

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

**О. П. Остапчук**, старший викладач  
Національний університет водного господарства та  
природокористування, м. Рівне

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИЩЕННЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ШАРУ ҐРУНТУ ВІД РАДІОНУКЛІДІВ ПРИ ЇХ ВЕРТИКАЛЬНІЙ МІГРАЦІЇ

Розглядається задача очищення горизонтального шару ґрунту від радіонуклідів при їх вертикальній міграції. Побудовано дві математичні моделі задачі залежно від вигляду коефіцієнта фільтрації при  $k = const$  та  $k = k(c_1(x, t))$ . Чисельний розв'язок відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць. На основі аналізу проведених чисельних експериментів показано суттєву відмінність у проходженні процесу масопереносу для випадку фільтрації сольового розчину в порівнянні з масопереносом на фоні фільтрації чистої води.

**Ключові слова:** *фільтрація сольових розчинів, масоперенос, крайова задача, математична модель, чисельний розв'язок монотонна різницева схема, очищення, радіонукліди.*

**Вступ.** З метою очищення радіоактивно забруднених родючих ґрунтів досить ефективним є застосування фільтрів та дренажних вловлювачів, наповнених деяким сорбуючим матеріалом, наприклад, вермикулітом [1—3]. Надалі допускається, що процес міграції радіонуклідів відбувається внаслідок молекулярної та конвективної дифузії в процесі фільтрації підземних вод. А отже, рівняннями, що описують міграцію радіонуклідів служать рівняння масопереносу розчинених в фільтраційному потоці речовин [4—8]. В [9] процес масопереносу в ґрунтовому середовищі досліджено при фільтрації сольових розчинів, тобто при врахуванні залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину  $k = k(c_1)$ . Процесам міграції радіонуклідів в ґрунтовому середовищі присвячені роботи [7; 8].

**Постановка задачі.** Розглядається задача очищення горизонтального шару ґрунту великої протяжності від радіонуклідів (наприклад,  $^{90}\text{Sr}$  (стронцій-90) або  $^{137}\text{Cs}$  (цезій-137)) при їх вертикальній міграції шляхом переносу їх фільтраційним потоком зі швидкістю  $\vec{V}$  та під впливом конвективної дифузії (рис. 1) [2].

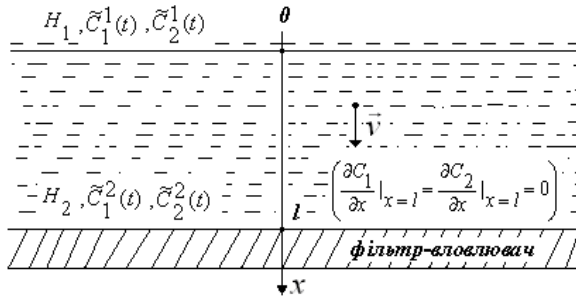


Рис. 1. Вертикальна міграція радіонуклідів в горизонтальному шарі ґрунту

На глибині  $l$  в ґрунті розміщений фільтр-вловлювач, наповнений сорбуючим елементом (наприклад, вермикулітом [3]). Відомі п'єзометричні напори на верхній та нижній (підстилаючій) поверхнях ґрунту відповідно  $H_1$  та  $H_2$  ( $H_1 > H_2$ ). Також відомий розподіл концентрацій радіонуклідів (мігранту) в початковий момент часу  $t = 0$ :  $\tilde{C}_1^0(x)$  (для частинок, що знаходяться в конвективно рухомому поровому розчині) та  $\tilde{C}_2^0(x)$  (для частинок, що знаходяться у воді, що зв'язана зі скелетом ґрунту). На верхній поверхні ґрунту відомі концентрації  $\tilde{C}_1^1(t)$  та  $\tilde{C}_2^1(t)$ , а на фільтрі-вловлювачі задаються концентрації  $\tilde{C}_1^2(t)$ ,  $\tilde{C}_2^2(t)$  або умова швидкого поглинання радіонуклідів фільтром:  $\frac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0$ .

Потрібно дослідити розподіл концентрацій  $c_1(x,t)$ ,  $c_2(x,t)$  радіонуклідів по області фільтрації з часом, що дасть можливість зробити прогноз щодо ступеня забруднення ґрунтів та їх подальшого очищення і використання.

**Математичні моделі задачі.** Для формалізації описаної вище постановки задачі очищення ґрунтів від радіонуклідів при їх вертикальній міграції нижче наводяться дві математичні моделі: 1) більш проста математична модель, в якій міграція радіонуклідів розглядається на фоні фільтрації чистої води (коефіцієнт фільтрації  $k = const$ ); 2) математична модель, в якій фільтрат є сольовим розчином  $k = k(c_1(x,t))$ .

#### Математична модель №1.

У першому випадку математична модель задачі набуде вигляду

$$D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - V \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$V = -k \frac{dH}{dx}, \quad \frac{dV}{dx} = 0, \quad (3)$$

$$H(0) = H_1, \quad H(l) = H_2, \quad (4)$$

$$c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \quad c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \quad x \in (0, l), \quad (5)$$

$$c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad c_2(0, t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad 0 < t < t_1, \quad (6)$$

$$l_2 c_1(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^2(t), \\ \frac{\partial c_1(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad l_2 c_2(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^2(t), \\ \frac{\partial c_2(l, t)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Тут:  $c_1(x, t)$ ,  $D_1$  — відповідно концентрація та коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться в фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині);  $c_2(x, t)$ ,  $D_2$  — відповідно концентрація та коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту;  $V$  — швидкість фільтраційного потоку мігранта;  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  — коефіцієнти масообміну;  $\sigma$  — пористість ґрунту;  $l_2$  — диференціальний оператор, що задає одну з граничних умов на фільтрі поглинання радіонуклідів;  $k$  — коефіцієнт фільтрації води з мігрантами ( $k = const$ );  $H = \frac{p}{\rho g} - x$  — гідростатичний напір,  $p$  — тиск рідини,  $\rho$  — густина рідини,  $g$  — прискорення вільного падіння,  $x$  — вертикальна координата, напрямлена вертикально вниз;  $t$  — час.

### Математична модель №2.

Для більш адекватного опису процесу міграції радіонуклідів, запишемо другу математичну модель, в якій фільтруючий розчин з радіонуклідами-мігрантами моделюється сольовим розчином (слабким електролітом), в якому  $k = k(c_1(x, t))$ . Дана математична модель прийме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - V(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (9)$$

$$V(c_1) = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x} \pm v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$H(0) = H_1, \quad H(l) = H_2, \quad (11)$$

$$c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \quad c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \quad x \in (0, l), \quad (12)$$

$$c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad c_2(0, t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad 0 < t < t_1, \quad (13)$$

$$l_2 c_1(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^2(t), \\ \frac{\partial c_1(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad l_2 c_2(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^2(t), \\ \frac{\partial c_2(l, t)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Тут:  $k(c_1(x, t))$  — коефіцієнт фільтрації сольового розчину, залежність якого від концентрації сольового розчину в фільтраційному потоці встановлено експериментально [10],  $v(c_1(x, t))$  — коефіцієнт осмосу,  $D_1(c_1) = D_{1m} + \lambda_1 |V(c_1)|$  — коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться в фільтраційному потоці,  $D_{1m}$  — коефіцієнт молекулярної дифузії,  $\lambda_1$  — параметр гідродинамічної дисперсії.  $D_2(c_2)$  — коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту. Знак „+” в (10) відповідає нормальному осмосу, а „-” — аномальному. Як видно з (8)—(14), дана математична модель є нелінійною.

**Чисельний розв'язок задачі.** Для отримання чисельного розв'язку розглядуваної задачі поступимо наступним чином. Побудуємо спочатку обчислювальний алгоритм для першої математичної моделі, що описується крайовою задачею (1)—(7). В зв'язку з цим, поставимо у відповідність крайовій задачі (1)—(7) сукупність двох крайових задач

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - V \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \\ c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \\ c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \\ c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \\ l_2 c_1(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^2(t), \\ \frac{\partial c_1(l, t)}{\partial x} = 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \\ c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \\ c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \\ c_2(0, t) = \tilde{C}_2^1(t), \\ l_2 c_2(l, t) = \begin{cases} c_2^2(t), \\ \frac{\partial c_2(l, t)}{\partial x} = 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (16)$$

Ввівши різницеву сітку  $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{0, n}; t_k = k\tau, k = \overline{0, k_1}\}$ , побудуємо різницеві схеми для розглядуваних вище задач, причому для (15) — монотонну різницеву схему, а для (16) — чисто неявну різницеву схему [11].

У результаті дискретизації (15), отримаємо

$$\begin{aligned} & \mu_i \frac{C_{1,i-1}^{k+1} - 2C_{1,i}^{k+1} + C_{1,i+1}^{k+1}}{h^2} + r_+ \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h} + \\ & + r_- \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h} - \frac{\gamma_1}{D_1} C_{1,i}^{k+1} + \frac{\gamma_2}{D_1} C_{2,i}^{k+1} = \sigma' \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i}^k}{\tau}, \\ & C_{1,i}^0 = \tilde{C}_{1,i}^0, C_{1,0}^{k+1} = \tilde{C}_1^{k+1}, C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 C_{1,n-1}^{k+1} + \bar{\mu}_1, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\chi_1 = 0$ ,  $\bar{\mu}_1 = \tilde{C}_2^{k+1}$  — у випадку, коли диференціальний оператор  $l_2$  задає на фільтрі граничну умову 1-го роду, і  $\chi_1 = 1$ ,  $\bar{\mu}_1 = 0$  — у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Тут введені наступні позначення:

$$\mu_i = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |r|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 V_i}{2D_1}}, \quad r = r_+ + r_-, \quad r = -\frac{V}{D_1}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{D_1},$$

$$r_+ = 0,5 \left( -\frac{V}{D_1} + \frac{V}{D_1} \right) \equiv 0, \quad r_- = 0,5 \left( -\frac{V}{D_1} - \frac{V}{D_1} \right) = -\frac{V}{D_1}.$$

Чисельний розв'язок (17) знаходимо методом прогонки

$$C_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 C_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad (18)$$

де

$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_{1,i}}{\bar{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \quad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_{1,i} \beta_i^1 + f_{1,i}^k}{\bar{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \quad \alpha_1^1 = 0, \quad \beta_1^1 = \tilde{C}_1^{k+1},$$

$$a_{1,i} = \frac{\mu_i}{h^2} - \frac{r_-}{h}, \quad b_{1,i} = \frac{\mu_i}{h^2} + \frac{r_+}{h}, \quad \bar{c}_{1,i} = \frac{2\mu_i}{h^2} + \frac{r_+}{h} - \frac{r_-}{h} + \frac{\gamma_1}{D_1} + \frac{\sigma}{D_1\tau},$$

$$f_{1,i}^k = \frac{\sigma}{D_1\tau} C_{1,i}^k + \frac{\gamma_2}{D_1} C_{2,i}^k.$$

Чисто неявна різницева схема для (16) має вигляд

$$D_2 \frac{C_{2,i-1}^{k+1} - 2C_{2,i}^{k+1} + C_{2,i+1}^{k+1}}{h^2} + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1} - \gamma_2 C_{2,i}^{k+1} = \sigma \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i}^k}{\tau}, \quad (19)$$

$$C_{2,i}^0 = \tilde{C}_{2,i}^0, \quad C_{2,0}^{k+1} = \tilde{C}_2^{1,k+1}, \quad C_{2,n}^{k+1} = \chi_2 \tilde{C}_{2,n-1}^{k+1} + \bar{\mu}_2.$$

де  $\chi_2 = 0$ ,  $\bar{\mu}_2 = \tilde{C}_2^{2,k+1}$  — у випадку задання граничних умов 1-го роду, і  $\chi_2 = 1$ ,  $\bar{\mu}_2 = 0$  — у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Аналогічно попередньому, маємо

$$C_{2,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{2,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2, \quad (20)$$

де

$$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_{2,i}}{\bar{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_{2,i} \beta_i^2 + f_{2,i}^k}{\bar{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \quad \alpha_1^2 = 0, \quad \beta_1^2 = \tilde{C}_1^{2,k+1},$$

$$a_{2,i} = \frac{1}{h^2}, \quad b_{2,i} = \frac{1}{h^2}, \quad \bar{c}_{2,i} = \frac{2}{h^2} + \frac{\gamma_2}{D_2} + \frac{\sigma}{D_2\tau}, \quad f_{2,i}^k = \frac{\sigma}{D_2\tau} C_{2,i}^k + \frac{\gamma_1}{D_2} C_{1,i}^k.$$

Обчислювальний алгоритм реалізуємо наступним чином. Використовуючи (18), знаходимо значення  $C_{1,i}^1$  на першому часовому шарі  $t = \tau$ , причому беручи для  $C_{2,i}^0$  значення концентрації з початкової умови, потім знаходимо на основі (20) значення  $C_{1,i}^1$  на цьому ж шарі і т.д.

Побудуємо тепер обчислювальний алгоритм для другої математичної моделі, що описується крайовою задачею (8)—(14). В зв'язку з цим, поставимо у відповідність даній крайовій задачі сукупність двох крайових задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - V(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \\ c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \\ c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \\ c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \\ l_2 c_1(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^2(t), \\ \frac{\partial c_1(l, t)}{\partial x} = 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_1 = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \\ c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \\ c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \\ c_2(0, t) = \tilde{C}_2^1(t), \\ l_2 c_2(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^2(t), \\ \frac{\partial c_2(l, t)}{\partial x} = 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

Для (21) також використовуємо монотонну різницеву схему [12]

$$\begin{aligned} & \mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h^2} + \\ & + r_{i+}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = \sigma_1 \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i}^k}{\tau}, \\ & C_{1,i}^0 = \tilde{C}_{1,i}^0, \quad C_{1,0}^{k+1} = \tilde{C}_1^{1,k+1}, \quad C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 \tilde{C}_{1,n-1}^{k+1} + \bar{\mu}_1, \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\chi_1 = 0$ ,  $\bar{\mu}_1 = \tilde{C}_2^{k+1}$  — у випадку, коли диференціальний оператор  $l_2$  задає на фільтрі граничну умову 1-го роду, і  $\chi_1 = 1$ ,  $\bar{\mu}_1 = 0$  — у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Коефіцієнти різницевої схеми (23) визначаються так:

$$\begin{aligned} \mu_{i1}^k &= \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k}}, \\ d_i^k &= \frac{D(C_{1,i}^k) + D(C_{1,i-1}^k)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{D(C_{1,i+1}^k) + D(C_{1,i}^k)}{2}, \\ D_1(c_1) &= D_m + \lambda |V(c_1)|, \quad r_i^k = r_{i+}^k + r_{i-}^k, \\ r_{i+}^k &= 0,5 \left( V(C_{1,i}^k) + |V(C_{1,i}^k)| \right) \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0,5 \left( V(C_{1,i}^k) - |V(C_{1,i}^k)| \right) \leq 0, \\ f_i^k &= -\frac{\sigma_1}{\tau} C_{1,i}^k + \gamma_2 C_{2,i}^k. \end{aligned}$$

Чисельний розв'язок (23) знаходимо методом прогонки

$$C_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 C_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad (24)$$

де

$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_{1,i}}{\bar{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \quad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_{1,i} \beta_i^1 + f_{1,i}^k}{\bar{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \quad \alpha_1^1 = 0, \quad \beta_1^1 = \tilde{C}_1^{1,k+1},$$

$$a_{1,i}^k = \frac{1}{h} \left( \frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h} - r_{i-}^k \right), \quad b_{1,i}^k = \frac{1}{h} \left( \frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h} + r_{i+}^k \right),$$

$$\bar{c}_{1,i}^k = \frac{1}{h^2} \left( d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k \right) + \frac{|r_i^k|}{h} + \frac{\sigma}{\tau} + \gamma_1, \quad f_{1,i}^k = -\frac{\sigma}{\tau} C_{1,i}^k + \gamma_2 C_{2,i}^k.$$

Для розв'язування (22) використаємо неявну різницеву схему

$$d_{i+1}^k \frac{C_{2,i+1}^{k+1} - C_{2,i}^{k+1}}{h^2} - d_i^k \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i-1}^{k+1}}{h^2} + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1} - \gamma_2 C_{2,i}^{k+1} = \sigma_2 \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i}^k}{\tau}, \quad (25)$$

$$C_{2,i}^0 = \tilde{C}_{2,i}^0, \quad C_{2,0}^{k+1} = \tilde{C}_2^{1,k+1}, \quad C_{2,n}^{k+1} = \chi_2 \tilde{C}_{2,n+1}^{k+1} + \bar{\mu}_2,$$

де  $\chi_2 = 0$ ,  $\bar{\mu}_2 = \tilde{C}_2^{2,k+1}$  — у випадку задання граничних умов 1-го роду, і  $\chi_2 = 1$ ,  $\bar{\mu}_2 = 0$  — у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Чисельний розв'язок задачі знаходимо методом прогонки

$$C_{2,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{2,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2, \quad (26)$$

де

$$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_{2,i}}{\bar{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_{2,i} \beta_i^2 + f_{2,i}^k}{\bar{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \quad \alpha_1^2 = 0, \quad \beta_1^2 = \tilde{C}_2^{2,k+1},$$

$$a_{2,i}^k = \frac{d_i^k}{h^2}, \quad b_{2,i}^k = \frac{d_{i+1}^k}{h^2}, \quad \bar{c}_{2,i}^k = \frac{1}{h^2} \left( d_i^k + d_{i+1}^k \right) + \frac{\sigma}{\tau} + \gamma_2,$$

$$f_{2,i}^k = -\frac{\sigma}{\tau} C_{2,i}^k + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1},$$

$$d_i^k = \frac{D_2 \left( C_{2,i}^k \right) + D_2 \left( C_{2,i-1}^k \right)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{D_2 \left( C_{2,i+1}^k \right) + D_2 \left( C_{2,i}^k \right)}{2}.$$

### Чисельні експерименти та аналіз отриманих результатів.

Програмна реалізація розв'язку задачі проведена в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 7.0.

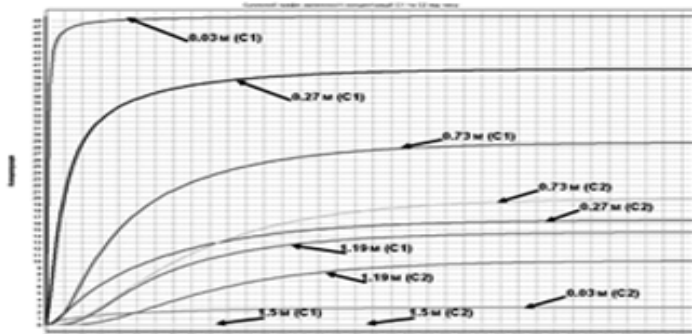
В якості конкретного прикладу спрогнозуємо зміну концентрації радіонуклідів через 10 років з такими вхідними даними:  $\tau=30$  діб,  $k=0,1$  м/добу,  $l=1,5$  м,  $\sigma=0,2$ ;  $\gamma_1=\gamma_2=0,0065$ ,  $D_1=0,02$  м<sup>2</sup>/добу;

$D_2=0,01$  м<sup>2</sup>/добу,  $H_1=1$  м,  $H_2=0$  м,  $\tilde{C}_1^0=0$  кг/м<sup>3</sup>;  $\tilde{C}_2^0=0$  кг/м<sup>3</sup>,

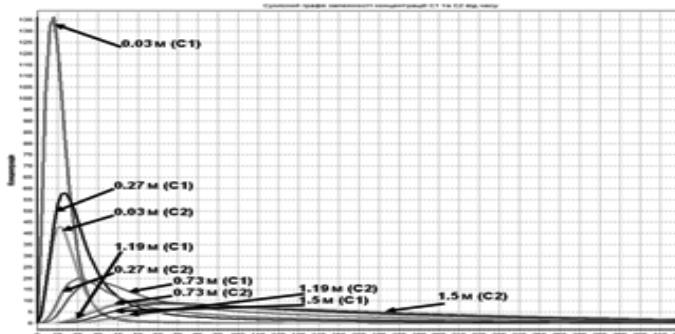
$$\tilde{C}_1^1 = 26 \cdot t^2 \cdot e^{-0,3t}, \quad \tilde{C}_1^2 = t^3 \cdot e^{-0,3t}, \quad \frac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0.$$



На рис. 2, 3 відображено порівняльні графіки розподілів концентрацій  $c_1$  і  $c_2$  з часом для граничних умов 1-го та 2-го роду відповідно, а на рисунку 4 зображено поверхні розподілу концентрацій.



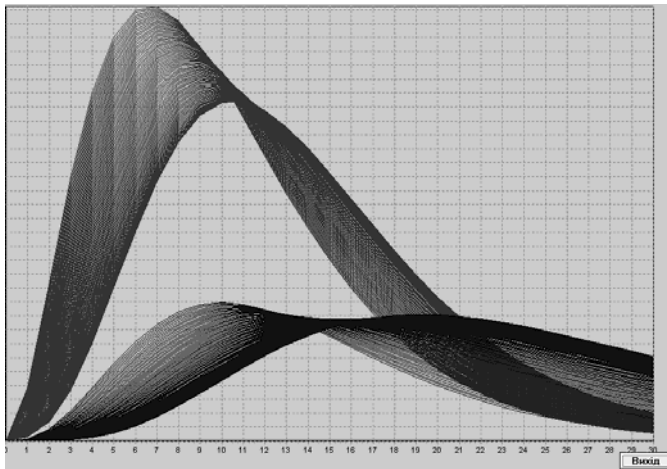
*Рис. 2. Порівняльні графіки розподілу концентрацій  $C_1$  і  $C_2$  з часом для граничних умов 1-го роду*



*Рис. 3. Порівняльні графіки розподілу концентрацій  $C_1$  і  $C_2$  з часом для граничних умов 2-го роду*

Проаналізувавши вищенаведені графіки, можна зробити висновок, що розподіли концентрацій  $c_1$  і  $c_2$  з часом по глибині шару ґрунту суттєво відрізняються. А саме: концентрація  $c_1$  зменшується швидше, ніж  $c_2$ . Родючий шар ґрунту практично очищається від радіонуклідів в межах допустимих норм і стає придатним до використання приблизно через два роки після забруднення при заданих вхідних даних.

Аналіз існуючих експериментальних даних, їх математична обробка показує, що для різних ґрунтів міграція радіонуклідів проходить по-різному. Так, наприклад, для торфових ґрунтів міграція радіонуклідів спостерігається на 1,5—2 метри, для інших ґрунтів міграція радіонуклідів відбувається таким чином, що локалізація концентрації відбувається біля лівої межі їх поширення (рис. 4).



*Рис.4. Графік поверхонь розподілу концентрацій  $c_1$  і  $c_2$*

**Висновки.** При математичному моделюванні процесу міграції радіонуклідів потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища, оскільки це суттєво впливає на їх масоперенос.

На основі експериментальних даних можна зробити висновок, що в більшості випадків для кількісного опису процесу переносу радіонуклідів можна вважати, що в кожній довільно вибраній малій частині ґрунту завжди наявні радіоактивні частинки одного сорту у трьох фізично різних станах — поровому розчині, адсорбованій на поверхні скелету воді і об'ємі скелету, крім частинок, які складають його базові компоненти (скелет і поровий розчин). При цьому коефіцієнти дифузії частинок у рухомому поровому розчині є на декілька порядків більші, ніж що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту, а в об'ємі скелету вони дифундують дуже повільно. Зазначимо, що коли кількість частинок, які знаходяться в слабо зв'язній частині води, є значно більшою, ніж у поровому розчині, то дифузійні потоки у конвективно-рухомому розчині і адсорбованій воді будуть співмірними.

На основі узагальнення та аналізу матеріалів по стану підземних вод і навколишнього середовища на досліджуваній ділянці, а також динаміки зміни хімічного стану підземних вод було вивчено процес міграції поширення забруднень та проведена оцінка зміни концентрації.

#### **Список використаних джерел:**

1. Власюк А. П. Числове моделювання однієї задачі про утилізацію радіонуклідів / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тез. доп. Міжнародної школи-семінару Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності. — Мелітополь, 2005. — С.111—113.

2. Власюк А. П. Числове моделювання міграції радіонуклідів при горизонтальній фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тез. доп. Міжнародної школи-семінару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». — Східниця, 2006. — С. 180—181.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання задачі про утилізацію радіонуклідів в шарі ґрунту / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тез. доп. Міжн. конф. ім. акад. М. Кравчука. — К., 2006. — С. 57.
4. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). — М. : Наука, 1969. — С. 237—313.
5. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
6. Ляшко С. И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / С. И. Ляшко. — К. : Наук. думка, 1998. — 256 с.
7. Бурак Я. Й. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі / Я. Й. Бурак, Э. Я. Чапля // Доп. НАН України. — 1993. — № 10. — С. 59—63.
8. Чапля Є Я. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — НАН України, центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. — Львів : СПОЛЮМ, 2003. — 128 с.
9. Власюк А. П. Чисельне дослідження одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. — 2004. — Вип. 4. — С. 228—237.
10. Власюк А.П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузло // Меліорація і водне господарство. Міжвідомчий темат. наук. зб. — К., 2000. — Вип. 87. — С. 43—46.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем. — 3-е изд. / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1989. — 616 с.
12. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук., О. М. Степанченко. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. — 2005. — Вип. 2. — С. 188—197.

Here is the problem of the radionuclids recycling during its vertical migration in a horizontal layer of the soil. Two mathematical models of a problem, depending on the filtration coefficient when  $k=const$  and  $k = k(c_1(x, t))$ , are build. Numerical solution of such boundary problems is obtained by finite differences method. Analysis of results of conducted numerical experiments gives an opportunity to show that mass transfer in case of salt solution substantially differs from mass transfer at pure water filtration.

**Key words:** *filtration salt solution, mass transfer, boundary-value problem, mathematical model, numerical solution, monotonic finite difference scheme, radionuclids recycling.*

Отримано 15.05.10