

УДК 519.6

Л. А. Митько, канд. физ.-мат. наук

Институт проблем моделирования в энергетике

им. Г.Е. Пухова НАН Украины, г. Киев

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОГО МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Рассматривается применение метода сопряженных градиентов для решения самосопряженных задач эллиптического типа второго порядка в представлении конечными элементами. Метод приводит к снижению вычислительных трудностей по сравнению с прямыми методами, в том числе по отношению к методу исключения Гаусса, и, кроме того, его применение позволяет понизить влияние накопления ошибки округления.

Ключевые слова: системы уравнений, метод сопряженных градиентов, конечные элементы, точность, невязка.

Представим систему линейных уравнений в частных производных эллиптического типа в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$K_h U_h = f_h \quad (1)$$

с лангранжеаном конечных элементов, соответствующим сетке конечных элементов с параметром сетки h (предполагается использование улучшенной сетки по сравнению с грубой сеткой, соответствующей, например, $h = 1$). Как известно, ошибка полученного решения \tilde{U}_h состоит из ошибок округления и ошибок аппроксимации.

Можно заметить, что при $h \rightarrow 0$ полная ошибка сначала падает, поскольку ошибка аппроксимации стремится к нулю, однако, для достаточно малых значений h полная ошибка может нарастать, если, например, при решении системы уравнений (1) использовать метод исключения Гаусса. Причина состоит в том, что ошибки округления в процессе вычислений и ошибки компьютерного представления данных K_h и f_h , вообще, накапливаются в решении \tilde{U}_h , по крайней мере, при числе обусловленности $H_h = \|K_h\| \|K_h^{-1}\|$ порядка K_h .

Эффект накопления может быть объяснен в рамках анализа ошибок [1], т. е. связью ошибок процесса вычислений с ошибками в исходных данных. Известно, что в задачах второго порядка H_h при $h \rightarrow 0$ убывает как $O(h^{-2m})$.

Рассмотрим метод решения эллиптической задачи второго порядка, основанный на специальном применении предварительно обусловленного метода сопряженных градиентов (ПОСГ), который обладает высокой устойчивостью (слабо зависят от накопления ошибки округления при $h \rightarrow 0$). Для данного метода сложность вычислений имеет порядок

$O(h^{-n})$ при запоминании информации и $O(h^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \ln h^{-1})$ — при вычислении арифметических операций, где n — размерность пространства. Рассматриваемый метод является итерационным с низким порядком вычислительной сложности для решения широкого круга задач при представлении лагранжиана конечными элементами.

В дальнейшем норму вектора будем обозначать l_2 — нормой; норму матрицы — нормой связи (спектральной нормой). Внутреннее произведение l_2 будем обозначать (\cdot, \cdot) .

Выбор сетки и метод ПОСГ. Построение метода начнем с выбора сетки для треугольных или прямоугольных элементов, с параметром сетки $2h$, и, затем, решение уравнения в конечных элементах $K_{2h^{(1)}} U_{2h} = f_{2h^{(1)}}$ или $K_{2h^{(2)}} U_{2h} = f_{2h^{(2)}}$, например, методом ПОСГ. Здесь верхние индексы (1) и (2) обозначают аппроксимации конечными элементами, кусочно-линейными или квадратичными, соответственно. Будем рассматривать только два этих вида аппроксимации, хотя общие соображения остаются верными и для аппроксимаций более высокого порядка.

Предлагаемое изменение сетки состоит в том, что грани каждого элемента разделены на две равные части (рис. 1). Приближенное решение U_{2h} линейно интерполируется в средней точке, и результирующий вектор $U_{h^{(0)}}$, соответствующий узловым точкам на Ω_h , берется в дальнейшем в качестве начального приближения для итерационного процесса.

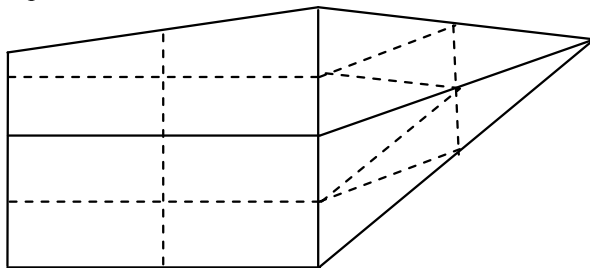


Рис.1. Однородно разделенная сетка. Сплошные линии — сетка Ω_{2h} , пунктирные линии — сетка Ω_h .

Теперь будем считать, что C_k являются коэффициентами модифицированного неполного разложения Холецкого (МНРХ) [2] и будем решать уравнения $K_{h^{(2)}} U_{\sim h^{(2)}} = f_{\sim h^{(2)}}$ с помощью итераций по методу сопряженных градиентов ПОСГ:

$$\begin{aligned} r_h^{(s)} &:= K_{h^{(2)}} U_{\sim h}^{(s)} - f_{\sim h^{(2)}}, \\ d_h^{(s)} &:= -C_h^{-1} r_h^{(s)} + \beta_S d_h^{(s-1)}, \\ U_{\sim h}^{(s-1)} &:= U_{\sim h}^{(s)} + \lambda_S d_h^{(s)}, \\ s &= 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{2}$$

где β_s ($\beta_0 = 0$) и λ_s определяются из обычного внутреннего произведения. Итерационный процесс заканчивается, если невязки $\|r^{(s)}\| < \varepsilon_h^6$, где ε — произвольно выбранный параметр. В этом случае ошибка в решении при итерациях имеет тот же самый порядок $O(h^4)$, что и ошибка аппроксимаций, если при этом предполагается, что функция и граничные условия таковы, что решение является локально гладким. Как мы далее увидим, полная ошибка при использовании устойчивого метода будет иметь порядок $O(\delta) + O(h^4)$, $h \rightarrow 0$, где δ — компьютерная точность числа.

Заметим, что в системе уравнений (2) невязки вычисляются по своей, отдельной формуле. Хорошо известно, что это приводит к вычислению произведения матрицы на вектор на каждом шаге (при сохранении в памяти одного вектора), в отличие от метода, в котором эти невязки вычисляются рекурсивным способом [3; 4].

Использование отдельной формулы для невязок является принципиальным моментом, поскольку именно применение специальной формулы при достаточно быстром итерационном процессе позволяет избежать накопления ошибки округления. При этом в алгоритме сопряженных градиентов используется итерационное приближение аналогично работе [5]. Однако, в рассмотренных ниже примерах величина ошибки округления настолько мала, что нет необходимости выполнять итерационный процесс.

Известно [4], что если при решении системы уравнений (2) использовать следующий критерий останова счета $\|r^{(s)}\|_{K_h} \leq \varepsilon_o \|r^{(0)}\|_{K_h}$, то число итераций ограничивается числом:

$$S^* = \operatorname{int}_I \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{H_0} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon_0} \right) + I \right\}, \quad (3)$$

где I — целая часть, а $H_0 = H \left(C_h^{-\frac{1}{2}} K_h C_h^{-\frac{1}{2}} \right)$ и $\|\bullet\|^2 K_h = \left(\left(K_{h^{(2)}} \right)^{-1} \dots \right)$.

Следовательно, в l_2 -норме относительная ошибка невязки снижается, по крайней мере, в $\varepsilon_0 \sqrt{H_0}$ раз за S^* итераций. Далее увидим, что хотя C_h получены из более простой матрицы $K_{h^{(1)}}$, ведут они себя в соответствии с $K_{h^{(2)}}$, поскольку для $h \rightarrow 0$, $H_0 = O(h^{-1})$.

Скорость сходимости метода ПОСГ. В [5] показано, что $H_0 = H \left(C_h^{-\frac{1}{2}} K_{h^{(1)}} C_h^{-\frac{1}{2}} \right) = O(h^{-1})$, если C_h являются коэффициентами разложения МПРХ функций $K_{h^{(1)}}$. Здесь мы также предполагаем, что $K_{h^{(1)}}$ является доминирующей диагональной матрицей, которая, например, соответствует случаю, когда в конечном элементе (треугольнике) все углы $\leq \pi/2$. Доминирующая диагональность означает, что разложение $K_{h^{(1)}}$ является устойчивым. Отметим, что $K_{h^{(2)}}$ не является диагонально доминирующей матрицей. Далее покажем, что $H \left(C_h^{-\frac{1}{2}} K_{h^{(2)}} C_h^{-\frac{1}{2}} \right) = O(h^{-1})$. Таким образом, из уравнения (3) следует, что число итераций и число операций на определение одного неизвестного в уравнении (2) будет порядка $O(h^{-1/2})$. Этот результат получен на основе спектральной эквивалентности, что можно показать следующим образом.

Пусть $L_h^{(i)}$, $i = 1; 2$ представляет две аппроксимации дифференциального оператора эллиптического типа второго порядка на области Ω . Аппроксимации соответствуют одному и тому же числу узлов $N = N(h)$ аппроксимации лагранжиана в представлении конечными элементами. Параметр h является параметром дискретизации и при модификации сетки, выполняемого в настоящей работе, он ведет себя таким образом, что число узлов для $L_h^{(1)}$ остается таким же, как и для $L_h^{(2)}$.

Определение. Будем считать, что $L_h^{(1)}$ и $L_h^{(2)}$ спектрально эквивалентны, если

$$0 < c \leq \frac{\left(L_h^{(1)} \underline{U} \cdot \underline{U} \right)}{\left(L_h^{(2)} \underline{U} \cdot \underline{U} \right)} \leq C; \quad \forall \underline{U} \in R^N, \underline{U} \neq 0,$$

где c, C не зависит от h [6; 7].

Теперь сформулируем теорему, связанную со спектральной эквивалентностью. На заданной сетке конечных элементов, состоящей из T макроэлементов и N лагранжевых узлов, где l — норма макроэлементов, e_l имеет n_l узлов, $l=1; 2, \dots, T$, — мы имеем две глобальные матрицы конечных элементов K_1, K_2 . Будем считать, что $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}$ обозначают матрицу локальных (макро) конечных элементов на e_l . Хорошо известно, что такие матрицы являются положительными, полуопределенными. Следовательно, все данные для $K_i^{(1)}, i=1; 2$, соответствующие узлам вне e_l , равны нулю.

Теорема 1. Пусть матрицы $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}$ определены так, как указано выше, и предположим, что они имеют одно и то же пространство нулей, так что

$$N_1 = N \left(K_1^{(1)} \right) = N \left(K_2^{(1)} \right), \quad l=1, 2, \dots, T.$$

Пусть также $\mu_{i,j}^{(1)}, j=1, 2$ будут экстремальными собственными значениями $K_i^{(1)}, i=1, 2$ и предположим, что

$$\max_{1 \leq l \leq T} \frac{\mu_{2,2}^{(1)}}{\mu_{1,1}^{(1)}} \text{ и } \max_{1 \leq l \leq T} \frac{\mu_{1,2}^{(1)}}{\mu_{2,1}^{(1)}}$$

не зависят от числа элементов, но могут зависеть от наименьшего угла в U_{e_l} . Тогда K_1, K_2 являются спектрально эквивалентными.

Доказательство. Имеем:

$$\mu_{1,1}^{(1)} \left(U_1 \underline{U} \right) \leq \left(K_1^{(1)} U_1 \underline{U} \right) \leq \mu_{1,2}^{(1)} \left(U_1 \underline{U} \right); \quad \forall \underline{U} \in R^N \setminus N_1,$$

следовательно

$$c \left(K_1^{(1)} U_1 \underline{U} \right) \leq \left(K_2^{(1)} U_1 \underline{U} \right) \leq C \left(K_1^{(1)} U_1 \underline{U} \right); \quad \forall \underline{U} \in R^N \setminus N_1,$$

где

$$c = \min_1 \mu_{2,1}^{(1)} / \mu_{1,2}^{(1)}, \quad c = \max_1 \mu_{2,1}^{(1)} / \mu_{1,2}^{(1)}.$$

Поскольку пространство нулей $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}$ идентичны, это неравенство будет справедливым для всех $\underline{U} \in R^N$. Так как согласно определению K_i и $K_i^{(l)}$, $K_i = \sum_{l=1}^T K_i^{(l)}$, то будем иметь:

$$c(K_1 \underline{U}, \underline{U}) \leq (K_2 \underline{U}, \underline{U}) \leq C(K_1 \underline{U}, \underline{U}); \forall \underline{U} \in R^N$$

Здесь, согласно принятым допущениям, c и C не зависят от числа элементов. Следовательно, K_1, K_2 спектрально эквивалентны.

Из-за однородного деления сетки углы в $U e_l$ заданы при первоначальном построении грубой сетки, и, следовательно, не зависят от параметра сетки h . Кроме того, хорошо известно, что пространство нулей лагранжиевых матриц конечных элементов является линейным пространством, стянутым постоянным вектором. Таким образом, из теоремы 1 следует, что матрицы $K_{h^{(1)}}$ и $K_{h^{(2)}}$ спектрально эквивалентны и из этого сразу получается следующий результат:

$$H \left(C_h^{-\frac{1}{2}} K_{h^{(2)}} C_h^{-\frac{1}{2}} \right) = O(h^{-1}).$$

При моделировании задачи Лапласа ($-\Delta U = f$ в $\Omega, U = 0$ на $\partial\Omega, \Omega$ — единичный квадрат) при использований прямоугольных треугольников в [5] показано, что

$$H \left\{ \left(K_{h^{(1)}} \right)^{-1/2} K_{h^{(2)}} \left(K_{h^{(1)}} \right)^{-1/2} \right\} = 2.$$

Таким образом, самое большое, что можно ожидать при использовании разложения, полученного для $K_{h^{(1)}}$, — это незначительное снижение числа итераций по сравнению со случаем использования $K_{h^{(2)}}$.

Вычисление невязок. Для упрощения представления предполагается, что все данные в $K_{h^{(i)}}$, $i = 1, 2$, нормализованы (например диагонализацией) и должны быть порядка $O(1)$ при $h \rightarrow 0$. В соответствии с этим $\|K_{h^{(2)}}\| = O(1), h \rightarrow 0$ и $\|K_{h^{(2)}}\| = O(h^{-2}), h \rightarrow 0$. Если невязки в уравнении (2) рассчитывать прямым перемножением матриц, то

$$r_i = \sum_j K_{ij} U_j - f_i, i = 1, 2, \dots, N,$$

где K_{ij} — элементы, входящие в $K_{h^{(2)}}$, и абсолютная ошибка в r_i того же самого порядка, что и ошибки δK_{ij} в K_{ij} . Более конкретно

это будет означать, что если точность задаваемого в машине числа равна δ и, таким образом, $\delta K_{ij} = O(\delta)$ при $h \rightarrow 0$, то абсолютная ошибка δr_i в r_i также порядка $O(\delta)$, $h \rightarrow 0$. С помощью обратного анализа ошибок эту ошибку можно связать с ошибкой δU_i в решении для векторов U . Очевидно, что из $(r + \delta r) = K_{h^{(2)}}(U + \delta U) - f$ следует $\|\delta U\| \leq \|K_{h^{(2)}} - 1\| \|\delta r\|$.

Таким образом, $\|\delta U\| \leq O(\delta h^{-2})$ при $h \rightarrow 0$. Однако, если r_i рассчитывать менее подробно, то можно сделать меньше ошибок, что на самом деле соответствует меньшим ошибкам в элементах матрицы. Представим два метода, в которых такая цель достигается. В обоих случаях рассматриваем самосопряженные задачи второго порядка.

Метод 1. Суммирование разностей. Этот метод основывается на свойстве

$$\sum_j K_{ij} = \sigma_j, \text{ где } \sigma_i = O(h^2) \quad (4)$$

справедливым для всех строк i , за исключением ближайшей к граничному узлу Дирихле. Тогда r_i можно вычислить как сумму разностей

$$r_i = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in \Omega_h}} (-K_{ij})(U_i - U_j) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in \partial\Omega_h}} (-K_{ij}^\Delta)(U_i - U_j) + \sigma_i U_i f_i, \quad (5)$$

где $j \in \Omega_h$ и $j \in \partial\Omega_h$, где $\Omega_h \cap \partial\Omega$ представляет дискретную сетку и соответствующая узловая точка является либо внутренней, либо граничным узлом Неймана или Дирихле, соответственно. (Граничные условия третьего рода можно рассматривать точно таким же способом.) Элементы K_{ij}^Δ , которые удобно запоминать в виде вектора-порядка $O(h^{-1})$, связывают внутренний узел i с граничным узлом Дирихле, в котором известно значение g_i . В соответствии с этим, f_i дает вклад в вычисление функции только с одной, правой стороны.

Очевидно, что в уравнении (5) $\sigma_i = O(h^2)$ (или O) для всех строк i . Следовательно, согласно принятому условию гладкости решения, $U_i - U_j = O(h)$, $U_i - g_j = O(h)$ для всех пар индексов i, j при $K_{ij} \neq 0$. Следовательно, абсолютная ошибка в r_i будет $O(\delta h)$, $h \rightarrow 0$ и из $\|\delta r\| = O(\delta h)$ следует, точно также, как было показано выше, что $\|\delta u\| \leq O(\delta h^{-1})$, $h \rightarrow 0$.

Метод 2. Суммирование разностей второго порядка. В этом методе предполагаем, что имеется однородная сетка или, по крайней мере, гладко меняющаяся сетка типа представленной на рис. 1. Это реализуется, по крайней мере, во внутренней части заданной области Ω и для многих областей, в которых существует гладкое отображение Ω_h на множество прямоугольников [8].

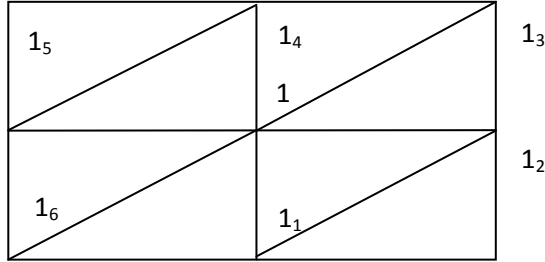


Рис. 2. Связь между точками сетки

Сначала, мы также предполагаем, что коэффициенты в уравнении удовлетворяют условиям Лифшица. Затем, в дополнение к уравнению (4) будем считать, что элементы матрицы удовлетворяют следующему:

$$k_{i,i_j} = k_{i,i_{j+3}} + O(h), \quad h \rightarrow 0 \quad (6)$$

и, суммируя вторые разности, получим:

$$r_i = \sum_{j=1}^3 (-k_{i,i_j}) (2u_i - u_{i_j} - u_{i_{j+3}}) + (k_{i,i_j} - k_{i,i_{j+3}}) (u_{i_j} - u_{i_{j+3}}) + \sigma_i u_i - f_i \quad (7)$$

Очевидно, что возможные граничные узлы Дирихле могут быть рассмотрены таким же путем, как в методе I, предполагая, что все элементы матрицы $K_{i>j}$, также как и разности $K_{i,i_j} - K_{i,i_{j+3}}$, рассчитываются с двойной точностью и затем запоминаются с обычной точностью. Разности $K_{i,i_j} - K_{i,i_{j+3}}$ можно рассчитывать, используя численную схему интегрирования для каждого члена по методу интегрирования разностей в контексте двухточечной краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x), \quad a < x < b.$$

Если $p \in C^3(a, b)$, то приближение имеет следующий вид —

$$p \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) - p \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) = p'(x_j) \left(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}} \right) + O(h^3), \quad .$$

В этом случае нет необходимости производить вычисления с двойной точностью.

Мы видим, что для симметричных задач этот метод требует большей памяти, чем прямые методы и метод 1. Считая, что $u \in C^2(\Omega)$ (локально), видим, что все члены в уравнении (7) будут $O(h^2)$ и, таким образом, абсолютная ошибка в r_i будет $O(\delta)$. Следовательно, ошибка в \tilde{U}_h будет порядка $O(\delta)$.

Проводились численные расчеты для определения величины накапливаемой ошибки округления при использовании метода разложения Холецкого и других методов расчета невязки в методе ПОСГ тестовой задачи с заданной точностью $\sim 0,5 \cdot 10^{-6}$ (рис. 4).

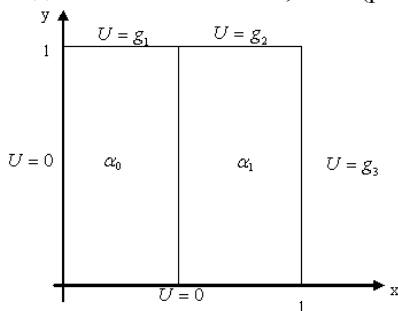


Рис. 3. Тестовая задача: $\frac{\partial}{\partial x} \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \alpha \frac{\partial U}{\partial y} = f$ в Ω , $U = g$ на $\partial\Omega$.

Пример 1. Решение тестовой задачи при следующих значения данных: $\alpha_0 = \alpha_1 = 1, g_1 = g_2 = x(1-x), g_3 = y(1-y)$

Пример 2. Решение тестовой задачи при следующих значения данных: $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 10, g_1 = g_2 = x(1-x), g_3 = y(1-y)$

В примерах 1—2 f выбрана таким образом, что точным решением является выражение $U = xy[(1-x) + (1-y)]$.

Величина ошибки округления определяется сравнением с полученным решением при всех исходных данных и всех численных расчетах с двойной точностью.

Полученные результаты представлены в таблицах 1 и 2. Ошибки округления в \tilde{U}_h измерены в l_2 -норме. В таблицах различные спосо-

бы вычисления разностей в методе ПОСГ обозначены следующим образом: "обычный" (прямое вычисление вперед), метод 1 (суммирование разностей), метод 2 (суммирование вторых разностей). Расчеты (если нет других указаний) по методу Холецкого выполняются с

обычной точностью (ОТ), а в методе ПОСГ все необходимые расчеты проведены с двойной точностью (ДТ).

Таблица 1.

Ошибки округления для примера 1

h	N	метод Холецкого	метод ПОСГ		
			обычный	метод 2	метод 1
1/4	49	.25.10 ⁻⁵	.57.10 ⁻⁶	.59.10 ⁻⁷	.28.10 ⁻⁷
		.15.10 ⁻⁵ (ДТ)			.28.10 ⁻⁷ (ОТ)
1/8	225	.14.10 ⁻⁴	.23.10 ⁻⁵	.58.10 ⁻⁷	.27.10 ⁻⁷
		.87.10 ⁻⁵ (ДТ)			.27.10 ⁻⁷ (ОТ)
1/16	961	.82.10 ⁻⁴	.90.10 ⁻⁵	.62.10 ⁻⁷	.27.10 ⁻⁷
		.55.10 ⁻⁴ (ДТ)			.27.10 ⁻⁷ (ОТ)

Таблица 2.

Ошибки округления для примера 2

h	N	метод Холецкого	метод ПОСГ		
			обычный	метод 2	метод 1
1/4	49	.30.10 ⁻⁵	.64.10 ⁻⁶	.72.10 ⁻⁷	.34.10 ⁻⁷
1/8	225	.18.10 ⁻⁵	.24.10 ⁻⁵	.73.10 ⁻⁷	.32.10 ⁻⁷ .23.10 ⁻⁶ (ОТ)
1/16	961	.11.10 ⁻³	.10.10 ⁻⁴	.76.10 ⁻⁷	.33.10 ⁻⁷ .34.10 ⁻⁷ (ОТ)

При расчетах по методу ПОСГ с обычной точностью точность расчетов будет близкой (смотрите примеры, приведенные в таблицах). Причина этого заключается в выборе хорошей начальной аппроксимации. При задании менее точных начальных приближений (например, $U^0 \equiv 0$ или $U^0 = C_h^{-1} f$) в расчетах с обычной точностью наблюдалась более заметная потеря точности. Следует отметить, что, в методе ПОСГ невозможно в принципе снизить относительную ошибку невязок до величины $< \delta$. Поэтому, для того чтобы в окончательном решении абсолютная ошибка была порядка δ , необходимо выбирать хорошее начальное приближение. В методе 2 по крайней мере матричные коэффициенты должны быть рассчитаны с двойной точностью. Если этого не сделать, то наблюдается нарастание ошибки порядка $O(h^{-1})$.

Эффективность метода ПОСГ может быть улучшена следующим способом. Поскольку тщательный расчет невязок требуется только на последней итерации (или, если число итераций велико, то на нескольких последних итерациях), невязки могут быть вычислены методом рекурсии[4], за исключением расчета на последней итерации, где должен быть применен один из предложенных двух методов.

В таблиці 3 представлено число ітерацій (p) і число арифметических операцій (w), необхідні при расчете одного неизвестного методом ПОСГ, для приведенных примеров.

Таблица 3

Число итераций (p) и число арифметических операций (w) при расчете одного неизвестного для примеров 1 и 2.

h	Пример 1				Пример 2			
	$\varepsilon=1$				$\varepsilon=1$		$\varepsilon=10^{-1}$	
	p	w	p	w	p	w	p	w
1/8	4	135	6	180	5	160	7	205
1/16	6	180	8	230	7	205	9	255

Когда проводится модифицированное неполное разложение $K_{h^{(1)}}$, используется метод МНРХ [9]. Начальное приближение берется из решения уравнения $K_{2h}^{(2)}U_{2h} = f_{2h}^{(2)}$ и линейной интерполяции по улучшенной сетке, как было описано выше. Эта система решалась итерациями тем же самым методом ПОСГ, как и на улучшенной сетке, но с $U^{(0)} \equiv 0$. Точность была $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 10^{-1}$. Невязки были рассчитаны рекурсивным методом, за исключением последней итерации, на которой использовался метод 2. Отметим, что ошибка дискретизации в этом примере была порядка $O(h^4)$.

Таким образом, в статье предложен метод, устойчивый к ошибке округления, который в тоже время обладает небольшими вычислительными трудностями. Число арифметических операций при расчете одного неизвестного с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ составляет всего лишь порядка 240, и для плоской задачи число неизвестных равно $N=961$ ($h = 1/16$). Для пространственной задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ можно ожидать, что количество шагов будет порядка 150, и $N=1331$ ($h = 1/16$). Коэффициенты матрицы и исходные данные заносятся с обычной точностью и с этой точностью могут запоминаться все вычисления.

Этот метод, так же как и мультисеточные методы, может быть легко использован в улучшенных итерационных процедурах. Следовательно, расчеты невязок могут производиться с обычной точностью. Кроме того, невязки могут быть рассчитаны с обычной точностью по методу нормальных колебаний (обычное итерационное улучшение)[9].

Список использованной литературы:

1. Wilkinson J. H. Rounding Errors in Algebraic Processes / J. H. Wilkinson // Notes on Applied Science. — London, № 32. — 1963.

2. I. Cuntafsson, Stability and rate of convergence of modified incomplete Cholesky factorization methods, Report 79.02 R. Department of Computer Sciences, Chalmers University of Technology, Gxteborg, Sweden, 1979.
3. Reid J. K. On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations, in of the conference on Large Sparse Sets Linear Equations / J. K. Reid. — Academic Press, 1971. — P. 321—354.
4. Axelsson O. A class of iterative for finite element equations, Comp. Appl. Hech. Eng. 9. — 1976. — P. 123—137.
5. Jankowski H. Iterative refinement implies numerical stability, BIT / H. Jankowski, H. Wozniakowski. — 1977, P. 303—311.
6. Cunn J. E. The solution of elliptic difference equations by semi-explicit iterative techniques, J. SIAM Numor. Anal. Ser B2. — 1964. — P. 24—45.
7. Дьяконов Е. Г. О применении эквивалентных по спектру операторов для решения разностных аналогов сильноэллиптических систем / Е. Г. Дьяконов // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 163. — С. 1314—1317.
8. Axelsson O. On a graphical package for non-linear partial differential equation problems, Information Processing 77 (B. Glichrist, ed.) IFIP, North-Holland / O. Axelsson, U. Nävert. — Amsterdam, 1977.
9. J. H. Argyris, Th. L. Johnson, R. A. Rosanoff and J.R. Roy. On numerical error in the finite element method, ISD-Report No.177, Institut für Statik und Dynamik der Luft-und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, BRD (1975).

We consider the application of the conjugate gradient method for solving problems of self-adjoint elliptic second order in the representation of finite elements. Method reduces the computational difficulties in comparison with direct methods, including in relation to the Gauss elimination, and in addition, their use can reduce the effect of the accumulation of rounding errors.

Key words: *systems of equations, the conjugate gradient method, finite elements, accuracy, discrepancy.*

Отримано 19.10.2010