

УДК 519.6

О. М. Слупко*, аспірант,**Я. Г. Савула****, д-р. фіз.-мат. наук,**Т. І. Мандзак****, канд. фіз.-мат. наук,**Л. М. Дяконюк****, канд. фіз.-мат. наук

*Волинський національний університет ім. Лесі Українки, м. Луцьк,

**Львівський національний університет ім. Івана Франка, м. Львів

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НАПІРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ У ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ВКЛЮЧЕННЯМИ

Побудовано математичну модель, яка описує процес напірної фільтрації у пористому середовищі з включеннями. Проведено низку розрахунків і досліджено залежність тиску та швидкості руху рідини при різних показниках напору і коефіцієнта фільтрації. Подано і проаналізовано результати обчислювальних експериментів з визначенням тиску і швидкості руху рідини в рамках запропонованої моделі. На основі одержаних результатів зроблено висновок про застосовність сформульованої моделі.

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання, рух рідини, напірна фільтрація, включення, тонкий канал, рівняння Нав'є-Стокса, н'езометричний напір.*

1. Вступ

Комп'ютерне моделювання явищ переносу, яке інтенсивно розвивається останнє десятиліття у зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки, активно застосовується у гідрології, інженерії довкілля, хімічній інженерії, нафтовидобувній промисловості, інженерії тканин, медицині. Різноманітні аспекти математичного моделювання та числового аналізу процесів перенесення в таких середовищах розглянуто, зокрема, в роботах [1—4], де значна увага зосереджена на теоретичному обґрунтуванні запропонованих математичних моделей та числових підходів. Для врахування складніших розподілів швидкостей необхідно доповнити відповідні математичні моделі рівняннями теорії фільтрації, адаптованими до наявності тонких включень чи каналів. Метою цієї праці є висвітлення результатів комп'ютерного моделювання процесу фільтрації гравітаційної рідини у пористому середовищі з включеннями, у яких відбувається протікання рідини і аналіз отриманих результатів.

2. Концептуальна модель

Сформулюємо основні положення, які стосуються розглянутого в даній роботі неоднорідного середовища та процесів, які в ньому

протікають. Під неоднорідним середовищем в контексті даної роботи розуміємо обмежене проникне тіло з включеннями, включенням називається тонкий канал в якому відбувається протікання рідини. Тіло є однорідним (рис. 1), середовище повністю насичене рухомим однокомпонентним розчином рідини. У включеннях відбувається рух однорідної, нев'язкої, ізотропної рідини, яка є нестисливою і ідеальною. Тобто ми будемо розглядати рідину, яка має назву гравітаційна вода (грунтова вода) — це вода вільна, не залежна від сил притягання до поверхні твердих частинок. Вона переміщається під впливом сили тяжіння, в ній діє лише гідродинамічний тиск. Поле швидкостей руху розчину вільне від стиску та обертання, тобто потік є нестисливим та ламінарним. Контакт між тілом і включеннями є ідеальним. Наявність додаткових джерел чи стоків, неізотермічних, хімікобіологічних чи міжфазних процесів не передбачається.

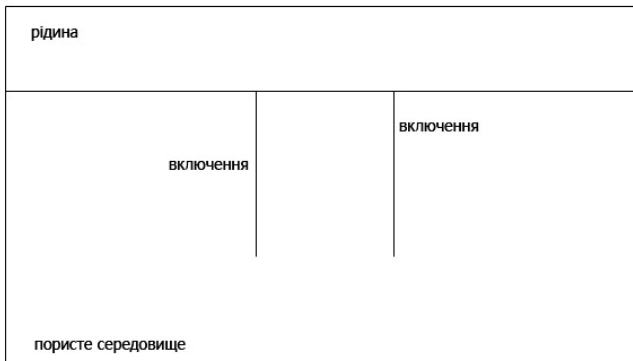


Рис. 1. Пористе середовище з включеннями

Опис основних математичних співвідношень, які використанні для побудови моделі руху рідини в середовищі і у включеннях, описані в роботі [5].

3. Математичне формулювання задач

Розглянемо процес фільтрації в області Ω з тонким каналом (рис. 2). Область Ω складається з підобласті Ω_F , яка заповнена рідиною і Ω_p .

Вздовж внутрішньої лінії Γ_1 розміщено тонкий канал (надалі товщиною каналу нехтуємо). Позначимо Γ_2 — границя між рідиною і пористим середовищем, $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ — непроникні границі, Γ_8 — проникна границя, через яку відбувається витік рідини під власною вагою, H — висота стовпа рідини, k — коефіцієнт фільтрації в Ω_p .



Рис. 2. Пористе середовище з включенням

Для опису процесу фільтрації у пористому середовищі, що містить канал, розглянемо п'єзометричний напір

$$h = \frac{p}{\rho g} + x_3, \quad (1)$$

Значення напору в Ω_F і вздовж каналу Γ_1 знайдемо з рівнянь Нав'є-Стокса для нев'язкої рідини, в якому знехтували нелінійними щодо витрат доданками, та рівняння нерозривності для нестисливої рідини для випадку, коли рух відбувається лише вздовж осі x_3 . Знайдене значення напору

$$h = H \quad (2)$$

При цьому зауважимо, що розглядається усталений за часом процес, а також припустили, що рух рідини відбувається лише вздовж осі x_3 .

На границі витоку рідини Γ_8 швидкість фільтрації рівна k (рідина рухається лише під власною вагою).

Враховувши всі вище зазначені умови, отримаємо математичну модель для знаходження п'єзометричного напору, який в Ω_p задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3)$$

та граничним умовам

$$h = H \text{ на } \Gamma_1, \Gamma_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0 \text{ на } \Gamma_4, \Gamma_5, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \text{ на } \Gamma_6, \Gamma_7, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = 1 \text{ на } \Gamma_8. \quad (7)$$

Знайшовши значення напору, отримаємо опис руху рідини згідно закону Дарсі

$$u = -k \text{ grad}(h), \quad (8)$$

де u — вектор швидкостей.

Теорія поширюється на область Ω_p , яка містить декілька включень. Числові розрахунки проведені для пористого середовища з двома тонкими каналами (рис. 3).

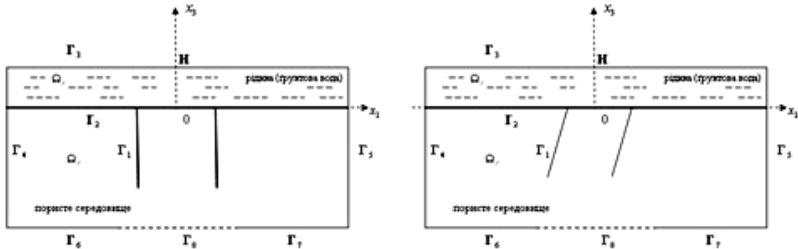


Рис. 3. Пористе середовище з двома тонкими каналами

Для числового дослідження запропонованої математичної моделі використовуємо метод скінченних елементів з трикутними елементами.

4. Результати числового аналізу

Наведемо результати числового аналізу математичної моделі (3)—(8). Результати обчислень тиску і швидкості фільтрації рідини подані у вигляді малюнків. Знайшовши розподіл h в області $\Omega_p = (0; 2) \times (0, 1)$ за довжиною кожного з каналів 0,6 м., поле швидкостей u і поле тиску p знаходимо згідно формул поданих в [5]. Розв'язок будувався на області яка складається з 350 скінченних трикутних елементів.

Подамо нижче результати розрахунків розподілу тиску і поля швидкостей для різних коефіцієнтів фільтрації k і висоти стовпа води H .

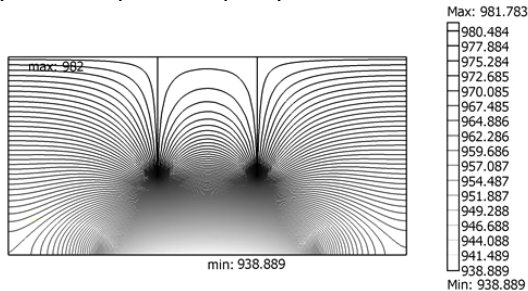


Рис. 4. Розподіл тиску для $k = 0.01$ м/с; $H = 0.1$ м ($P, [1 \text{ Pa}]$)

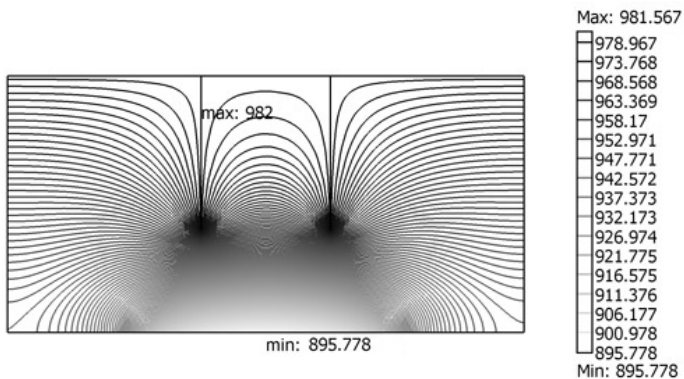


Рис. 5. Розподіл тиску для $k = 0.02$ м/с; $H = 0.1$ м (P , [1 Pa])

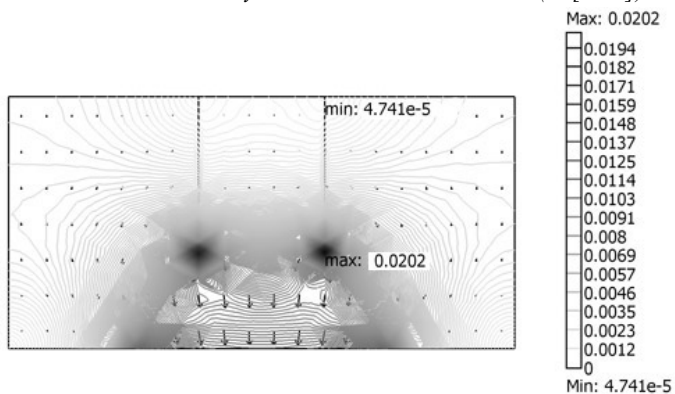


Рис. 6. Поле швидкостей для $k = 0.01$ м/с; $H = 0.1; 1$ м (u , [1 m/s])

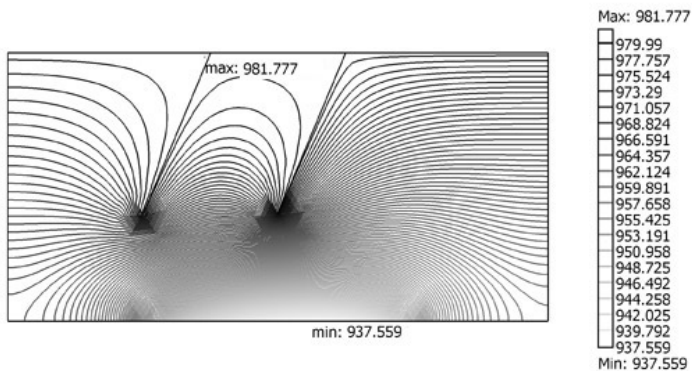


Рис. 7. Розподіл тиску для $k = 0.01$ м/с; $H = 0.1$ м (P , [1 Pa])

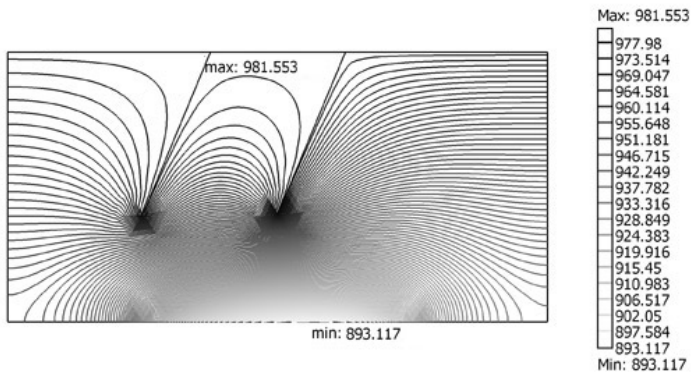


Рис. 8. Розподіл тиску для $k = 0.02$ м/с; $H = 0.1$ м (P , [1 Pa])

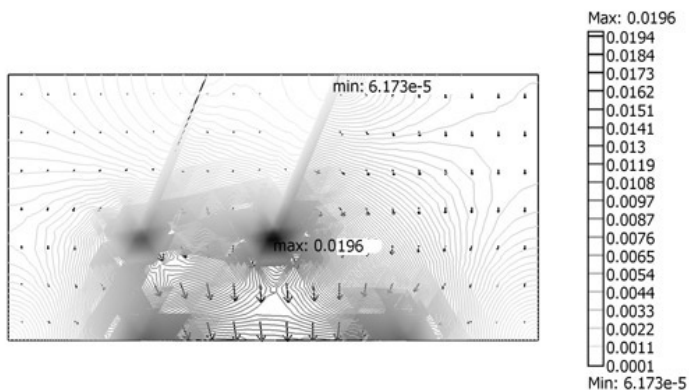


Рис. 9. Поле швидкостей для $k = 0.01$ м/с; $H = 0.1; 1$ м (u , [1 m/s])

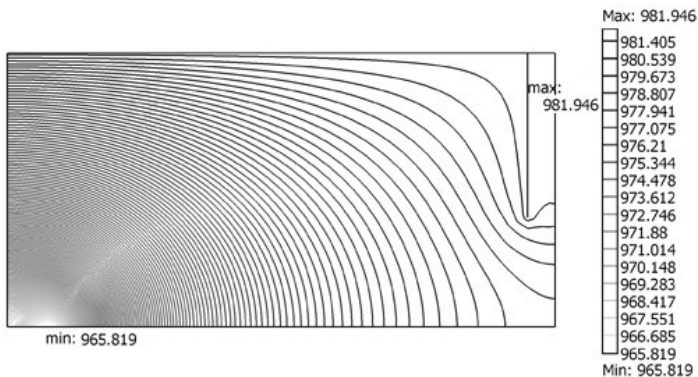


Рис. 10. Розподіл тиску для $k = 0.01$ м/с; $H = 0.1$ м (P , [1 Pa])

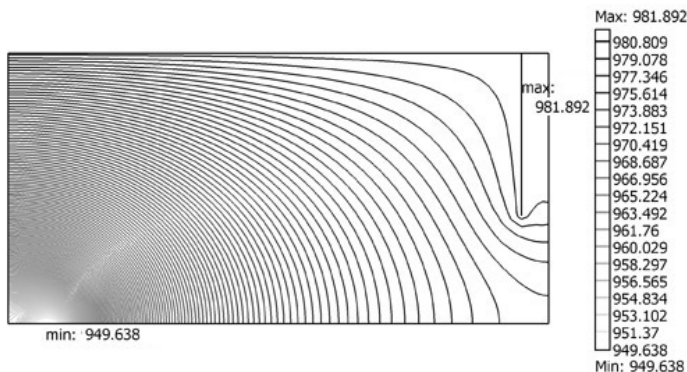


Рис. 11. Розподіл тиску для $k = 0.02$ м/с; $H = 0.1$ м (P , [1 Pa])

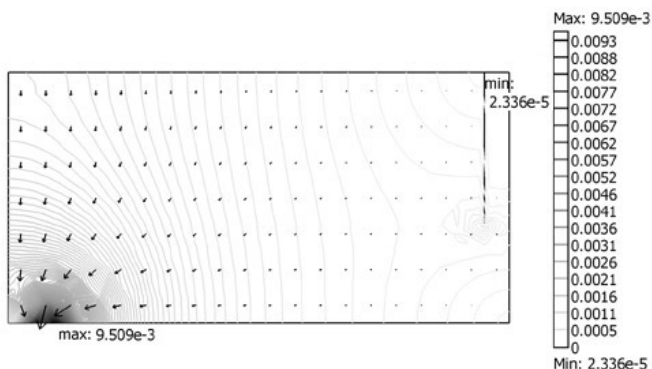


Рис. 12. Поле швидкостей для $k = 0.01$ м/с; $H = 0.1$; l м (u , [1 m/s])

Як бачимо з отриманих результатів, для різних показників коефіцієнта фільтрації і сталого показника висоти стовпа рідини змінюється розподіл тиску в середовищі, а при сталому коефіцієнті фільтрації і різних показниках H швидкість залишається незмінною. Аналогічні висновки були отримані для неоднорідного середовища з одним включенням. Для даної задачі розглянуто конкретно визначені показники початкового напору і коефіцієнта фільтрації, але дана модель може бути застосована також і для інших вхідних даних.

5. Висновки

В даній роботі сформульовано математичну модель пористого середовища з включеннями. Отримано і подано у вигляді рисунків дані розрахунків задач на визначення тиску і швидкості рідини, які відповідають фізиці відповідних процесів. За допомогою числових експериментів здійснено аналіз отриманих результатів.

Список використаних джерел:

1. Буряк Я. Й. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Буряк, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний. — Львів : Сполом, 2004. — 264 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 605 с.
3. Мандзак Т. І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула // НАН України. Центр математичного моделювання Ін-ту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстигача. — Львів : Сплاین, 2009. — 148 с.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М. : Недра, 1977. — 664 с.
5. Слупко О. М. Моделювання процесу руху гравітаційної води у пористому середовищі з каналом / О. М. Слупко, Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика 2009. — Вип. 15.

Built a mathematical model, which describes motion of pressure filtration in a porous environment with including. The row of calculations and investigational dependence of pressure and velocity of fluid is conducted for different indexes of pressure and coefficient of filtration. The results of calculable experiments are given and analysed from determination of pressure and velocity of fluid within the framework of the offered model. On the basis of the got results a conclusion is done about applicability of the formulated model.

Key words: *computer modeling, motion of fluid, pressure filtration, including, thin channel, equalization of Navie-Stokes, piezometer pressure.*

Отримано: 17.09.2010

УДК 620.1.08:681.02.08

М. Ф. Сопель, канд. техн. наук

Институт электродинамики НАН Украины, г. Киев

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖПОВЕРОЧНЫХ ИНТЕРВАЛОВ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Рассматривается статистический метод расчета межпове- рочных интервалов, позволяющий по имеющимся у разработ- чика системы исходным данным в виде заданных интервалов ошибок измерительных средств определить ошибки контроля первого и второго рода.

Ключевые слова: *оптимизация, межпове- рочный интер- вал, статистический метод.*

Введение. При разработке (проектировании) автоматизированной системы контроля (АСК) необходимо решать задачу выбора межпове- рочных интервалов для средств измерения входящих в систему. В ра-