

Сингулярность полей напряжений в системе основа–покрытие

Н. А. Долгов, Е. Б. Сорока

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Решается задача теории упругости для системы основа–покрытие при различной конфигурации свободного края покрытия. Рассмотрено бигармоническое уравнение теории упругости в полярных координатах, для решения которого предложено использовать функцию Эри. Получены зависимости коэффициента сингулярности от соотношения упругих характеристик системы основа–покрытие и конфигурации свободного края покрытия. Найден порядок сингулярности полей напряжений для плазменных покрытий. Показано, что в частных случаях задача вырождается в задачу механики разрушения о трещине в однородном материале или в задачу теории упругости для однородных клиньев и вырезов.

Ключевые слова: основа, порядок сингулярности, плазменные покрытия, напряжения.

Введение. Защитные покрытия широко используются в различных отраслях промышленности. Для изучения причин, вида и характера разрушения элементов конструкций с покрытиями необходимо учитывать их напряженное состояние при испытаниях и эксплуатации. Испытания образцов с покрытиями свидетельствуют, что отслоение покрытия от основы начинается с края покрытия даже без наличия начальной трещины в плоскости адгезионного контакта. При разрушении слоистых композитов также наиболее часто встречается краевое расслоение [1–4]. Предполагается [5], что на отслоение покрытий влияют только касательные напряжения, возникающие в поверхности контакта между основой и покрытием. Однако решение задач теории упругости для биматериалов показывает, что в краевой зоне имеют место также нормальные составляющие напряжений, которые, по-видимому, влияют на отслоение покрытий как при эксплуатации, так и при испытаниях образцов с покрытиями. В высоконагруженных деталях с покрытиями, работающих в экстремальных условиях эксплуатации, начало отслоения покрытия с краевой зоны обусловлено сингулярностью напряжений. Работы, посвященные определению адгезионной прочности покрытий [6–8], основаны на расчетных зависимостях, которые учитывают только максимальные касательные напряжения в области свободной кромки покрытия. Поэтому необходимость уточнения расчетных зависимостей, в частности сингулярности полей напряжений в зависимости от геометрических и упругих характеристик составляющих в системе основа–покрытие, очевидна.

Начало изучению сингулярности полей напряжений в пластинах различной конфигурации из однородных и композитных материалов было положено Вильямсом [9]. Задача о нахождении сингулярности полей напряжений для клиньев из двух различных материалов рассматривалась в работах [10–14].

Цель настоящей работы заключалась в определении сингулярности полей напряжений в системе основа–покрытие в зависимости от угла свободной кромки покрытия и комбинации упругих свойств основы и покрытия.

Постановка задачи. Рассмотрим систему основа–покрытие. Каждая составляющая системы является упругим и изотропным материалом. Расчеты проведем для образца с покрытием, который используется для определения когезионной и адгезионной прочности [5], по методике, предложенной в [6]. Схема образца представлена на рис. 1, где $L, 2H$ – длина и толщина основы; l, h – длина и толщина покрытия ($l < L; h < 2H$); P – растягивающее усилие, приложенное к основе. При расчетах используем полярную систему координат с центром в точке O (рис. 2). Тогда положение любой точки образца (основа или покрытие) определяется расстоянием от начала координат O и углом θ между радиус-вектором r и фиксированной осью Oz . Покрытие занимает область $0 < \theta \leq \pi/2$. Модули упругости E и сдвига G , а также коэффициенты Пуассона μ обозначим E_c, G_c, μ_c и E_s, G_s, μ_s , здесь и далее индексы c относятся к покрытию, s – к основе.

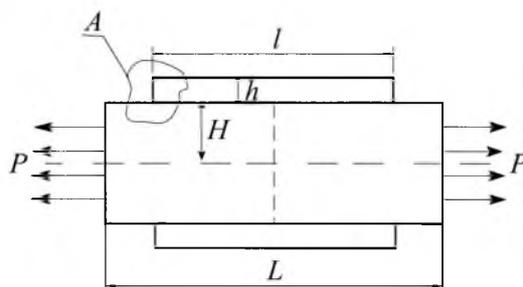


Рис. 1. Схема образца с покрытием.

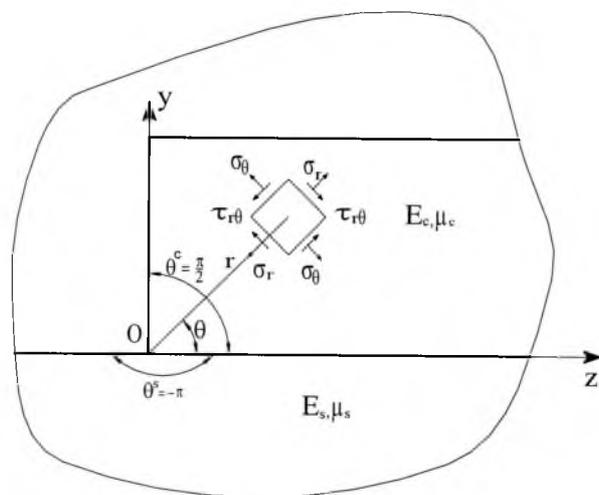


Рис. 2. Элемент образца с покрытием в полярной системе координат.

Для решения краевой задачи используем бигармонические уравнения теории упругости для функции напряжений φ , зависящей от r и θ (функции Эри) [15]:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \varphi_s &= 0; \\ \nabla^4 \varphi_c &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2)$$

Общие решения уравнений (1) отыскиваем в виде

$$\varphi_s = r^{\lambda+1} f_s(\theta). \quad (3)$$

Здесь

$$f_s(\theta) = C_1 \sin(\lambda + 1)\theta + C_2 \cos(\lambda + 1)\theta + C_3 \sin(\lambda - 1)\theta + C_4 \cos(\lambda - 1)\theta; \quad (4)$$

$$\varphi_c = r^{\lambda+1} f_c(\theta), \quad (5)$$

где

$$f_c(\theta) = C_5 \sin(\lambda + 1)\theta + C_6 \cos(\lambda + 1)\theta + C_7 \sin(\lambda - 1)\theta + C_8 \cos(\lambda - 1)\theta \quad (6)$$

(C_1, \dots, C_8 – произвольные постоянные).

Компоненты напряжений и перемещений определяются по формулам

$$\begin{cases} \sigma_r^s = r^{\lambda-1} [f_s''(\theta) + (\lambda + 1)f_s'(\theta)]; \\ \sigma_\theta^s = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda + 1)f_s(\theta)]; \\ \tau_{r\theta}^s = -r^{\lambda-1} \lambda f_s'(\theta); \\ 2G_s u^s = r^\lambda [-(\lambda + 1)f_s(\theta) + (1 + \mu_s)^{-1} g_s'(\theta)]; \\ 2G_s v^s = r^\lambda [-f_s'(\theta) + (1 + \mu_s)^{-1} (\lambda - 1)g_s(\theta)]. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь

$$g_s(\theta) = 4(\lambda - 1)^{-1} [C_3 \cos(\lambda - 1)\theta + C_4 \sin(\lambda - 1)\theta];$$

$$\begin{cases} \sigma_r^c = r^{\lambda-1} [f_c''(\theta) + (\lambda + 1)f_c'(\theta)]; \\ \sigma_\theta^c = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda + 1)f_c(\theta)]; \\ \tau_{r\theta}^c = -r^{\lambda-1} \lambda f_c'(\theta); \\ 2G_c u^c = r^\lambda [-(\lambda + 1)f_c(\theta) + (1 + \mu_c)^{-1} g_c'(\theta)]; \\ 2G_c v^c = r^\lambda [-f_c'(\theta) + (1 + \mu_c)^{-1} (\lambda - 1)g_c(\theta)], \end{cases} \quad (8)$$

где

$$g_c(\theta) = 4(\lambda - 1)^{-1} [C_7 \cos(\lambda - 1)\theta + C_8 \sin(\lambda - 1)\theta].$$

При $r \rightarrow 0$ компоненты напряжений пропорциональны $r^{\lambda-1}$, компоненты перемещений – r^λ , где $\lambda - 1$ – порядок сингулярности полей напряжений,

$$\begin{aligned} \sigma_r^s; \sigma_r^c; \sigma_{r\theta}^s &\sim r^{\lambda-1}; \\ \sigma_r^c; \sigma_r^s; \sigma_{r\theta}^c &\sim r^{\lambda-1}; \\ u^s, v^s, u^c, v^c &\sim r^\lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Для данного случая перемещения соответствуют плоскому напряженному состоянию. К основе приложена растягивающая нагрузка (рис. 1). Другие поверхности свободны от нагрузки. Таким образом, имеем следующие граничные условия и условия непрерывности:

$$\begin{cases} \tau_{r\theta}^c = \tau_{r\theta}^s, & \theta = 0; \\ \sigma_\theta^c = \sigma_\theta^s, & \theta = 0; \\ \sigma_\theta^s = 0, & \theta = -\pi; \\ \tau_{r\theta}^s = 0, & \theta = -\pi; \\ \tau_{r\theta}^c = 0, & \theta = \pi/2; \\ \sigma_\theta^c = 0, & \theta = \pi/2; \\ u^c = u^s, & \theta = 0; \\ v^c = v^s, & \theta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

После подстановки граничных условий (10) в уравнения (7), (8) получим систему восьми линейных уравнений относительно постоянных C_1, \dots, C_8 :

$$\sum_{i=1}^8 C_i a_{ij}(\lambda) = 0, \quad (11)$$

где $a_{ij}(\lambda)$ – коэффициенты при неизвестных произвольных постоянных $j = 1, \dots, 8, i = 1, \dots, 8$ (табл. 1).

Существование нетривиальных значений C_1, \dots, C_8 возможно, если

$$|\Delta(\lambda)| = 0, \quad (12)$$

где $|\Delta(\lambda)|$ – определитель 8-го порядка, составленный из коэффициентов при C_1, \dots, C_8 .

Приравняв определитель нулю, получим характеристическое уравнение относительно λ . Исследование этого уравнения представляет интерес при изучении поведения напряжений и перемещений. Особый интерес с точки зрения сингулярности представляет область малых значений r ($r \rightarrow 0$).

Результаты и их обсуждение. Характеристическое уравнение (12) имеет бесконечное количество действительных и комплексных решений. Ограничив область решений неравенством $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$, получим порядок сингулярности для полей напряжений и перемещений. Отметим, что $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ – тривиальные решения характеристического уравнения, соответствующие перемещению и вращению абсолютно твердого тела.

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты $a_{ij}(\lambda)$ системы уравнений (11)

j	i			
	1	2	3	4
1	$-(\lambda + 1)$	0	$-(\lambda - 1)$	0
2	0	-1	0	-1
3	$-\sin(\pi(\lambda + 1))$	$\cos(\pi(\lambda + 1))$	$-\sin(\pi(\lambda - 1))$	$\cos(\pi(\lambda - 1))$
4	$(\lambda + 1)\cos(\pi(\lambda + 1))$	$(\lambda + 1)\sin(\pi(\lambda + 1))$	$(\lambda - 1)\cos(\pi(\lambda - 1))$	$(\lambda - 1)\sin(\pi(\lambda - 1))$
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	$-(\lambda + 1)$	0	$-(\lambda + 1) + 4/(1 + \mu_s)$
8	$-(\lambda + 1)$	0	$-(\lambda - 1) + 4/(1 + \mu_s)$	0
j	i			
	5	6	7	8
1	$(\lambda + 1)$	0	$(\lambda - 1)$	0
2	0	1	0	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	$(\lambda + 1)\cos(\pi/2(\lambda + 1))$	$-(\lambda + 1)\sin(\pi/2(\lambda + 1))$	$(\lambda - 1)\cos(\pi/2(\lambda - 1))$	$-(\lambda - 1)\sin(\pi/2(\lambda - 1))$
6	$\sin(\pi/2(\lambda + 1))$	$\cos(\pi/2(\lambda + 1))$	$\sin(\pi/2(\lambda - 1))$	$\cos(\pi/2(\lambda - 1))$
7	0	$(\lambda + 1)G_s/G_c$	0	$-G_s/G_c(4/(1 + \mu_c) - (\lambda + 1))$
8	$(\lambda + 1)G_s/G_c$	0	$-G_s/G_c(4/(1 + \mu_c) - (\lambda - 1))$	0

Анализ данного уравнения показал, что порядок сингулярности полей напряжений и перемещений зависит только от упругих характеристик и конфигурации системы основа–покрытие и не зависит от условий нагружения.

Решение характеристического уравнения было получено численно, его корни представлены на рис. 3. Как видно, существуют три области: 1 – соответствует одному действительному корню характеристического уравнения; 2 – характеризуется двумя действительными корнями; 3 – соответствует комплексному корню, действительная часть которого характеризует сингулярность. В области 1 отмечается сильная сингулярность: $-0,5 \leq \lambda - 1 \leq -0,3$, в 2 кроме сильной сингулярности имеет место слабая сингулярность, которую также необходимо учитывать, так как ее влияние проявляется на достаточном удалении от точки O , когда сильная сингулярность уже не влияет на поля напряжений и перемещений.

Порядок сингулярности зависит также от угла θ свободной кромки относительно поверхности основы. Зависимость показателя сингулярности $\lambda - 1$ от угла θ представлена на рис. 4, где сплошная линия соответствует случаю $G_s = G_c$, $\mu_s = \mu_c = 0,3$. Решение для угла $\theta = \pi$ совпадает с известным результатом, полученным в механике разрушения. С уменьшением угла

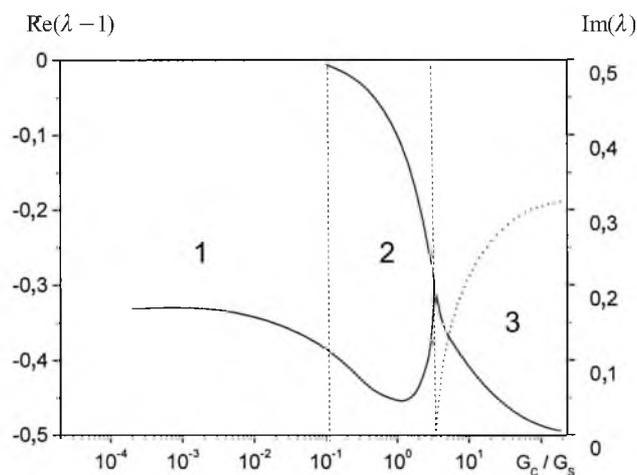


Рис. 3. Корни характеристического уравнения: сплошная линия – $\text{Re}(\lambda - 1)$; штриховые – $\text{Im}(\lambda)$.

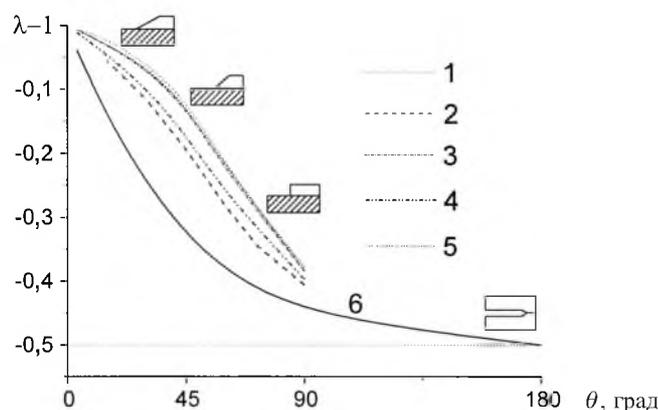


Рис. 4. Зависимость показателя сингулярности $\lambda - 1$ от угла θ : 1–5 соответствуют различным конфигурациям покрытия и соотношениям упругих постоянных основы и плазменных покрытий (табл. 2); 6 – $G_s = G_c$, $\mu_s = \mu_c = 0,3$.

θ сингулярность полей напряжений уменьшается и стремится к нулю при $\theta \rightarrow 0$. Таким образом, чем меньше угол θ , тем меньше концентрация напряжений в системе основа–покрытие.

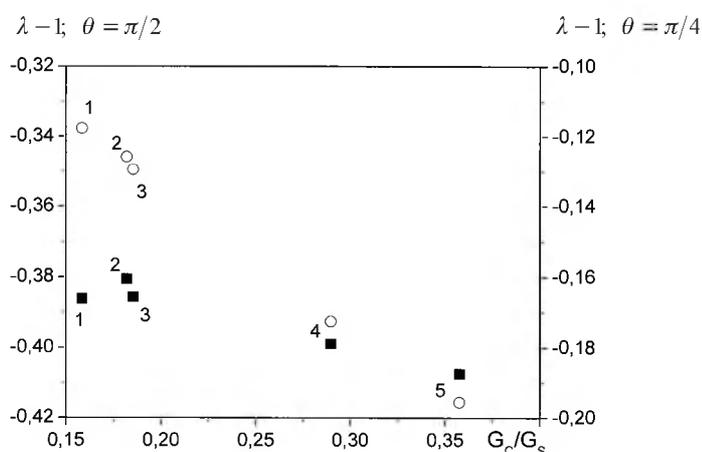
На рис. 5 представлены значения сингулярности для двух конфигураций плазменных покрытий ($\theta = \pi/4$ и $\pi/2$) – табл. 2. Видно, что сингулярность полей напряжений и деформаций зависит как от упругих характеристик основы и покрытия, так и от угла свободной кромки. В свою очередь, упругие характеристики покрытий зависят от технологических факторов. Поэтому, изменяя технологические факторы, можно влиять на сингулярность полей напряжений в системе основа–покрытие.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что, изменяя технологические параметры напыления покрытий и угол свободной кромки покрытия, можно влиять на величину сингулярности, а следовательно, на напряженно-деформированное состояние системы основа–покрытие на этапе напыления и проектирования покрытия.

Т а б л и ц а 2

Упругие свойства покрытий и основы [16, 17]

№ покрытия на рис. 4	Материал покрытия или основы	E , ГПа	μ
1	$(\text{MgAl}_2\text{O}_4 + 30\% \text{Al}_2\text{O}_3) + 50\% \text{NiCr}$	71	0,21
2	Dy_2O_3	33	0,27
3	$\text{Dy}_2\text{O}_3 + 18\% \text{TiO}_2$	38	0,25
4	$\text{Dy}_2\text{O}_3 + 25\% \text{Mo}$	58	0,22
5	Y_2O_3	37	0,24
Основа	12X18H10T	210	0,28

Рис. 5. Значения показателя сингулярности для плазменных покрытий: цифры 1–5 соответствуют номеру покрытия в табл. 2 (■ – $\theta = \pi/2$; ○ – $\theta = \pi/4$).

В последующих работах будут определены поля напряжений для рассмотренных покрытий.

Выводы

1. Сингулярности полей напряжений, а следовательно, и напряженно-деформированное состояние системы основа–покрытие зависят от упругих характеристик и угла свободной кромки покрытия.

2. С уменьшением угла кромки понижаются степень сингулярности полей напряжений и концентрация напряжений в системе основа–покрытие.

3. Изменяя технологические параметры напыления покрытий и угла свободной кромки, можно влиять на напряженно-деформированное состояние системы основа–покрытие.

Резюме

Розв'язується задача теорії пружності для системи основа–покриття за різних конфігурацій вільного краю покриття. Розглянуто бігармонічне рівняння теорії пружності в полярних координатах, для розв'язку якого запро-

поновано використовувати функцію Ері. Отримано залежності коефіцієнта сингулярності від співвідношення пружних характеристик і конфігурації вільного краю покриття. Знайдено порядок сингулярності полів напружень для плазових покриттів. Показано, що в окремих випадках задача вироджується в задачу механіки руйнування або в задачу теорії пружності для однорідних клинів та вирізів.

1. *Chan W. S.* Design approaches for edge delamination resistance in laminated composites // *J. Comp. Technol. Res.* – 1991. – **13**, No. 2. – P. 91 – 96.
2. *Reedy E. D., Jr. and Guess T. R.* Butt tensile joint strength: interface corner stress intensity factor prediction // *J. Adhesion Sci. Technol.* – 1995. – **9**. – P. 237 – 251.
3. *Reedy E. D., Jr.* Intensity of the stress singularity at the interface corner between a bonded elastic and rigid layer // *Eng. Fract. Mech.* – 1990. – **37**. – P. 575 – 583.
4. *Reedy E. D., Jr.* Intensity of the stress singularity at the interface corner of a bonded elastic layer subjected to shear // *Ibid.* – 1991. – **38**. – P. 273 – 281.
5. *Уманский Э. С., Ляшенко Б. А.* Условия адгезионной и когезионной равнопрочности жаростойких покрытий // *Косм. исследования на Украине.* – 1975. – Вып. 6. – С. 58 – 64.
6. *Ляшенко Б. А., Шаривкер С. Ю., Цыгулев О. В. и др.* Методика определения механических характеристик композиции металл-защитное покрытие // *Пробл. прочности.* – 1989. – № 8. – С. 113 – 115.
7. *Веремчук В. С.* К определению прочностных характеристик элементов конструкций с покрытием повышенной деформативности // *Там же.* – 1986. – № 11. – С. 92 – 97.
8. *Веремчук В. С.* Напряженно-деформированное состояние элементов конструкций с покрытием при наличии пластических деформаций // *Там же.* – № 12. – С. 47 – 52.
9. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* – 1952. – **19**. – P. 526 – 528.
10. *Bogy D. B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *Ibid.* – 1968. – **35**. – P. 460 – 466.
11. *Hein V. L.* Stress singularities in a two-material wedge // *Int. J. Fract. Mech.* – 1971. – **7**, No. 3. – P. 317 – 330.
12. *Bogy D. B. and Wang K. C.* Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar materials // *J. Solids Struct.* – 1971. – **7**. – P. 993 – 1005.
13. *Dempsey J. P. and Sinclair G. B.* On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge // *J. Elast.* – 1979. – **9**. – P. 373 – 391.
14. *Dempsey J. P. and Sinclair G. B.* On the singular behavior at the vertex of a bimaterial wedge // *Ibid.* – 1981. – **11**. – P. 317 – 327.
15. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

16. *Ляшенко Б. А., Веремчук В. С., Долгов Н. А., Иванов В. М.* Исследование прочностных и деформационных свойств композиций с плазмонапыленными покрытиями // Пробл. прочности. – 1996. – № 6. – С. 57 – 59.
17. *Долгов Н. А., Ляшенко Б. А.* Влияние коэффициента Пуассона на предельное напряженное состояние покрытия // Там же. – 2002. – № 1. – С. 71 – 77.

Поступила 12. 03. 2003