5 + H_{42} & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & & \\
h_2 H_{n-2,1} & h_2 H_{n-2,2} + H_{n-3,1} & h_2 H_{n-2,3} + H_{n-3,2} & \ldots & h_2 H_{n-2,k} + H_{n-3,k-1} & \\
h_1 H_{n-1,1} & h_1 H_{n-1,2} + H_{n-2,1} & h_1 H_{n-1,3} + H_{n-2,2} & \ldots & h_1 H_{n-1,k} + H_{n-2,k-1} & 1
\end{pmatrix}.
$$

Коефіцієнти шуканої функції записуються з двох останніх рядків матриці H, чисельник задається передостаннім рядком, а знаменник виписується з останнього рядка, тобто маємо наступний вигляд розв’язку:

$$
y(z) = \frac{H_{n-1,1} + H_{n-1,2} z + H_{n-1,3} z^2 + \ldots + H_{n-1,k-2} z^{n-3} + H_{n-1,k-1} z^{n-2}}{H_n + H_{n,2} z + H_{n,3} z^2 + \ldots + H_{n,k-2} z^{n-3} + H_{n,k-1} z^{n-2} + H_{n,k} z^{n-1}}.
$$

Алгоритм та програмні засоби. На основі викладеного вище отримуємо ітераційний алгоритм розв’язування інтегральних рівнянь з використанням ланцюгових дробів:

- знаходяться ітеровані ядра на основі алгоритму (4);

- формується інтегро-степеневий ряд (6);
- перетворюється інтегро-степеневий ряд у ланцюговий дріб за алгоритмом (11)—(13);
- виконується згортання ланцюгового дробу до дробово-раціонального виразу за матрицею H.

На основі побудованого алгоритму у середовищі Matlab розроблено програмні модулі:

`Kern=IterKern(K,n)` — формування рекурсивних ядер,
де `Kern` — масив рекурсивних ядер, `K` — ядро $K(x,s)$ (у символьному вигляді), `n` — кількість рекурсивних ядер;

`y=intvolterra(Kern,f,tk,n)` — знаходження аналітичного розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра II роду,
де `y` — розв'язок у символьному вигляді, `Kern` — масив рекурсивних ядер, `f` — функція $f(x)$, `tk` — межа інтегрування, `n` — кількість рекурсивних ядер;

`y=intvolterraCF(KCF,f,tk,n)` — знаходження аналітичного розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра II роду із застосуванням ланцюгових дробів,
де `y` — розв'язок у символьному вигляді, `KCF` — масив коефіцієнтів ланцюгового дробу, `f` — функція $f(x)$, `tk` — межа інтегрування, `n` — кількість рекурсивних ядер;

`KCF=CF(Kern)` — знаходження коефіцієнтів ланцюгового дробу (допоміжний модуль),
де `KCF` — масив коефіцієнтів ланцюгового дробу, `Kern` — масив рекурсивних ядер.

Обчислювальні експерименти. Ефективність розроблених програмних засобів досліджувалась за допомогою ряду обчислювальних експериментів, зокрема, при розв'язуванні наступного інтегрального рівняння

$$y(x)-\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt = f(x),$$

для якого точний загальний розв'язок має вигляд [4]:

$$y(x)=f(x)-\int_0^x \sin(x-t)\,f(t)\,dt\,.$$

При $f(x)=x$ точний розв'язок матиме вигляд:

$$y(x)=\sin(x)\,.$$

В залежності від кількості ітерованих ядер отримано різні наближення, зокрема, при $n=5$ розв'язок, знайдений ітераційним методом, буде мати вигляд:

$$y_i\left(x\right)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9-\frac{1}{39916800}x^{11}.$$

При використанні ланцюгово-дробового методу розв'язок має такий вигляд:

$$y_{лд}\left(x\right)=\frac{\dfrac{12671}{4363920}x^5-\dfrac{2363}{18183}x^3+x}{\dfrac{121}{16662240}x^6+\dfrac{601}{872784}x^4+\dfrac{445}{12122}x^2+1}.$$

Для порівняння отриманих розв'язків знайдено похибки, які приведені на рис. 1.

Результати обчислювальних експериментів при різній кількості членів інтегро-степеневого ряду приведено на рис. 2 та рис. 3. Інтегральні похибки отриманих розв'язків приведені в табл. 1.

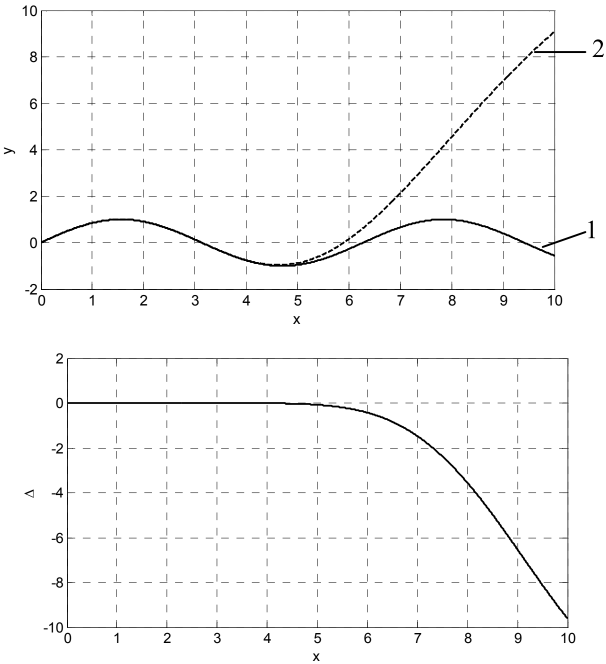


Рис. 1. *Результати моделювання при $n=5$:*
зверху — розв'язок інтегрального рівняння (1 — точний розв'язок, 2 — розв'язок отриманий ланцюгово-дробовим методом);
знизу — похибка розв'язку ланцюгово-дробовим методом

Таблиця 1

Інтегральні похибки моделювання

Кількість ітерацій	Метод ітерацій	Ланцюгово-дробовий метод
5	792.2477	16.6111
10	1.3948	0.0522
20	$3.5976 \cdot 10^{-11}$	$8.0103 \cdot 10^{-13}$

Висновки. Отримані результати дають підстави вважати, що ланцюгово-дробовий метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду є ефективним засобом дослідження динамічних моделей, оскільки дає змогу отримати кращу збіжність ітераційного процесу у порівнянні із методом простої ітерацій.

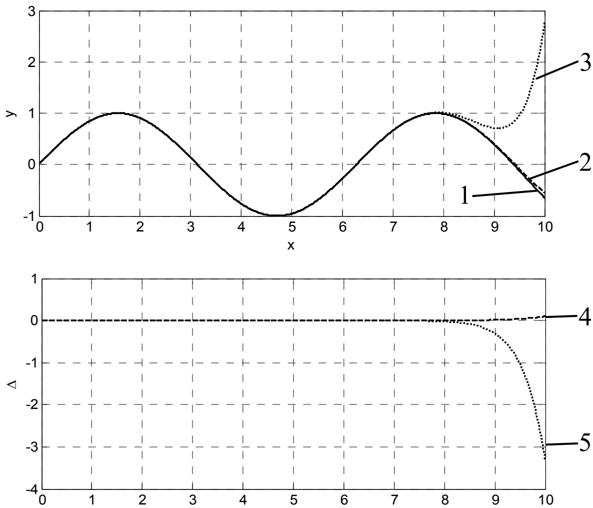
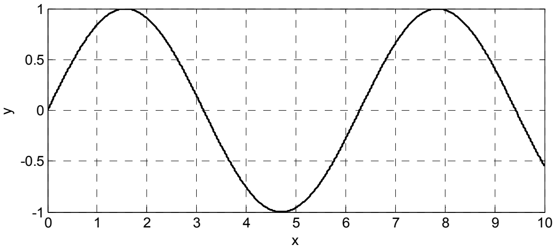


Рис. 2. *Результати моделювання при* $n = 10$ *: зверху — розв'язок інтегрального рівняння (1 — точний, 2 — ланцюгово-дробовим методом, 3 — ітераційним методом); знизу — похибки розв'язку (4 — ланцюгово-дробовим методом; 5 — ітераційним методом)*



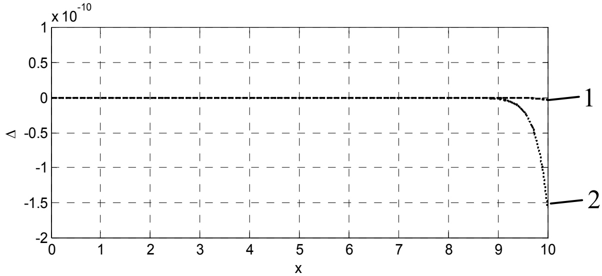


Рис. 3. *Результати моделювання при* $n = 20$ *: зверху — розв'язок інтегрального рівняння (точний та наближені розв'язки співпадають у заданому масштабі); знизу — похибки розв'язку (1 — ланцюгово-дробовим методом; 2 — ітераційним методом)*

Список використаних джерел:

1. Бейкер Дж. Аппроксимация Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис ; пер. с англ. — М. : Мир, 1986. — 502 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
3. Верлань А. Ф. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем : монографія / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук, В. А. Іванюк ; Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — 204 с.
4. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал, 2000. — 685 с.
5. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатько. — М. : Наука. главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 312 с.

The article deals with iterative methods for solving linear Volterra integral equations of the second kind. To increase the speed of convergence of iterative processes proposed chain-fractions method for solving integral equations. The effectiveness of the proposed method is verified by computational experiments.

Key words: *integral equations, fractions, the method of iterations.*

Отримано: 20.02.2012