

8. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
10. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Випуск 314—315. — С. 105—113.

The method of generalized finite hybrid integral transformation of the Bessel—Fourier—Legendre spectral parameter obtained from the integral image of the analytical solution of diffusion problem on a three-segment  $[0, R_3]$  polar axis in the assumption that the limits of soft environment in relation to wave reflection. Simulation of diffusion processes is made using hybrid differential Bessel—Fourier—Legendre.

**Key words:** *simulation of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transformation, the basic identity, the key solutions.*

Отримано: 14.04.2011

УДК 519.642.5

**О. М. Корнєєв\***, асистент,

**В. А. Федорчук\*\***, д-р техн. наук

\*Хмельницький національний університет, м. Хмельницький,

\*\*Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **КВАДРАТУРНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ З ВИРОДЖЕНИМИ ЯДРАМИ**

У роботі розглянуто квадратурний алгоритм розв'язування систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри з використанням методу вироджених ядер. Алгоритм забезпечує високу швидкість комп'ютерних програм при дослідженні багатозв'язних динамічних об'єктів.

**Ключові слова:** *система інтегральних рівнянь, вироджене ядро, квадратурний алгоритм.*

**Вступ.** При проектуванні швидкодіючих високоточних керованих багатозв'язних електромеханічних систем мехатронного типу виникає задача синтезу обчислювально-керуючої підсистеми, характерною рисою якої є залучення в алгоритми керування математичних моделей об'єктів керування. Традиційно математичні моделі багатозв'язних систем подаються у вигляді систем диференціальних рівнянь, однак при їх

числовій реалізації виникають значні труднощі забезпечення стійкості обчислювальних алгоритмів при наявності високочастотних завад у вхідних даних. Підвищення стійкості числової реалізації диференціальних моделей, зазвичай, досягається шляхом використання прийомів попередньої фільтрації вхідних даних, що є причиною виникнення похибок при відшуканні розв'язків. Для забезпечення стійкості обчислювальних алгоритмів, при умові збереження високої точності, доцільним є використання інтегральних моделей. При цьому актуальною залишається задача створення високоточних і в той же час високошвидкісних алгоритмів розв'язування систем інтегральних рівнянь, які можна було б використовувати в системах реального часу.

**Інтегральний оператор Вольтерри з виродженим ядром.** Традиційні алгоритми розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри II роду засновані на використанні квадратурних формул, та у випадку ядер загального вигляду реалізуються з наростанням кількості операцій на кожному кроці дискретизації [1]. Ця властивість призводить до значного збільшення часу розв'язування на кроці, тобто до зниження швидкодії, особливо при великому інтервалі відшукання розв'язку рівняння з малим кроком. Можливістю уникнення такого ефекту є випадок, коли ядро рівняння є виродженим або може бути зведене до нього. При цьому кількість операцій на кожному кроці обчислень є незмінною, а тому існує можливість "швидкого" розв'язування рівняння, в тому числі можливість реалізації інтегральних динамічних моделей у реальному часі.

Інтегральний оператор Вольтерри з виродженим ядром має вигляд:

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = \int_a^x \sum_{l=1}^p \alpha_l(x)\beta_l(s)y(s)ds = \sum_{l=1}^p \alpha_l(x) \int_a^x \beta_l(s)y(s)ds, \quad (1)$$

де  $l = \overline{1, p}$ .

Виконуючи дискретизацію інтегралів в (1) та замінюючи їх квадратурними сумами [1], отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_a^{x_i} K(x_i, s)y(s)ds &= \sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i) \int_a^{x_i} \beta_l(s)y(s)ds \cong \\ &\cong \sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i) \sum_{j=0}^i \beta_l(x_j)y(x_j) = \sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i) [\beta_l(x_n)y(x_n) + \\ &+ \sum_{j=0}^{i-1} \beta_l(x_j)y(x_j)] = \sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i)\beta_l(x_i)y(x_i) + \\ &+ \sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i) \sum_{j=0}^{i-1} \beta_l(x_j)y(x_j), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, i}, l = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) значення суми  $\sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i) \sum_{j=0}^{i-1} \beta_l(x_j) y(x_j)$  відомо, оскільки воно обраховується на попередньому  $(i-1)$ -му кроці. Тому на  $i$ -му кроці залишається обчислити значення суми  $\sum_{l=1}^p \alpha_l(x_i) \beta_l(x_i) y(x_i)$ , яке вимагає проведення незмінної кількості операцій на кожному  $i$ -му кроці.

Значна частина інтегральних операторів та рівнянь, які зустрічаються на практиці, містять різницеві ядра, представлені в аналітичному вигляді та мають властивості виродженості. Метод вироджених ядер стосовно скалярних інтегральних рівнянь Вольтера, а також алгоритми апроксимації довільних ядер виродженими приведено в [1].

**Метод вироджених ядер стосовно систем лінійних інтегральних рівнянь (СЛІР) Вольтерри II роду.** Розглянемо СЛІР з виродженими ядрами вигляду

$$y_r(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{p_{rj}} \alpha_{rjl}(x) \int_a^x \beta_{rjl}(s) y_j(s) ds + f_r(x), \quad (3)$$

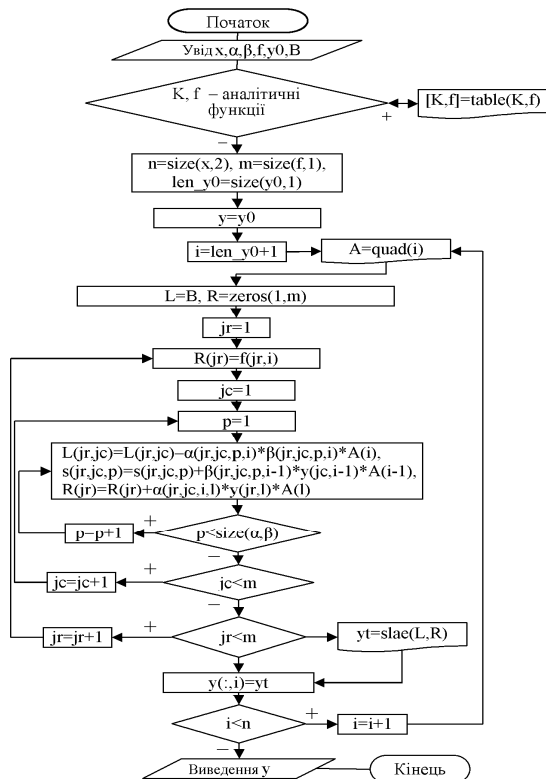
де  $r = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $l = \overline{1, p_{rj}}$ ,  $m$  — порядок СЛІР. Знайдемо розв'язок системи (3) на відрізку  $[a, b]$ . Розіб'ємо відрізок точками  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ . Застосувавши до обчислення інтегралів в (3) квадратурні суми, отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$y_r^{(1)} = f_r^{(1)}, \quad (4)$$

$$y_r^{(i)} - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{p_{rj}} \alpha_{rjl}^i \beta_{rjl}^i y_j^i A_i = f_r^{(i)} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{p_{rj}} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{rjl}^k \beta_{rjl}^k y_j^k A_k,$$

де  $A_k$  — коефіцієнти квадратурної формули,  $\alpha_{rjl}^i = \alpha_{rjl}(x_i)$ ,  $\beta_{rjl}^i = \beta_{rjl}(x_i)$ ,  $y_j^i = y_j(x_i)$ ,  $r = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $l = \overline{1, p_{rj}}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, i-1}$ .

Розв'язок системи (4) дозволяє знайти значення  $y_r$  в точках  $x_i$ . Схема алгоритму представлена на рис. 1, де підпрограма  $table(a, b)$  перетворює аналітичне представлення функцій (ядра і правої частини) до табличного вигляду;  $size(a, b)$  — підпрограма, яка визначає розмір масиву  $a$  за розмірністю  $b$ ;  $quad(x)$  — функція, яка повертає коефіцієнти квадратурної формули для  $x$  вузлів; функція  $zeros(m, n)$  — формує масив нулів розміром  $m \times n$ ; підпрограма  $slae(L, R)$  — розв'язує СЛАР з коефіцієнтами при невідомих  $L$  та правій частині  $R$ .



**Рис. 1.** Алгоритм розв'язування СЛІР Вольтерри II роду з виродженими ядрами на основі квадратурних формул

Проілюструємо ефективність використання методу вироджених ядер на тестовому прикладі.

**Приклад 1.** В якості тестового (модельного) прикладу, який дає змогу об'єктивно оцінити точність алгоритму за допомогою обчислювальних експериментів розглянемо систему

$$\begin{cases}
 y_1(x) - \int_0^x (x-s)y_1(s) ds - \int_0^x (x+2)y_2(s) ds = \\
 = 2(1-x)\sin x - \cos x - x + 1; \\
 y_2(x) - \int_0^x (x-2s)y_1(s) ds - \int_0^x (2x-s)y_2(s) ds = \\
 = (2-x)\sin x - (2-x)\cos x - x - 1;
 \end{cases} \quad (5)$$

з виродженими ядрами та точним розв'язком

$$y_1^T(x) = \sin x, \quad y_2^T(x) = \cos x, \quad (6)$$

що описує незгасаючі коливання.

Після очевидного перетворення система отримує вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) - x \int_0^x y_1(s) ds + \int_0^x s y_1(s) ds - x \int_0^x y_2(s) ds - \int_0^x s y_2(s) ds = \\ \quad = 2(1-x) \sin x - \cos x - x + 1; \\ y_2(x) - x \int_0^x y_1(s) ds + 2 \int_0^x s y_1(s) ds - 2x \int_0^x y_2(s) ds + \int_0^x s y_2(s) ds = \\ \quad = (2-x) \sin x + (2-x) \cos x - x - 1. \end{array} \right. \quad (7)$$

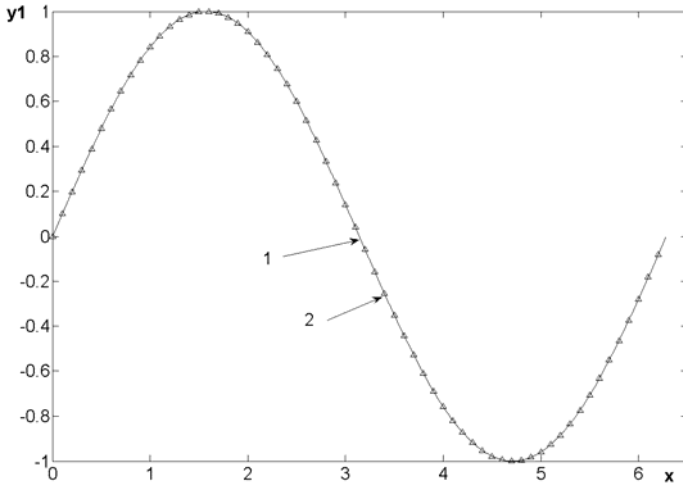
Будемо шукати розв'язок на інтервалі  $[0, 2\pi]$  з постійним кроком  $h = 0.01$ . Для наближення інтегралів скористаємося комбінацією квадратурних формул Ньютона-Котеса 8-11 порядків (НК 8-11). Час обчислень з врахуванням та без врахування виродженості ядер наведено в табл. 1. Кількість арифметичних операцій на кожному кроці за другим алгоритмом збільшується, а кількість операцій на кроці за першим алгоритмом залишається незмінною, тобто алгоритм розв'язування систем інтегральних рівнянь на основі методу вироджених ядер має високу швидкодію.

Графіки розв'язків приведені на рис. 2, рис. 3. Похибки обчислень представлені на рис. 4, рис. 5.

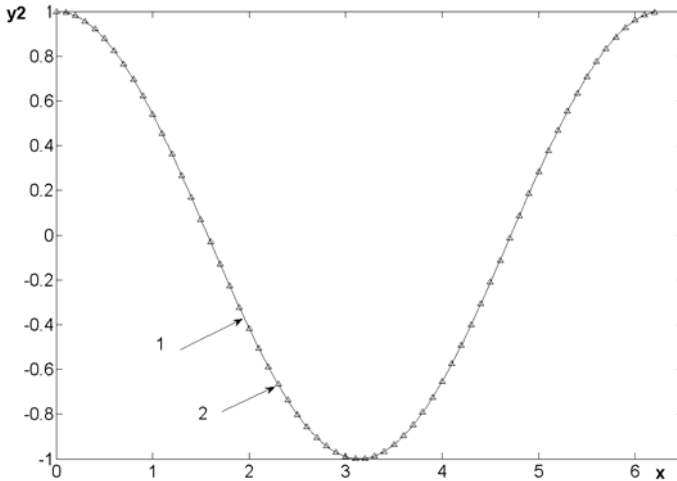
Таблиця 1

Час розв'язування СЛІР (5)

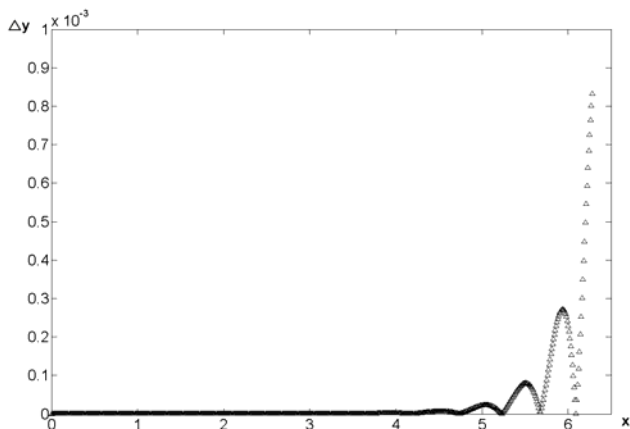
x	Час обчислень, с	
	Алгоритм розв'язування з врахуванням виродженості ядер	Алгоритм розв'язування без врахування виродженості ядер
0.5	0.160549	0.169445
1.0	0.226845	0.497500
1.5	0.306202	1.000516
2.0	0.364281	1.682330
2.5	0.445877	2.534323
3.0	0.536185	3.587879
3.5	0.625966	4.900364
4.0	0.727531	6.518855
6.0	1.186617	14.120525



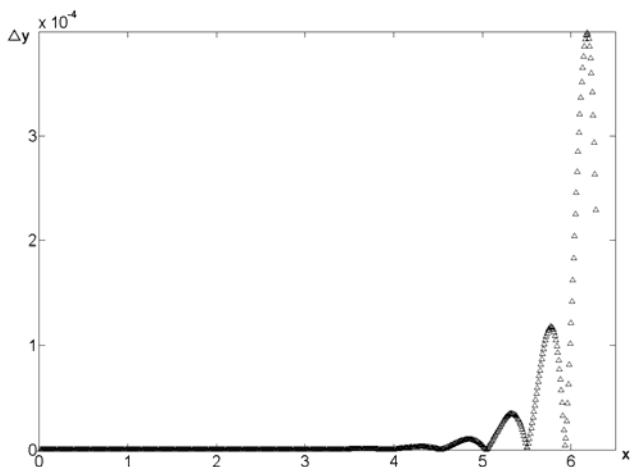
**Рис. 2.** Розв'язок СЛІР (7) методом вироджених ядер з використанням комбінації квадратурної формули НК 8-11 (для функції  $y_1$ ):  
1 — точний розв'язок, 2 — наближений розв'язок



**Рис. 3.** Розв'язок СЛІР (7) методом вироджених ядер з використанням комбінації квадратурних формул НК 8-11 (для функції  $y_2$ ):  
1 — точний розв'язок, 2 — наближений розв'язок



*Рис. 4. Абсолютна похибка розв'язку СЛІР (7) методом вироджених ядер с використанням комбінації квадратурних формул НК 8-11 (для функції  $y_1$ )*



*Рис. 5. Абсолютна похибка розв'язку СЛІР (7) методом вироджених ядер с використанням комбінації квадратурних формул НК 8-11 (для функції  $y_2$ )*

**Метод вироджених ядер стосовно системи інтегральних рівнянь Вольтера I роду.** Застосувавши метод квадратур до СЛІР Вольтерри I роду з виродженими ядрами вигляду

$$\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{p_{rj}} \alpha_{rjl}(x) \int_a^x \beta_{rjl}(s) y_j(s) ds = f_r(x), \quad r = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, p_{rj}}, \quad (8)$$

де  $m$  — порядок системи інтегральних рівнянь, отримаємо наступну СЛАР:

$$y_r^{(1)} = f_r^{(1)},$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{p_{rj}} \alpha_{rjl}^i \beta_{rjl}^i y_j^i A_i = f_1^{(i)} - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{p_{rj}} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{rjl}^k \beta_{rjl}^k y_j^k A_k, \quad (9)$$

де  $\alpha_{rjl}^i = \alpha_{rjl}(x_i)$ ,  $\beta_{rjl}^i = \beta_{rjl}(x_i)$ ,  $y_j^i = y_j(x_i)$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $A_k$  — коефіцієнти квадратурної формули,  $r = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $l = \overline{1, p_{rj}}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, i-1}$ . Розв'язок системи (9) дозволяє знайти значення  $y_r$  в точці  $x_i$ . Схема алгоритму, в основу якого покладена формула (9), представлена на рис. 6.

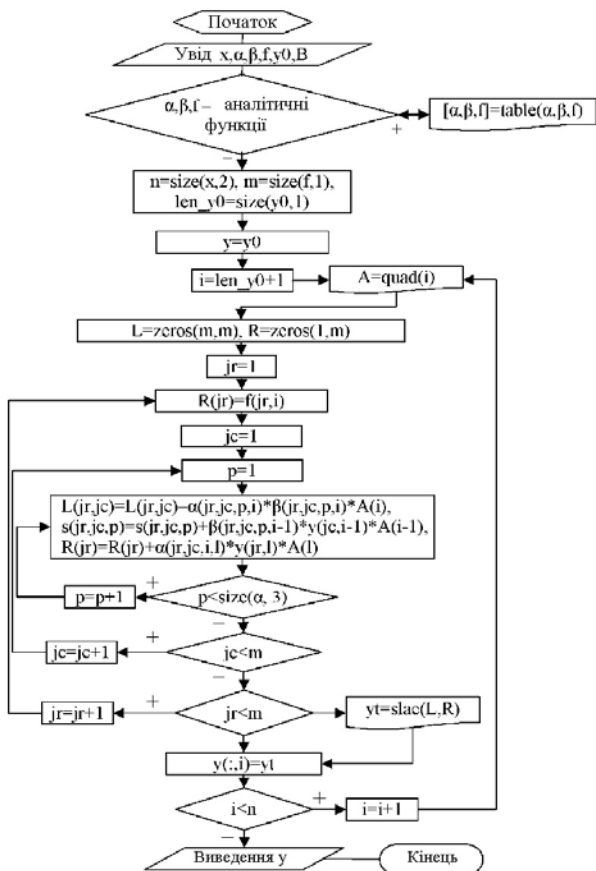


Рис. 6. Алгоритм розв'язування СЛІР Вольтерри I роду з виродженими ядрами за допомогою квадратурних формул



**Приклад 2.** Розглянемо СЛІР Вольтерри I роду вигляду

$$\begin{cases} \int_0^x (x-s)y_1(s)ds + \int_0^x (x+s)y_2(s)ds = (2x-1)\sin x + \cos x + x - 1; \\ \int_0^x (x-2s)y_1(s)ds + \int_0^x (2x-s)y_2(s)ds = (x-1)\cos x + (x-2)\sin x + x + 1; \end{cases} \quad (10)$$

з точним розв'язком

$$y_1^T(x) = \sin x, \quad y_2^T(x) = \cos x. \quad (11)$$

Ядра СЛІР є виродженими. Після перетворення отримаємо систему в наступному вигляді:

$$\begin{cases} \left[ \int_0^x y_1(s)ds + \int_0^x sy_1(s)ds - x \int_0^x y_2(s)ds - \int_0^x sy_2(s)ds \right] = \\ \quad = 2(1-x)\sin x - \cos x - x + 1; \\ \left[ x \int_0^x y_1(s)ds + 2 \int_0^x sy_1(s)ds - 2x \int_0^x y_2(s)ds + \int_0^x sy_2(s)ds \right] = \\ \quad = (2-x)\sin x + (2-x)\cos x - x - 1; \end{cases} \quad (12)$$

Для розв'язування обох рівнянь скористаємося методом трапецій. Розв'язок отримано на інтервалі  $[0, 3\pi]$  з постійним кроком  $h = 0,01$ . Час обчислень приведено в табл. 2.

Таблиця 2

Час розв'язування СЛІР (10)

x	Час обчислень, с	
	1. Алгоритм з врахуванням виродженості ядра	2. Алгоритм без врахування виродженості ядра
0.5π	0.10	1.05
1.0π	0.17	4.17
1.5π	0.24	8.48
2.0π	0.30	15.98
2.5π	0.42	25.08
3π	0.52	36.11

Отримані результати (рис. 7—10) свідчать про високу точність та швидкодію запропонованого алгоритму.

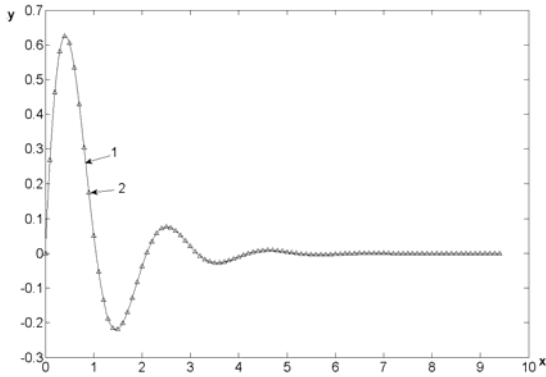


Рис. 7. Розв'язок СЛР (12) методом трапецій (для функції  $u_1$ )

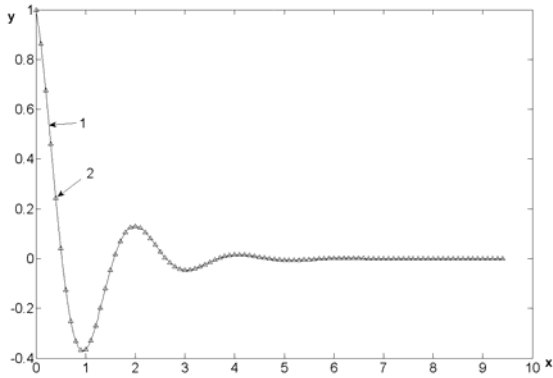


Рис. 8. Розв'язок СЛР (12) методом трапецій (для функції  $u_2$ )

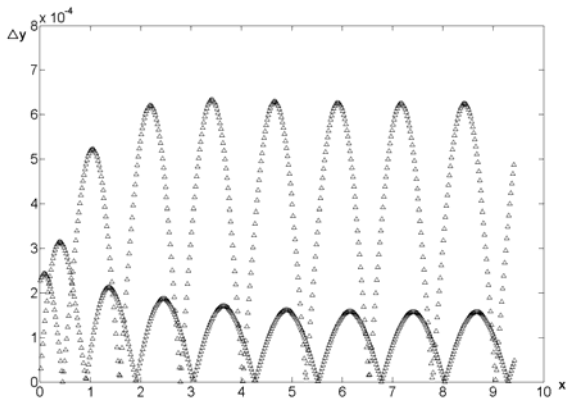
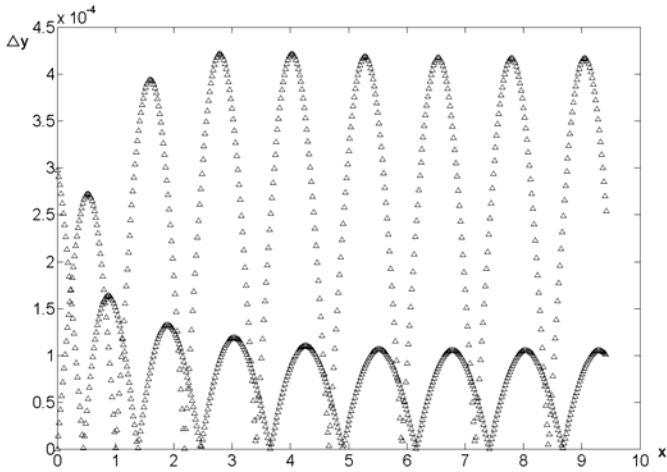


Рис. 9. Абсолютна похибка розв'язку СЛР (12) методом трапецій (для функції  $u_1$ )



*Рис. 10. Абсолютна похибка розв'язку СЛІР (12) методом трапецій (для функції  $u_2$ )*

**Висновки.** Таким чином, алгоритми розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри з виродженими ядрами володіють необхідними властивостями швидкодії для комп'ютерного моделювання багатозв'язних систем керування в реальному часі.

#### **Список використаних джерел:**

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 542 с.

In the article consider quadrature algorithm for solving systems of Volterra integral equations using the method of separable kernels. The algorithm provides a high speed computer programs in the study of multiply dynamic objects.

**Key words:** *system of integral equations, separable kernels, quadrature algorithm.*

Отримано: 09.04.2011