

8. Андрейцев А. Ю. Використання моделей теплопровідності для розрахунку нагріву частинок порошку в умовах плазмового напилювання / А. Ю. Андрейцев, І. В. Смирнов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. уні-т ім. І. Огієнка, 2008. — Вип. 1. — С. 4—10.
9. Смирнов И. В. Моделирование процесса нагрева частиц порошка в плазменной струе при напылении композиционных покрытий / И. В. Смирнов, А. Ю. Андрейцев, А. В. Чорный, В. И. Копылов // Вестник ХНТУ. — 2008. — № 2 (31). — С. 449—454.

The complex mathematical model for determine of a temperature mode of the powder particles in plasma spraying taking into account change of plasma jet temperature is offered. By means of mathematical physics methods solutions for models on different parts of a spraying taking into account a aggregate state of particles are received. A graphical temperature and time dependence of heating and melting of particles of alumina and nickel in the plasma jet.

**Key words:** *thermal conductivity, temperature of the particles, the plasma jet, spraying distance, boundary problem.*

Отримано: 24.04.2011

УДК 519.6

**А. Я. Бомба\***, д-р техн. наук, професор,

**Є. В. Савюк\*\***, аспірант

\*Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне,

\*\*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

## **МЕТОД ФІКТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РУХУ РІДИН У ВОДОЙМАХ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ДЖЕРЕЛ ПОПОВНЕННЯ ТЕЧІЇ**

Методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водоймах, що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень, перенесено на випадки наявності додаткових джерел поповнення течії.

**Ключові слова:** *квазіконформні відображення, гідродинамічна сітка, крайові задачі, метод фіктивної фільтрації.*

**Вступ.** Існує низка підходів до математичного моделювання процесів руху рідин у водоймах. Даній проблемі присвячено значну кількість робіт як закордонних так і вітчизняних вчених (див., напр., [5; 7; 9; 10; 11; 12; 13]). У роботах [5; 7; 12] нами запропоновано методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водоймах,

що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень. Зокрема, у роботі [5] запропоновано спосіб «конструювання» відповідного фіктивного коефіцієнта провідності (що характеризує опір середовища) у випадку ізольованої (без додаткових втоків-витоків) водойми.

Проте при моделюванні реальних водойм більш складної конфігурації, актуальною є проблема врахування впливу різного роду «бічних» джерел-поповнювачів (вихідної трубки течії) на загальну картину динамічної сітки та поля швидкості у даній водоймі. При цьому, навіть при наявності додаткових джерел поповнення течії у вигляді еквіпотенціальних ділянок, розміщених вздовж однієї із берегових ліній, виникає проблема вибору відповідної області комплексно-квазіпотенціалу [1; 2; 3; 6].

У цій роботі йдеться про моделювання збурення квазіідеальної течії (у криволінійній чотирикутній водоймі, обмеженій двома еквіпотенціальними лініями та двома лініями течії) деяким джерелом-поповнювачем, розміщеним вздовж однієї із берегових ліній. Побудовано та реалізовано алгоритм розв'язку такого роду задач.

**Загальна постановка задачі.** Розглядається процес руху рідини у водоймі — модельній однозв'язній криволінійній області  $G_z = ABMNCD$  ( $z = x + iy$ ), обмеженій чотирма гладкими кривими  $AB = \{z : f_1(x, y) = 0\}$ ,  $BMNC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$ ,  $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ ,  $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$  (див. рис. 1, 2, 3) при наявності бічного джерела  $MN \in BC$  поповнення течії (через ділянки  $AB$  та  $MN$  рідина поступає в  $G_z$ , а через  $CD$  — виходить із неї), де точки  $A, B, C, D$  характеризуються своїми координатами  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_B, y_B)$ ,  $(x_C, y_C)$ ,  $(x_D, y_D)$  відповідно, а точки  $K, M, N$  — довжинами  $p, p_M, p_N$  відповідних дуг  $\widehat{BK}, \widehat{BM}, \widehat{BN} \in BC$ .

При побудові відповідної моделі припускаємо, що переміщення водяних мас можна розглядати як деяку фіктивну квазіідеальну течію в області  $G_z$  [5; 12]. А саме, процес руху рідини описуватимемо рівнянням руху  $\vec{v} = k \cdot \text{grad} \varphi$  та рівнянням нерозривності  $\text{div} \vec{v} = 0$  [3], де  $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  — швидкість фільтрації,  $\varphi$  — квазіпотенціал поля такий, що  $\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,  $\varphi|_{MN} = \varphi$  ( $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$ ),  $\frac{d\varphi}{dn}\Big|_{BM} = \frac{d\varphi}{dn}\Big|_{AD} = \frac{d\varphi}{dn}\Big|_{NC} = 0$ ,  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області,  $k$  — фіктивний коефіцієнт провідності.

Ввівши функцію течії  $\psi(x, y)$  комплексно спряжену до функції  $\varphi(x, y)$  приходимо до задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  фізичної області  $G_z$  на відповідну область  $G_\omega$  [1; 3] (див. рис. 1б, 2б, 3б) комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \left\{ \omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0 \right\} \cup \left\{ \omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_0 < \psi < Q \right\} \cup \left\{ \omega: \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_0 \right\}$ :

$$k\varphi'_x = \psi'_y, \quad k\varphi'_y = -\psi'_x,$$

$\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,  $\varphi|_{MN} = \varphi_0$ ,  $\psi|_{AD} = 0$ ,  $\psi|_{BM} = Q_0$ ,  $\psi|_{NC} = Q$ , де  $Q_0$  — потік, що входить в область  $G_z$  через ділянку  $AB$ ,  $Q$  — сумарний потік, що виходить із неї через  $CD$  ( $Q - Q_0$  — потік, що входить в  $G_z$  через  $MN$ ; величини  $Q, Q_0$  шукаються в процесі розв'язку задачі).

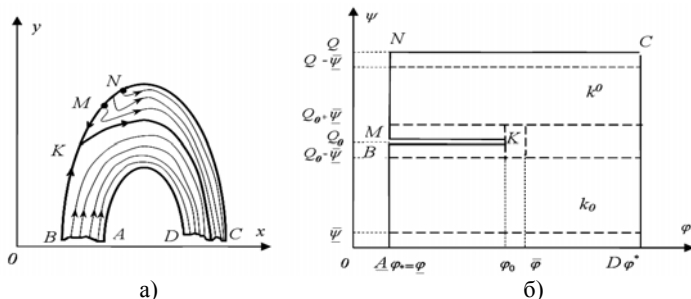


Рис. 1. Фізична область  $G_z$  та область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega$  у випадку  $\varphi_* = \varphi_0$

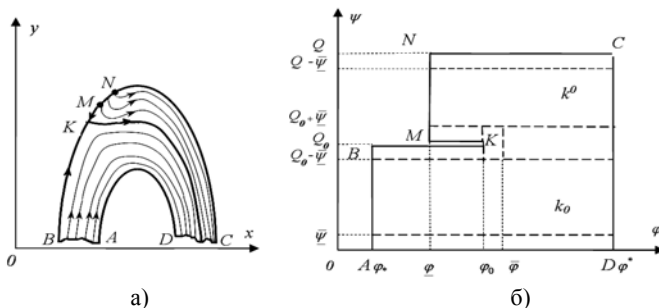
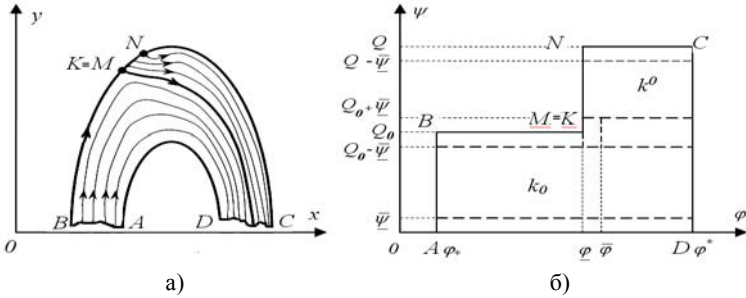


Рис. 2. Фізична область  $G_z$  та область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega$  у випадку  $\varphi_* < \varphi_0 \leq \varphi_0$



**Рис. 3.** Фізична область  $G_z$  та область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega$  у випадку  $\varphi = \varphi_0$

**Системний опис та загальна стратегія розв’язування задачі.**

Коефіцієнт провідності будемо, в першу чергу, виходячи з міркувань близькості його величини до нуля поблизу берегових ліній течії та сталості на решті території  $G_z$  [5, 7], а саме:

$$k(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{k_0}{\bar{\psi}^4} \psi^2 (2\bar{\psi} - \psi)^2 + \alpha, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq \bar{\psi}, \\ k_0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \bar{\psi} < \psi < Q_0 - \bar{\psi}, \\ k^0, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_0 + \bar{\psi} < \psi < Q - \bar{\psi}, \\ \frac{k^0}{\bar{\psi}^4} (Q - \psi)^2 (\psi - (Q - 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*, Q - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q, \\ \frac{k_0}{\bar{\psi}^4} (Q_0 - \psi)^2 (\psi - (Q_0 - 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0, Q_0 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_0, \\ \frac{k^0}{\bar{\psi}^4} (Q_0 - \psi)^2 (\psi - (Q_0 + 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, & \varphi \leq \varphi \leq \varphi_0, Q_0 < \psi \leq Q_0 + \bar{\psi}, \\ a_1 \psi^4 + b_1 \psi^3 + c_1 \psi^2 + d_1 \psi + f_1, & \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_0 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_0 + \bar{\psi}, \\ a_2(\psi) \varphi^4 + b_2(\psi) \varphi^3 + c_2(\psi) \varphi^2 + d_2(\psi) \varphi + f_2(\psi), & \\ \varphi_0 < \varphi < \bar{\varphi}, Q_0 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_0 + \bar{\psi}, & \end{cases} \quad (1)$$

де  $\bar{\psi}$  — узагальнена ширина деякої приберегової зони,  $\alpha$  — малий параметр, що задається та характеризує даний коефіцієнт поблизу берегових ліній течії. Тут коефіцієнти  $a_1, b_1, c_1, d_1, f_1; a_2(\psi), b_2(\psi), c_2(\psi), d_2(\psi), f_2(\psi)$  шукаємо відповідно в результаті розв’язання систем рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(Q_0 - \bar{\psi})^4 + b_1(Q_0 - \bar{\psi})^3 + c_1(Q_0 - \bar{\psi})^2 + d_1(Q_0 - \bar{\psi}) + f_1 = k_0, \\ a_1(Q_0 + \bar{\psi})^4 + b_1(Q_0 + \bar{\psi})^3 + c_1(Q_0 + \bar{\psi})^2 + d_1(Q_0 + \bar{\psi}) + f_1 = k^0, \\ 4a_1(Q_0 - \bar{\psi})^3 + 3b_1(Q_0 - \bar{\psi})^2 + 2c_1(Q_0 - \bar{\psi}) + d_1 = 0, \\ 4a_1(Q_0 + \bar{\psi})^3 + 3b_1(Q_0 + \bar{\psi})^2 + 2c_1(Q_0 + \bar{\psi}) + d_1 = 0, \\ 4a_1(Q_0 + 3\bar{\psi})^3 + 3b_1(Q_0 + 3\bar{\psi})^2 + 2c_1(Q_0 + 3\bar{\psi}) + d_1 = 0; \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a_2(\psi)\varphi_0^3 + 3b_2(\psi)\varphi_0^2 + 2c_2(\psi)\varphi_0 + d_2(\psi) = 0, \\ 4a_2(\psi)\bar{\varphi}^3 + 3b_2(\psi)\bar{\varphi}^2 + 2c_2(\psi)\bar{\varphi} + d_2(\psi) = 0, \\ 4a_2(\psi)(2\bar{\varphi} - \varphi_0)^3 + 3b_2(\psi)(2\bar{\varphi} - \varphi_0)^2 + 2c_2(\psi)(2\bar{\varphi} - \varphi_0) + d_2(\psi) = 0, \\ a_2(\psi)\varphi_0^4 + b_2(\psi)\varphi_0^3 + c_2(\psi)\varphi_0^2 + d_2(\psi)\varphi_0 + f_2(\psi) = \\ = \frac{k^0}{\bar{\psi}^4}(Q_0 - \psi)^2(\psi - (Q_0 - 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, \quad Q_0 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_0 \\ a_2(\psi)\varphi_0^4 + b_2(\psi)\varphi_0^3 + c_2(\psi)\varphi_0^2 + d_2(\psi)\varphi_0 + f_2(\psi) = \\ = \frac{k^0}{\bar{\psi}^4}(Q_0 - \psi)^2(\psi - (Q_0 + 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, \quad Q_0 < \psi \leq Q_0 + \bar{\psi} \\ a_2(\psi)\bar{\varphi}^4 + b_2(\psi)\bar{\varphi}^3 + c_2(\psi)\bar{\varphi}^2 + d_2(\psi)\bar{\varphi} + f_2(\psi) = \\ = a_1\psi^4 + b_1\psi^3 + c_1\psi^2 + d_1\psi + f_1, \end{array} \right. \quad (3)$$

які отримано з урахуванням умов гладкості  $k$  в області  $G_z$ . Фрагмент алгоритму розв'язку задачі для розрахунку значень  $k(\varphi, \psi) = k(\varphi, \psi, Q, Q_0, \alpha, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, \dots)$  нижче будуватимемо з використанням ідей методу блочних ітерацій [3; 5].

Аналогічно до [3] обернену нелінійну крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомих  $Q_0, Q, \varphi_0$  представимо у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = k(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{k(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( k(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( k(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q_0, \\ f_2(x(\varphi, Q_0), y(\varphi, Q_0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ f_2(x(\varphi, Q_0), y(\varphi, Q_0)) = 0, & \varphi_0 \geq \varphi \geq \underline{\varphi}, \\ f_2(x(\underline{\varphi}, \psi), y(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, & Q_0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & \underline{\varphi} < \varphi \leq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & Q \geq \psi \geq 0, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_* . \end{array} \right. \quad (6)$$

Очевидно, що в залежності від значення параметра  $\underline{\varphi}$  можливі різні випадки формування течії в  $G_z$  [2; 6], а отже і області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$ , зокрема, положення точки  $K = K(p) \in BM$ . Усі характерні випадки формування течії зображені на рис. 1, 2, 3.

На початку будуємо алгоритм розв'язування задачі у першому (ключовому) із таких випадків, а саме, при умові  $\underline{\varphi} = \varphi_*$ , зокрема, знаходимо відповідне положення точки  $K$  (значення відповідного параметра  $p$ ) та значення потенціалу  $\varphi_0$  в даній точці, а також значення  $Q_0$  та  $Q$ .

З метою вибору одного із наступних двох варіантів (при заданому значенні  $\underline{\varphi} = \varphi_0$ ) виконаємо наступні дії. Задаємо достатньо малий крок

$\Delta \varphi$  (набагато менший відповідного кроку сітки, що будуватиметься далі) і будуємо алгоритм розв'язування задачі для «проміжних» випадків (див. рис. 2), коли  $\underline{\varphi} = \varphi_i = \varphi_* + \Delta \varphi \cdot i, i = 0, 1, \dots$  (аналогічно, як і в попередньому випадку, величини параметрів  $\varphi_0, p, Q_0, Q$  позначимо відповідно через  $\varphi_{0i}, p_i, Q_{0i}, Q_i$ ),  $|\varphi_{0i} - \varphi_i| > \varepsilon$ .

Якщо ж, при деякому  $i = i_*$  виконуватиметься умова  $|\varphi_{0i_*} - \varphi_{i_*}| < \varepsilon$  ( $\varphi_{0i_*} \approx \varphi_{i_*}$ ), то маємо третій (оптимальний) випадок (див. рис. 3), коли  $K = M, p_{i_*} = p_M$  («зворотній рух» вздовж берегової лінії  $MK$  є відсутнім).

**Алгоритм побудови гідродинамічної сітки.** Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (6) та приграничних умов ортогональності (за-

мість (4) у сітковій області  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)}$ ,  $G_\omega^{(1)} = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$ :

$$\varphi_i = \varphi_* + h_\varphi^{(1)} i, \quad i = \overline{1, m_1 + 1}, \quad h_\varphi^{(1)} = \frac{(\varphi_0 - \varphi_*)}{m_1 + 1}, \quad \psi_j = h_\psi^{(1)} j, \quad j = \overline{1, n_1},$$

$$h_\psi^{(1)} = \frac{Q_0}{n_1 + 1} \left. \vphantom{h_\psi^{(1)}} \right\}, \quad G_\omega^{(2)} = \{(\varphi_i, \psi_j)\}: \quad \varphi_i = \varphi_0 + h_\varphi^{(2)} i, \quad i = \overline{1, m_2},$$

$$h_\varphi^{(2)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_0)}{m_2 + 1}, \quad \psi_j = h_\psi^{(2)} j, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad h_\psi^{(2)} = \frac{Q_0}{n_1 + 1} \left. \vphantom{h_\psi^{(2)}} \right\}, \quad G_\omega^{(3)} = \{(\varphi_i, \psi_j)\}:$$

$$\varphi_i = \varphi_0 + h_\varphi^{(3)} i, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad h_\varphi^{(3)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_0)}{m_2 + 1}, \quad \psi_j = Q_0 + h_\psi^{(3)} j, \quad j = \overline{0, n_2},$$

$$h_\psi^{(3)} = \frac{Q - Q_0}{n_2 + 1} \left. \vphantom{h_\psi^{(3)}} \right\}, \quad G_\omega^{(4)} = \{(\varphi_i, \psi_j)\}: \quad \varphi_i = \varphi + h_\varphi^{(4)} i, \quad i = \overline{m_0, m_1 + 1},$$

$$h_\varphi^{(4)} = \frac{(\varphi_0 - \varphi)}{m_1 - m_0 + 1} \left. \vphantom{h_\varphi^{(4)}} \right\} \psi_j = Q_0 + h_\psi^{(4)} j, \quad j = \overline{1, n_2}, \quad h_\psi^{(4)} = \frac{Q - Q_0}{n_2 + 1} \left. \vphantom{h_\psi^{(4)}} \right\} \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi^{(l)}}{h_\psi^{(l)}},$$

$l = \overline{1, 4}$ , запишемо у вигляді [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta\varphi}{2} \left( \gamma^{(l)} k_{i,j} (k_{i,j})'_\psi (x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j-1}^{(l)}) - \frac{(k_{i,j})'_\varphi}{k_{i,j}} (x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)}) \right) - \\ - 2 \left( 1 + (\gamma^{(l)})^2 k_{i,j}^2 \right) x_{i,j}^{(l)} + (\gamma^{(l)})^2 k_{i,j}^2 (x_{i,j-1}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) + x_{i+1,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} - 2 \left( 1 + (\gamma^{(l)})^2 k_{i,j}^2 \right) y_{i,j}^{(l)} + (\gamma^{(l)})^2 k_{i,j}^2 (y_{i,j-1}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) + \\ + \frac{\Delta\varphi}{2} \left( \gamma^{(l)} k_{i,j} (k_{i,j})'_\psi (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j-1}^{(l)}) - \frac{(k_{i,j})'_\varphi}{k_{i,j}} (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}) \right) = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

де  $i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, n_1}$  при  $l=1$ ,  $i = \overline{m_1 + 1, m}, j = \overline{1, n_1}$  при  $l=2$ ,

$i = \overline{m_1 + 1, m}, j = \overline{n_1 + 1, n}$  при  $l=3$ ,  $i = \overline{m_0, m_1 + 1}, j = \overline{n_1 + 1, n}$  при  $l=4$ ,

$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $k_{i,j} = k(\varphi_i, \psi_j)$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, j = \overline{0, n_1}, \quad f_2(x_{i,n_1}^{(1)}, y_{i,n_1}^{(1)}) = 0, i = \overline{0, m_1}, \\ f_2(x_{m_0,j}^{(4)}, y_{m_0,j}^{(4)}) = 0, j = \overline{n_1 + 1, n + 1}, \quad f_2(x_{i,n+1}^{(4)}, y_{i,n+1}^{(4)}) = 0, i = \overline{m_0, m + 1}, \\ f_2(x_{i,n_1}^{(4)}, y_{i,n_1}^{(4)}) = 0, i = \overline{m_0, m_1 + 1}, \quad f_3(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, j = \overline{0, n_1}, \\ f_3(x_{m+1,j}^{(3)}, y_{m+1,j}^{(3)}) = 0, j = \overline{n_1 + 1, n}, \quad f_4(x_{i,0}^{(1)}, y_{i,0}^{(1)}) = 0, i = \overline{0, m_1}, \\ f_4(x_{i,0}^{(2)}, y_{i,0}^{(2)}) = 0, i = \overline{m_1 + 1, m + 1}; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - \\ \quad - f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, j = \overline{0, n_1 + 1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n_1+1}, y_{i,n_1+1})(y_{i,n_1} - y_{i,n_1+1}) - \\ \quad - f_{2y}'(x_{i,n_1+1}, y_{i,n_1+1})(x_{i,n_1} - x_{i,n_1+1}) = 0, i = \overline{0, m_1 + 1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n_1+1}, y_{i,n_1+1})(y_{i,n_1+2} - y_{i,n_1+1}) - \\ \quad - f_{2y}'(x_{i,n_1+1}, y_{i,n_1+1})(x_{i,n_1+2} - x_{i,n_1+1}) = 0, i = \overline{m_0, m_1 + 1}, \\ f_{2x}'(x_{m_0,j}, y_{m_0,j})(y_{m_0+1,j} - y_{m_0,j}) - \\ \quad - f_{2y}'(x_{m_0,j}, y_{m_0,j})(x_{m_0+1,j} - x_{m_0,j}) = 0, j = \overline{n_1 + 1, n + 1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - \\ \quad - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, i = \overline{m_0, m + 1}, \\ f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - \\ \quad - f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, j = \overline{0, n + 1}, \\ f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - \\ \quad - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, i = \overline{0, m + 1}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Квазіконформний інваріант  $\gamma^{(l)}$  ( $l = \overline{1, 4}$ ) у кожній з підобластей криволінійного чотирикутника  $G_z$  [1; 3] визначимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних чотирикутників:

$$\gamma^{(l)} = \frac{1}{sp} \sum_{i,j=0}^{s,p} \frac{1}{k_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \gamma_{i,j}^{(l)}, \quad (10)$$



$$\gamma_{i,j}^{(l)} = \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)}\right)^2}},$$

де  $s = m_1, p = n_1$  при  $l=1$ ,  $s = m_2 + 1, p = n_1$  при  $l=2$ ,  
 $s = m_2 + 1, p = n_2 + 1$  при  $l=3$ ,  $s = m_1 - m_0 + 1, p = n_2 + 1$  при  $l=4$ ,

$$k_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{k_{i,j} + k_{i+1,j} + k_{i,j+1} + k_{i+1,j+1}}{4}.$$

Алгоритм розв'язування даної різницевої задачі в загальному випадку будемо шляхом поетапної параметризації величини  $\gamma^{(l)}$ , граничних, внутрішніх вузлів сітки  $G_z^y$  та значення коефіцієнта фіктивної фільтрації  $k$  з використанням ідей методу блочної ітерації. А саме: задаємо кількості  $m_0, m_1, m_2, n_1, n_2$  ( $m_1 + m_2 = m, n_1 + n_2 = n$ ) вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega$ , параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, значення величин  $k_0$  та  $k^0$ , параметр  $\alpha$ , що характеризує коефіцієнт провідності вздовж берегових ліній водойми, а також значення узагальненої ширини приберегової зони  $\underline{\psi}$ , де коефіцієнт провідності не є сталим. Задаємо початкові наближення наступного ряду величин: координат граничних вузлів  $\left(x_{0,j}^{(l)(0)}, y_{0,j}^{(l)(0)}, j = \overline{0, n_1 + 1}; x_{i,0}^{(l)(0)}, y_{i,0}^{(l)(0)}, i = \overline{0, m_1 + 1}; \dots\right)$  так, щоб виконувались рівності (6) та координат внутрішніх вузлів  $\left(x_{i,j}^{(l)(0)}, y_{i,j}^{(l)(0)}\right)$

та згідно формули (10) і співвідношень  $Q_0 = \frac{1}{\gamma^{(1)}} \frac{n_1}{m_1} + \frac{1}{\gamma^{(2)}} \frac{n_1}{m_2 + 1}$ ;

$Q = \frac{1}{\gamma^{(1)}} \frac{n_1}{m_1} + \frac{1}{\gamma^{(2)}} \frac{n_1}{m_2 + 1} + \frac{1}{\gamma^{(3)}} \frac{n_2 + 1}{m_2 + 1} + \frac{1}{\gamma^{(4)}} \frac{n_2 + 1}{m_1 - m_0 + 1}$ ). розраховуємо

значення конформного інваріанта  $\gamma^{(l)(0)}$  та витрат  $Q_0^{(0)}, Q^{(0)}$ .

Знаходимо значення коефіцієнта провідності  $k^{(r)}(\varphi, \psi)$  ( $r$  — номер кроку ітераційного процесу) за формулою (1) для області  $G_\omega \setminus \{(\varphi, \psi) : \varphi_0 < \varphi \leq \varphi^*, Q_0 - \underline{\psi} \leq \psi \leq Q_0 + \underline{\psi}\}$ . Розв'язуємо систему рівнянь (2), наприклад, за допомогою метода Гауса, в результаті чого отримаємо коефіцієнти  $a_1^{(r)}, b_1^{(r)}, c_1^{(r)}, d_1^{(r)}, f_1^{(r)}$  та з використанням

наближеного значення величини  $Q_0$  знаходимо  $k^{(r)}(\varphi, \psi)$  в області  $\{(\varphi, \psi) : \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_0 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_0 + \bar{\psi}\}$ . Тепер, за відомими значеннями  $k^{(r)}(\varphi, \psi)$  на ділянках  $\varphi = \varphi_0$  та  $\varphi = \bar{\varphi}$  межі області  $G_\omega = \{(\varphi, \psi) : \varphi_0 \leq \varphi \leq \bar{\varphi}, Q_0 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_0 + \bar{\psi}\}$ , проводимо його розрахунок на решті території. Для цього попередньо розв'язуємо  $n_s$  систем рівнянь (3) ( $n_s$  — кількість ліній течії, що належить  $\{(\varphi, \psi) : \varphi^0 \leq \varphi \leq \bar{\varphi}, Q_1 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_1 + \bar{\psi}\}$ ) та знаходимо  $n_s$  наборів коефіцієнтів  $a_2^{(r)}(\psi)$ ,  $b_2^{(r)}(\psi)$ ,  $c_2^{(r)}(\psi)$ ,  $d_2^{(r)}(\psi)$ ,  $f_2^{(r)}(\psi)$ .

Проводимо уточнення: внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(l)(r)}, y_{i,j}^{(l)(r)})$ ,  $l = \overline{1,4}$ , за формулами, отриманими шляхом розв'язування (7) відносно  $x_{i,j}^{(l)(r)}$  та  $y_{i,j}^{(l)(r)}$ . На парних кроках ітерації уточнення внутрішніх вузлів проводимо у областях  $G_\omega^{(1)} \cup G_\omega^{(2)}$  та  $G_\omega^{(2)} \cup G_\omega^{(3)}$ , а на непарних у  $G_\omega^{(3)} \cup G_\omega^{(4)}$  та  $G_\omega^{(2)} \cup G_\omega^{(3)}$ , що забезпечує неперервність та рівномірність розбиття у приграничних зонах підобластей  $G_\omega^{(l)}$ ,  $l = \overline{1,4}$ .

Провівши уточнення величин  $\gamma^{(l)(r)}$  за формулою (10), поточних значень витрат  $Q_0^{(r)}$ ,  $Q^{(r)}$  та координат граничних вузлів (8), перевіряємо виконання умов зупинки ітераційного процесу, а саме:

$$\max_{x_{i,j}^{(l)(r)}, y_{i,j}^{(l)(r)} \in \partial G_z} \left( \left| x_{i,j}^{(l)(r+1)} - x_{i,j}^{(l)(r)} \right|, \left| y_{i,j}^{(l)(r+1)} - y_{i,j}^{(l)(r)} \right| \right) < \varepsilon, \quad (11)$$

$$\left| D_{i,j}^{(l)(r+1)} - D_{i,j}^{(l)(r)} \right| < \varepsilon_*, \quad \left| Q^{(l)(r+1)} - Q^{(l)(r)} \right| < \varepsilon^*,$$

де  $D_{i,j}^{(l)(r)}$  — відношення довжин діагоналей відповідного криволінійного чотирикутника на  $r$ -тій ітерації,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_*$ ,  $\varepsilon^*$  — малі параметри. У випадку невиконання умов закінчення процесу (11) знову переходимо до уточнення фіктивного коефіцієнта провідності  $k(\varphi, \psi)$ .

Тепер, аналогічно [2], стає можливим розрахунок поля швидкостей у внутрішніх вузлах сітки даної області:

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2h_\psi^{(l)} J_{i,j}} \left( y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j-1}^{(l)}, x_{i,j-1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)} \right),$$

$$\text{де } J_{i,j} = \frac{1}{4h_x^{(l)}h_y^{(l)}} \left( (x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)}) (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j-1}^{(l)}) - (x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j-1}^{(l)}) \times (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}) \right),$$

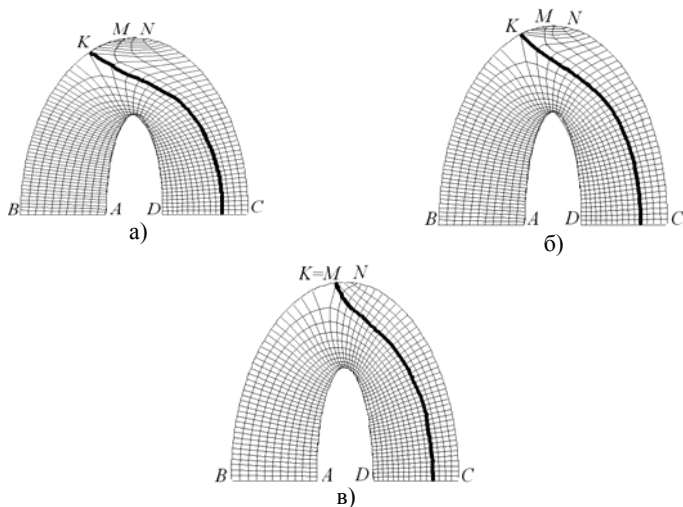
$i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, n_1}$  при  $l=1$ ,  $i = \overline{m_1+1, m}, j = \overline{1, n_1}$  при  $l=2$ ,  $i = \overline{m_1+1, m}, j = \overline{n_1+1, n}$  при  $l=3$ ,  $i = \overline{m_0, m_1+1}, j = \overline{n_1+1, n}$  при  $l=4$ .

**Числові розрахунки** проведено для однозв'язної криволінійної області  $ABMNCD$ , обмеженої чотирма гладкими кривими

$$BMNC = \left\{ z : \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{35^2} - 1 = 0 \right\}, AD = \left\{ z : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{20^2} - 1 = 0 \right\}, AB = \{z: y=0\},$$

$$CD = \{z: y=0\} \text{ при } k_0 = 1,5, k^0 = 1, \alpha = 0,01, \varphi_* = 0, \varphi^* = 10,$$

$\underline{\varphi} = \overline{\varphi} = 0,5$ . На рис. 4 зображено 3 характерні випадки формування течії. Зокрема, на рис. 4 а) побудовано динамічну сітку та лінію розділу течії у ключовому випадку, коли  $\underline{\varphi} = \varphi_* = 0$ . На рис. 4 б) зображено динамічну сітку в одному із «проміжних» випадків, коли  $\varphi_* < \underline{\varphi} = 2 < \varphi_0$ . Граничний (оптимальний) із усіх таких випадків, коли  $M=K$  представлено на рис. 4 в). При цьому відповідно одержано: а)  $Q_0 = 3,98, Q = 4,62, \varphi_0 = 3,8$ , б)  $Q_0 = 4,07, Q = 4,71, \varphi_0 = 3,87$  та в)  $Q_0 = 4,22$  та  $Q = 4,84, \underline{\varphi} = \varphi_0 = 3,95$ .



**Рис. 4.** Динамічні сітки у випадках  $\underline{\varphi} = \varphi_* = 0$  (а),

$\varphi_* < \underline{\varphi} = 2 < \varphi_0$  (б),  $\underline{\varphi} = \varphi_0 = 3,95$  (в)

Також на рисунку 4 продемонстровано зміну положення лінії розділу течії (зокрема, зміну положення точки  $K$  на береговій лінії  $BC$ ) в залежності від зміни потенціалу на контурі-поповнювачі течії  $MN$ .

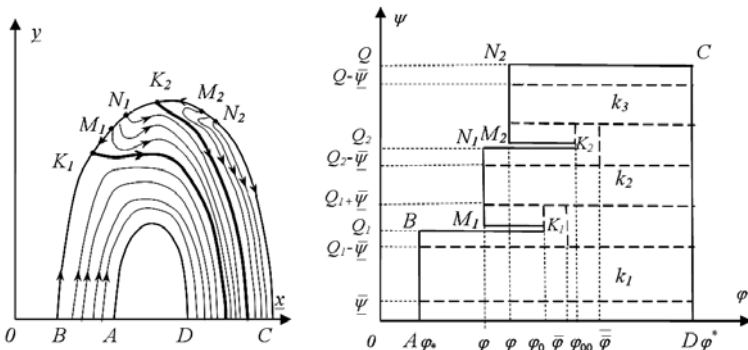
**Висновки та зауваження.** Методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водоймах, що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень, перенесено на випадки наявності додаткових джерел поповнення трубки течії.

Запропонований підхід дає можливість відшукання положення границі розділу основного та додаткового потоків, враховує фізичні аспекти процесу руху водяних мас, зокрема, близькість величини швидкості нулю поблизу берегових ліній.

Якщо природна течія не є близькою до ідеальної, то у ряді випадків одержані розв'язки можуть використовуватися в якості нульового наближення шуканого поля швидкості.

При цьому підкреслимо, що в цій роботі, величини потенціалів на ділянках входу та виходу течії з водойми, а також на ділянці-джерелі вважались відомими, а потоки  $Q_0$  (що поступає у водойму через ділянку входу) та  $Q$  (що виходить із водойми) і величину параметра  $p$ , що характеризує положення точки «розділу»  $K \in AB$ , а також значення потенціалу у цій точці шукались в процесі розв'язання задачі. Аналогічно, може бути розв'язаною не менш важлива для практичного застосування задача на знаходження граничних потенціалів (що характеризуються, наприклад, потужностями насосів) за відомими витратами та різного роду умовами керування.

У випадку наявності декількох джерел-поповнювачів (див., на пр., рис. 6) пропонуємо наступний вигляд фіктивного коефіцієнта провідності:



**Рис. 6.** Фізична область та схема області квазікомплексного потенціалу у випадку двох джерел поповнення

$$k(\varphi, \psi) = \begin{cases} k_1, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \bar{\psi} < \psi < Q_1 - \bar{\psi}, \\ k_2, \underline{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_1 + \bar{\psi} < \psi < Q_2 - \bar{\psi}, \\ k_3, \underline{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_2 + \bar{\psi} < \psi < Q - \bar{\psi}, \\ k_3/\bar{\psi}^4 (Q - \psi)^2 (\psi - (Q - 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, \underline{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, Q - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q, \\ k_2/\bar{\psi}^4 (Q_2 - \psi)^2 (\psi - (Q_2 - 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, \underline{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi_{00}, Q_2 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_2, \\ k_1/\bar{\psi}^4 (Q_1 - \psi)^2 (\psi - (Q_1 - 2\bar{\psi}))^2 + \alpha, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0, Q_1 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_1, \\ k_1/\bar{\psi}^4 \psi^2 (2\bar{\psi} - \psi)^2 + \alpha, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq \bar{\psi}, \\ k_2/\bar{\psi}^4 (Q_1 - \psi)^2 (\psi - (Q_1 + 2\bar{\psi}))^2, \varphi \leq \varphi \leq \varphi_0, Q_1 < \psi \leq Q_1 + \bar{\psi}, \\ k_3/\bar{\psi}^4 (Q_2 - \psi)^2 (\psi - (Q_2 + 2\bar{\psi}))^2, \varphi \leq \varphi \leq \varphi_{00}, Q_2 < \psi \leq Q_2 + \bar{\psi}, \\ a_1 \psi^4 + b_1 \psi^3 + c_1 \psi^2 + d_1 \psi + f_1, \\ a_s(\psi) \varphi^4 + b_s(\psi) \varphi^3 + c_s(\psi) \varphi^2 + d_s(\psi) \varphi + f_s(\psi), \\ l=1: \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_1 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_1 + \bar{\psi}, l=2: \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ Q_2 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_2 + \bar{\psi}, s=1: \varphi_0 < \varphi < \bar{\varphi}, Q_1 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_1 + \bar{\psi}, \\ s=2: \varphi_{00} < \varphi < \bar{\varphi}, Q_2 - \bar{\psi} \leq \psi \leq Q_2 + \bar{\psi} \end{cases}$$

Можливым також є перенесення запропонованої методології на випадки наявності окрім джерел-поповнювачів ще й джерел-втоків (див., напр., рис. 7).

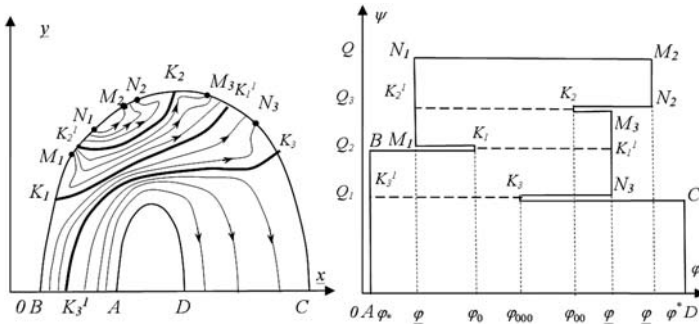


Рис. 7. Фізична область та схема області квазікомплексного потенціалу у випадку одного джерела поповнення та двох витоків

Як і в роботах [3; 6] в алгоритмі передбачено можливість зупинки обчислювального процесу за виконанням лише частини із умов (11) із зазначенням ділянок в області  $G_z$  великих нев'язок рівнянь (4), (5), (7) (так звані «застійні зони» та зони великих градієнтів, що виникають поблизу особливих точок «шорстких» берегових ліній).

**У перспективі** є моделювання процесів охолодження в окреслених вище водоймах з урахуванням конвективно-теплової взаємодії.

### Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечький. — К. : Наук. думка, 2007. — 308 с.
2. Бомба А. Я. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Рівне : РДГУ, 2009. — Вип. 6. — С. 20—35.
3. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. — 2001. — Вип. 8. — С. 19—25.
4. Бомба А. Я. Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. — 1999. — Вип. 6. — С. 25—36.
5. Бомба А. Я. Метод фіктивної фільтрації моделювання одного класу квазі-ідеальних процесів руху рідин / А. Я. Бомба, С. О. Пеньковський, Є. В. Савюк // Волинський математичний вісник. — 2010. — Вип. 7 (16). — С. 20—29.
6. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький, В. В. Скопечький // Доповіді НАН України. — 2004. — № 3. — С. 62—68.
7. Бомба А. Я. Метод «фіктивної фільтрації» математичного моделювання сингулярно-збурених процесів типу «конвекція-теплова дифузія-теплообмін» / А. Я. Бомба, Є. В. Савюк, О. А. Фурсачик // Вісник Харк. нац. ун-ту. — 2010. — № 925. — Вип. 14. — С. 20—27.
8. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. — М. : Недра, 1972. — 288 с.
9. Кюньж Ж. А. Численные методы в задачах речной гидравлики / Ж. А. Кюньж, Ф. М. Холли, А. Вервей. — М. : Энергоатомиздат, 1985. — 252 с.
10. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. — М. : Мир., 1980. — 616 с.
11. Чикина Л. Г. Моделирование распространения загрязнения в мобилском заливе (США) / Л. Г. Чикина, А. Л. Чикин // Математическое моделирование. — 2001. — Т. 13, № 2. — С. 93—98.

12. Savyuk E. The mathematical model of cooling water reservoirs in conditions for optimization / E. Savyuk, S. Penkovsky // Water managemen — state and prospects of development. Collected articles of young scientists. Part 1. Rivne. — 2010. — P. 264—268.
13. Won Seo I. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams / I. Won Seo, T. Sung Cheong // J. Hydraulic Eng. — 1998. — Vol. 124, № 1. — P. 25—32.

Modeling methodology of slow fluid movement processes in reservoirs, that is based on replacement of real flow with some fictitious quasiideal filtration field with the following application of approximate methods for quasi-conformal mappings, has been transferred to cases of availability of additional enriching flows sources.

**Key words:** *quasiconformal mapping dynamically-hydrodynamic mesh, boundary problems, method of filtering fictitious.*

Отримано: 19.04.2011

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

**А. В. Васильев**, канд. техн. наук

Институт проблем моделирования в энергетике  
им. Г.Е. Пухова НАН Украины, г. Киев

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПИД-КОНТРОЛЛЕРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ**

Предложены математические модели ПИД-контроллеров целого и дробного порядков на основе аппроксимационно-операционного  $S$ -преобразования. Приведены иллюстративные примеры определения отклика контроллера на различные входные воздействия с использованием программной среды системы Mathematica®.

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, автоматическое управление, динамическая система, ПИД-контроллер, дробное исчисление, операционные методы, полиномиальная аппроксимация,  $S$ -преобразование.*

**Введение.** ПИД-контроллер является одним из элементов системы управления динамическими системами и представляет собой совокупность трех элементарных звеньев (пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего), входные полюса которых объединены и подключены к источнику входного сигнала, а выходные сигналы звеньев суммируются и формируют выходной сигнал контроллера [5]. Известная структурная схема ПИД-контроллера приведена на рис. 1.