УДК 517.946

І. М. Конет*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. П. Ленюк,** д-р фіз.-мат. наук, професор

*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
**Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ—ЛЕЖАНДРА—ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом узагальненого скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя—Лежандра—Фур'є зі спектральними параметром одержано інтегральне зображення аналітичного розв´язку задачі дифузії на трискладовому сегменті $\left[0, R_3\right]$ полярної осі в припущенні, що межі середовища м'які по відношенню до відбиття хвиль. Моделювання дифузійних процесів виконано за допомогою гібридного диференціального оператора Бесселя—Лежандра—Фур´є.

Ключові слова: *моделювання дифузійних процесів, гібридний диференціальний оператор, власні елементи, скінченне гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії відіграють значну роль у виробничих процесах, впливають на міцність устаткування при врахуванні механічних та технологічних умов експлуатації металів і сплавів. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), r \in \left(R_0, R\right) \tag{1}$$

з відповідною початковою умовою та крайовими умовами. Потреби практики приводили до різноманітного узагальнення рівняння (1). Та в усіх випадках дифузійні процеси вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Різко змінюється картина дифузійного процесу, якщо межа середовища є м'якою відносно відбиття хвиль (в крайових операторах та операторах спряження присутня похідна за часовою зміною).

У другій половині XX-го століття для вивчення стану композитних матеріалів був розповсюджений метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик [2]. Це приводило в кожній конкретній задачі до інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку (або системи таких рівнянь) із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних. Та отримати інтегральне зображення точного аналітичного розв’язку задач цим методом, як виявилось, неможливо. Тому ми пропонуємо моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів [3; 4].

Основна частина. Побудуємо обмежений в області $D_2 = \left\{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in I_2\left(0,R_1\right) \cup \left(R_1,R_2\right) \cup \left(R_2,R_3\right); R_3 < \infty\right\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1{}^2 u_1 - a_1^2 B_{v,\alpha}\left[u_1\right] = f_1\left(t,r\right), r \in \left(0,R_1\right),\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2{}^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}\left[u_2\right] = f_2\left(t,r\right), r \in \left(R_1,R_2\right),\\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3{}^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3\left(t,r\right), r \in \left(R_2,R_3\right)\end{gathered} \tag{2}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma} u_1(t,r)\right] = 0,\ \left(L_{22}^3\left[u_3(t,r)\right]\right)\Big|_{r=R_3} = g_R\,(t) \tag{3}$$

та умовами спряження

$$L_{j1}^k\left[u_k(t,r)\right] - L_{j2}^k\left[u_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j,k = 1,2\ . \tag{4}$$

У рівняннях (2) беруть участь диференціальний оператор Бесселя $B_{v,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - \left(v^2 - \alpha^2\right)r^{-2}$ [5], узагальнений диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ [6] та диференціальний оператор Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [7], де $2\alpha+1 > 0,\ v \ge \alpha; \mu_1 \ge \mu_2 \ge 0, (\mu) = \left(\mu_1,\mu_2\right)$.

У рівностях (3), (4) беруть участь диференціальні оператори та узагальнені диференціальні оператори спряження

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; j,k = 1,2; m = \overline{1,3}.$$

Зауваження 1. Якщо початкові умови ненульові, тобто

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0} = g_j(r), r \in \left(R_{j-1},R_j\right), j = \overline{1,3},\ R_0 = 0,$$

то ми переходимо до нових функцій $v_j(t,r) = u_j(t,r) - g_j(r)$. Тоді матимемо умови

$$v_j(t,r)\big|_{t=0} = u_j(t,r)\big|_{t=0} - g_j(r) = g_j(r) - g_j(r) = 0.$$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти :

$$\alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0, \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0; \alpha_{jm}^k \geq 0,$$

$$\sigma_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, \gamma_{jm}^k \geq 0, c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0;$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, c_{j2,k} = \sigma_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \sigma_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0,$$

$$\sigma_{2j}^k \beta_{1j}^k - \sigma_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k.$$

Розв'язок задачі (2)—(4) побудуємо методом скінченного гібридного інтегрального перетворення із спектральним параметром, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta\left(R_1 - r\right)a_1^2 B_{\nu,\alpha} + \theta\left(r - R_1\right)\theta\left(R_2 - r\right)\times$$
$$\times a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta\left(r - R_2\right)\theta\left(R_3 - r\right)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}, \tag{5}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Оператор $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливих точок. Отже, його спектр дійсний та дискретний [8].

Власні елементи (власні числа та відповідні їм власні функції) ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ знайдемо як ненульовий розв'язок спектральної задачі Штурма-Ліувілля: побудувати на множині I_2 відмінний від нуля розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя, Лежандра та Фур'є

$$\left(B_{\nu,\alpha} + b_1^2\right)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in \left(0, R_1\right),$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in \left(R_1, R_2\right), \tag{6}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in \left(R_2, R_3\right)$$

з крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^\gamma V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\right] = 0, \left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_3} = 0 \tag{7}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{k}\right)V_{\upsilon,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta)-\right.$$
$$\left.\left.-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^{k}\right)V_{\upsilon,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\right|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2. \quad (8)$$

У рівностях (6)—(8) беруть участь: спектральний параметр β, компоненти $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ спектральної (власної) вектор-функції

$$V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^{3}\ \theta\left(r-R_{j-1}\right)\theta\left(R_j-r\right)V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta),R_0=0, \quad (9)$$

функції $b_j(\beta)=a_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $k_j^2\geq 0,\ j=\overline{1,3};\ \tilde{\alpha}_{jk}^{m}=\alpha_{jk}^{m}-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\sigma_{jk}^{m}$ та $\tilde{\beta}_{jk}^{m}=\beta_{jk}^{m}-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\gamma_{jk}^{m}$, $\gamma^2\geq 0,\ m=\overline{1,3};\ j,k=1,2.$

Зауваження 2. При $\sigma_{jk}^{m}=0$ та $\gamma_{jk}^{m}=0$ (для $m=\overline{1,3}, j,k=1,2$) маємо класичну задачу дифузії на спряження.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha}+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=J_{\upsilon,\alpha}\left(b_1r\right)$ та $v_2=N_{\upsilon,\alpha}\left(b_1r\right)$ [5], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)v=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $v_1=A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2=B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)[u]$, $\upsilon_2^*=-\dfrac{1}{2}+ib_2$; [6], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\dfrac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)v=0$ утворюють тригонометричні функції $v_1=\cos b_3r$ та $v_2=\sin b_3r$ [7].

Визначимо функції:

$$u_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}\left(b_1,R_1\right)=\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{1}\frac{\upsilon-\alpha}{R_1}+\tilde{\beta}_{j1}^{1}\right)J_{\upsilon,\alpha}\left(b_1,R_1\right)-\tilde{\alpha}_{j1}^{1}b_1^2R_1J_{\upsilon+1,\alpha+1}\left(b_1,R_1\right),$$

$$Y_{\upsilon_2^*;jk}^{(\mu),m1}\left(chRm\right)=\left(\tilde{\alpha}_{jk}^{m}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{jk}^{m}\right)P_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m};$$

$$Y_{\upsilon_2^*;jk}^{(\mu),m2}(chRm)=\left(\tilde{\alpha}_{jk}^{m}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{jk}^{m}\right)L_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m};$$

$$v_{jk}^{m1}\left(b_2 R_m\right) = -\tilde{\alpha}_{jk}^{m} b_3 \sin b_3 R_m + \tilde{\beta}_{jk}^{m} \cos b_3 R_m, v_{jk}^{m2}\left(b_3 R_m\right) =$$
$$= \tilde{\alpha}_{jk}^{m} b_3 \cos b_3 R_m + \tilde{\beta}_{jk}^{m} \sin b_3 R_m.$$

Якщо покласти

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha}(b_1 r),\ r \in \left(0, R_1\right),$$
$$V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 P_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr) + B_2 L_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr), r \in \left(R_1, R_2\right), \tag{10}$$
$$V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r, r \in \left(R_2, R_3\right),$$

то умови спряження (8) й крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення величин $A_j\,(j = \overline{1,3})$ та $B_k\,(k = 2,3)$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$u_{\nu,\alpha;j1}^{11}\left(b_1 R_0\right) A_1 - Y_{\nu_2^*,;j2}^{(\mu);11}\left(chR_1\right) A_2 - Y_{\nu_2^*,;j2}^{(\mu);12}\left(chR_1\right) B_2 = 0, j = 1,2;$$
$$Y_{\nu_2^*,;j1}^{(\mu),21}\left(chR_2\right) A_2 + Y_{\nu_2^*,;j1}^{(\mu),22}\left(chR_2\right) B_2 - v_{j2}^{21}\left(b_3 R_2\right) A_3 - v_{j2}^{22}\left(b_3 R_2\right) B_3 = 0; \tag{11}$$
$$v_{22}^{31}\left(b_3 R_3\right) A_3 + v_{22}^{32}\left(b_3 R_3\right) B_3 = 0.$$

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\upsilon_2^*,jk}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right) = Y_{\upsilon_2^*,j2}^{(\mu),11}\left(chR_1\right) Y_{\upsilon_2^*,k1}^{(\mu),22}\left(chR_2\right) -$$
$$- Y_{\upsilon_2^*,j2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right) Y_{\upsilon_2^*,k1}^{(\mu),21}\left(chR_2\right); j,k = 1,2;$$
$$\sigma_{j2}\left(b_3 R_2, b_3 R_3\right) = v_{j2}^{21}\left(b_3 R_2\right) v_{22}^{32}\left(b_3 R_3\right) - v_{j2}^{22}\left(b_3 R_2\right) v_{22}^{31}\left(b_3 R_2\right), j = 1,2;$$
$$a_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) = u_{\upsilon,\alpha;11}^{11}\left(b_1 R_1\right) \delta_{\upsilon_2^*,2j}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right) -$$
$$- u_{\upsilon,\alpha;21}^{11}\left(b_1 R_1\right) \delta_{\upsilon_2^*,1j}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right), j = 1,2.$$

Алгебраїчна система (11) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю [9]:

$$\delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta) \equiv \delta_{22}\left(b_3 R_2, b_3 R_3\right) a_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta) - \delta_{12}\left(b_3 R_2, b_3 R_3\right) a_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta) = 0. \tag{12}$$

Таким чином, ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$.

Підставимо $\beta_n = \beta\ (b_{jn} = b_j(\beta_n))$ в алгебраїчну систему (11) і відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності.

При $A_1 \neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2 :

$$Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu)11}\left(chR_1\right) A_2 + Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right) B_2 =$$
$$= A_1 u_{\nu,\alpha;j1}^{11}\left(b_{1n} R_1\right), \upsilon_{2n}^* = -\frac{1}{2} + i b_{2n}; j = 1,2 \tag{13}$$

Визначник алгебраїчної системи (13)

$$q_{(\mu)}(\beta_n) \equiv Y^{(\mu),11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12} Y^{(\mu),12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22} - Y^{(\mu),11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22} Y^{(\mu),12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12} = \frac{c_{21}}{shR_1} \frac{1}{S_{(\mu)}\left(b_{2n}\right)} \neq 0,$$

$$S_{(\mu)}(b_{2n}) = \frac{2^{\mu_1}\pi^3 \cos\mu_1\pi}{2^{\mu_2}\left(\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi ch\left(2\pi b_{2n}\right)\right)} \cdot \left(\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ib_{2n} + \upsilon_{12}^{+}\right)\right|^2\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ib_{2n} + \upsilon_{12}^{-}\right)\right|^2\right)^{-1}, \; \upsilon_{12}^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\mu_1 \pm \mu_2\right).$$

Алгебраїчна система (13) має єдиний розв’язок [9]:

$$A_2 = \frac{A_1}{q_{(\mu)}(\beta_n)} \left[u^{11}_{\nu,\alpha;11}\left(b_{1n}R_1\right) Y^{(\mu);2}_{\overset{*}{\nu}_2,;22}\left(chR_1\right) - u^{11}_{\nu,\alpha;21}\left(b_{1n}R_1\right) Y^{(\mu);12}_{\overset{*}{\nu}_2,;12}\left(chR_1\right) \right],$$

$$B_2 = +\frac{A_1}{a_{(\mu)}(\beta_n)} \left[-u^{11}_{\nu,\alpha;11}\left(b_{1n}R_1\right) Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_2,;22}\left(chR_1\right) + u^{11}_{\nu,\alpha;21}\left(b_{1n}R_1\right) Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_2,;12}\left(chR_1\right) \right]. \quad (14)$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно невідомих A_3, B_3 :

$$v^{21}_{j2}\left(b_{3n}R_2\right) A_3 + v^{22}_{j2}\left(b_{3n}R_2\right) B_3 = -A_1 \left[q_{(\mu)}\left(\beta_n\right) \right]^{-1} a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(\beta_n), \, j = 1,2 \quad (15)$$

Визначник алгебраїчної системи (15)

$$v^{21}_{12}\left(b_{3n}R_2\right) v^{22}_{22}\left(b_{3n}R_2\right) - v^{21}_{22}\left(b_{3n}R_2\right) v^{22}_{12}\left(b_{3n}R_2\right) B_3 = c_{22} b_{3n} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (15) має єдиний розв’язок [9]:

$$A_3 = \omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}\left(\beta_n\right), \; B_3 = -\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(\beta_n\right), \; A_1 = q_{(\mu)}\left(\beta_n\right) c_{21} b_{3n} \neq 0;$$

$$\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}\left(\beta_n\right) = a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}\left(\beta_n\right) v^{2j}_{12}\left(b_{3n}R_2\right) - a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(\beta_n\right) v^{2j}_{22}\left(b_{3n}R_2\right), \, j = 1,2. \quad (16)$$

Підставимо в рівності (10) визначені A_j та B_k згідно формул (14) та (16). Отримуємо функції:

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(r,\beta_n\right) = q_{(\mu)}\left(\beta_n\right) c_{22} b_{3n} J_{\nu,\alpha}\left(b_{1n}r\right),$$

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,\beta_n) = c_{22} b_{3n} \Big[u^{11}_{\nu,\alpha;21}\left(b_{1n}R_1\right) f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12}\left(chR_1, chr\right) -$$

$$- u^{11}_{\nu,\alpha;11}\left(b_{1n}R_1\right) f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22}\left(chR_1, chr\right) \Big],$$

$$f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};j2}\left(chR_1, chr\right) = Y^{(\mu),11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};j2}\left(chR_1\right) B^{(\mu)}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n}}(chr) -$$

$$- Y^{(\mu),12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};j2}\left(chR_1\right) A^{(\mu)}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n}}(chr); \, j = 1,2;$$

$$V^{(\mu),11}_{\upsilon,\alpha;3}\left(r,\beta_n\right) = \omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}\left(\beta_n\right) \cos b_{3n} r - \omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(\beta_n\right) \sin b_{3n} r \quad (17)$$

Згідно з формулою (9) власна вектор-функція $V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ стає відомою.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}, \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{1}{shR_2}, \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\begin{gathered}\sigma(r) = \theta(r)\theta\left(R_1 - r\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta\left(r - R_1\right)\times \\ \times\theta\left(R_2 - r\right)\sigma_2 shr + \theta\left(r - R_2\right)\theta\left(R_3 - r\right)\sigma_3\end{gathered} \tag{18}$$

та квадрат норми власної функції [10]

$$\left\|V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\right\|_1^2 = \int_0^{R_3}\left[V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr + G_2\left(\beta_n,\beta_n\right). \tag{19}$$

Згідно з роботою [10] наведемо потрібні в нашому випадку твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система $\left\{V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій узагальнено ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$ на множині I_2, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) = \left\{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\right\}$ з області визначення ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ зображається за системою $\left\{V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{R_3} g(\rho)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(\rho,\beta_n\right)\sigma(\rho)d\rho\frac{V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{\nu,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|_1^2}. \tag{20}$$

Ряд Фур'є (20) визначає пряме $H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ узагальнене скінченне гібридне інтегральне перетворення (УСГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[g(r)\right] = \int_0^{R_3} g(r)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{21}$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-(\mu)}\left[\tilde{g}_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1}\equiv g(r). \qquad (22)$$

Визначимо ще величини та функції:

$$d_1=\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}:c_{11,1}, d_2=\sigma_2 shR_2:c_{11,2},$$

$$\tilde{g}_{1n}=\int_0^{R_2}g_1(r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma_1 r^{2\alpha+1}dr,$$

$$\tilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma_2 shrdr,\ \tilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma_3 dr,$$

$$Z_{\upsilon,\alpha;j2}^{(\mu),k}\left(\beta_n\right)=\left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^k\right)V_{\upsilon,\alpha;k+1}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\Big|_{r=R_k};j,k=1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{B_{\nu,\alpha}\left[g_1(r)\right];\Lambda_{(\mu)}\left[g_2(r)\right];g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma}g_1(r)\right]=0,\ \left(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^3\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R \qquad (23)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk};j,k=1,2, \quad (24)$$

то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$\begin{gathered}H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}\left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}\left[g(r)\right]\right]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+\left(\tilde{\alpha}_{22}^3\right)^{-1}V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}\left(R_3,\beta_n\right)\sigma_3 g_R+\\ \sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}\left(\beta_n\right)\omega_{2k}-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}\left(\beta_n\right)\omega_{1k}\right].\end{gathered} \qquad (25)$$

Формули (21), (22), (25) складають математичний апарат для розв´язання задачі дифузії (2)—(4).

Запишемо систему (2) й нульові початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1{}^2-a_1^2B_{\nu,\alpha}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2{}^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3{}^2-a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix};\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \qquad (26)$$

Інтегральний оператор $H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ згідно правила (21) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[...]=\left[\int_0^{R_1}...V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma_1 r^{2\alpha+1}dr\int_{R_1}^{R_2}...V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma_2 shrdr\times\right.$$
$$\left.\times\int_{R_2}^{R_3}...V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\sigma_3 dr\right]. \tag{27}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (27) до задачі (26) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (25) одержуємо задачу Коші

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt}+\omega_n^2\tilde{u}_n(t)=\tilde{F}_n(t),\tilde{u}_n=\Big|_{t=0}=0,$$
$$\omega_n^2=\beta_n^2+q^2,q^2=\max\left\{\gamma_1{}^2;\gamma_2{}^2;\gamma_3{}^2\right\}, \tag{28}$$

де

$$\tilde{F}_n(t)=\tilde{f}_n(t)+\left(\tilde{\alpha}_{22}^3\right)^{-1}V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(R_3,\beta_n\right)\sigma_3 g_R(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}\left(\beta_n\right)\omega_{2k}(t)-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}\left(\beta_n\right)\omega_{1k}(t)\right].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (28) є функція

$$\tilde{u}_n(t)=\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\tilde{F}_n(\tau)d\tau\ . \tag{29}$$

Оператор $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ згідно правила (22) як обернений до (27), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[...]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{n=1}^{\infty}..V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}..V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}..V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1}\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (30) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (29). У результаті низки елементарних перетворень отримуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (2)—(4):

$$u_j(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(t)V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}H_{\nu,(\alpha);jk}^{(\mu)}\left(t-\tau,r,\rho\right)\times$$

$$\times f_k(\tau,\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau+\int_0^t W_{\nu,(\alpha);3j}^{(\mu)}\left(t-\tau,r\right)g_R(\tau)d\tau\Big]+ \qquad (31)$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\int_0^t\Big[R_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),kj}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-$$

$$-R_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),kj}\left(t-\tau,r\right)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau,\ j=\overline{1,3},$$

де $R_0=0,\varphi_1(r)=r^{2\alpha+1},\varphi_2(r)=shr,\varphi_3(r)=1$.

У формулі (31) беруть участь головні розв’язки параболічної крайової задачі:

1) породжені неоднорідністю системи (2) функції впливу

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}\left(t,r,\rho\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)V_{\upsilon,\alpha;k}^{(\mu)}\left(\rho,\beta_n\right)\times$$

$$\times\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1},\ j,k=\overline{1,3}; \qquad (32)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}\frac{V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(R_3,\beta_n\right)}{\tilde{\alpha}_{22}^3\left\|V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\right\|_1^2}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right),\ j=\overline{1,3}; \qquad (33)$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),kj}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}\left(\beta_n\right)V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\times$$

$$\times\left(\left\|V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(r,\beta_n\right)\right\|_1^2\right)^{-1};\ i,k=1,2,\ j=\overline{1,3}. \qquad (34)$$

Зауваження 3. Якщо $q^2=\gamma_1^2>0$ то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge 0$; якщо $q^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\ge 0$; якщо $q^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$.

Зауваження 4. Якщо $u_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0}=g_j(r)\neq 0$, то у формулі (31) будуть присутні доданки

$$W_{\upsilon,\alpha;3j}^{(\mu)}(t,r)g_R^* + \sum_{k=1}^{2} d_k\left[R_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu),kj}(t,r)\omega_{2k}^* - R_{\upsilon,\alpha;22}^{(\mu),kj}(t,r)\omega_{1k}^*\right].$$

Тут прийняті позначення:

$$g_R^* = \sigma_{22}^3 g_3'\left(R_3\right) + \gamma_{22}^3 g_3(R), \omega_{jk}^* = \delta_{j1}^k g_k'\left(R_k\right) +$$

$$+\gamma_{j1}^k g_k\left(R_k\right) - \left[\delta_{j1}^k g_{k+1}'\left(R_k\right) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}\left(R_k\right)\right], j,k=1,2.$$

Так через початкові умови ми відчуваємо м'якість межі середовища. Якщо межа середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль $(\delta_{jk}^m = 0, \gamma_{jk}^m = 0)$, то $g_R^* = 0$ та $\omega_{jk}^* = 0$.

Висновки. Одержані функції $u_j(t,r)$ поліпараметричні. Це дозволяє вибором параметрів виділяти безпосередньо із загальних структур будь-який частковий випадок (у рамках даної моделі). Нарешті, отриманий розв'язок задачі дифузії носить алгоритмічний характер. Це дає змогу застосувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра—Фур'є—Фур'є на сегменті $\left[R_0;R_3\right]$ полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету. Серія Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т, 2008. — Вип. 1. — С. 126—133.
4. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра—Фур'є—Лежандра на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 119—136.
5. Ленюк М. П. Исследование основних краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. – 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
6. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.

8. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
10. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Випуск 314—315. — С. 105—113.

The method of generalized finite hybrid integral transformation of the Bessel—Fourier—Legendre spectral parameter obtained from the integral image of the analytical solution of diffusion problem on a three-segment $\left[0, R_3\right]$ polar axis in the assumption that the limits of soft environment in relation to wave reflection. Simulation of diffusion processes is made using hybrid differential Bessel—Fourier—Legendre.

Key words: *simulation of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transformation, the basic identity, the key solutions.*

Отримано: 14.04.2011

УДК 519.642.5

О. М. Корнєєв*, асистент,
В. А. Федорчук,** д-р техн. наук

*Хмельницький національний університет, м. Хмельницький,
**Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КВАДРАТУРНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ З ВИРОДЖЕНИМИ ЯДРАМИ

У роботі розглянуто квадратурний алгоритм розв'язування систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри з використанням методу вироджених ядер. Алгоритм забезпечує високу швидкодію комп'ютерних програм при дослідженні багатозв'язних динамічних об'єктів.

Ключові слова: *система інтегральних рівнянь, вироджене ядро, квадратурний алгоритм.*

Вступ. При проектуванні швидкодіючих високоточних керованих багатозв'язних електромеханічних систем мехатронного типу виникає задача синтезу обчислювально-керуючої підсистеми, характерною рисою якої є залучення в алгоритми керування математичних моделей об'єктів керування. Традиційно математичні моделі багатозв'язних систем подаються у вигляді систем диференціальних рівнянь, однак при їх