

Критерий локальной прочности

С. В. Сукнев

Институт горного дела Севера СО РАН, Якутск, Россия

Предложен локальный критерий хрупкой прочности структурно-неоднородных материалов, базирующийся на масштабном эффекте механических свойств материала в условиях концентрации напряжений. Функция локальной прочности материала предполагается зависящей от масштабного параметра, представляющего собой отношение размера зоны концентрации напряжений к характерному размеру структуры материала. Рассмотрена задача о прочности твердого тела при растяжении, содержащего концентратор напряжений произвольных размеров и формы, включая предельный случай вырождения гладкого концентратора в прямолинейную или круглую трещину. Сформулированы требования к поведению критического напряжения и критического размера дефекта и определен вид функции локальной прочности. Для разрушающего напряжения получены выражения интерполяционного вида и проведено сопоставление расчетных данных с известными экспериментальными.

Ключевые слова: прочность, разрушение, масштабный эффект, нелокальный критерий, концентрация напряжений, характерный размер, отверстие, дефект.

Введение. Механические свойства таких структурно-неоднородных материалов, как графит, чугун, высокопрочные металлические сплавы, керамика, композиты, подвержены сильному влиянию масштабного фактора, т.е. существенно зависят от нагруженного объема. Наиболее сильно масштабный эффект проявляется в условиях концентрации напряжений, когда эффективный нагруженный объем определяется зоной концентрации напряжений, размер которой мал по сравнению с размерами образцов, используемых для определения стандартных механических свойств материала. В этом случае область применения традиционного подхода к расчетам конструкций на прочность, который заключается в сопоставлении возникающих в деформируемом теле внутренних напряжений с некоторым предельным значением, весьма ограничена. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_e < \sigma_0, \quad (1)$$

где σ_e – эквивалентное напряжение, характеризующее внутреннее напряженное состояние тела и в общем случае являющееся функцией компонент тензора напряжений σ_{ij} , $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$; σ_0 – предельное напряжение, характеризующее стандартные (усредненные) механические свойства тела, $\sigma_0 = \text{const}$.

В соответствии с традиционным подходом критическое напряжение σ_c , при котором в наиболее напряженной точке тела достигается предельное состояние, определяется выражением

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{K_t}, \quad (2)$$

где K_t – коэффициент концентрации напряжений, характеризующий отношение эквивалентного напряжения σ_e в наиболее напряженной точке тела к приложенному напряжению σ . Поскольку величина σ_0 определяется по результатам испытаний стандартных образцов в условиях однородного напряженного состояния, область применения традиционного подхода ограничена невысокими значениями K_t , когда размер зоны концентрации напряжений достаточно велик и сопоставим с размерами стандартных образцов, чтобы полагать $\sigma_0 = \text{const}$. Кроме того, применение выражения (2) для тела с трещиной приводит к нулевому значению критического напряжения, что противоречит действительности. Известно [1], что σ_c в этом случае имеет вполне определенное конечное значение, зависящее от длины трещины. Поэтому для оценки критического напряжения тела с трещиной используется подход линейной механики разрушения, в соответствии с которым предельное состояние оценивается на основе анализа особенности распределения напряжений вблизи трещины. Условие прочности записывается в виде

$$K < K_c, \quad (3)$$

где K – коэффициент интенсивности напряжений; K_c – его критическое значение, характеризующее локальные свойства материала.

Для прямолинейной трещины нормального отрыва длиной $l = 2a$ коэффициент интенсивности напряжений

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (4)$$

Таким образом, в соответствии с подходом линейной механики разрушения критическое напряжение

$$\sigma_c = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}. \quad (5)$$

Данный подход получил широкое распространение. Однако область его применения ограничена из-за наличия очень острых концентраторов, когда характер распределения напряжений позволяет отнести их к концентраторам типа трещин.

Указанные ограничения приводят к тому, что области практического применения подходов классической механики и механики разрушения различные. Первый подход используется при проектировании конструкции. Его задача заключается в оптимизации ее формы с целью максимально возможного снижения концентрации напряжений. Второй подход применяется на стадии эксплуатации конструкции, когда ставится задача оценки ее остаточного ресурса с учетом влияния имеющихся в конструкции дефектов, наибольшую опасность из которых представляют дефекты типа трещин. Проблема состоит в том, что большая часть конструктивных, технологических и эксплуатационных дефектов и концентраторов напряжений с высоким, но конечным значением коэффициента концентрации оказываются вне области применения этих подходов. Поэтому задача разработки новых подходов к расчетам конструкций на прочность, позволяющих учесть весь спектр кон-

центраторов напряжений и с единых позиций подойти к расчету конструкций с тупым концентратором напряжений и с трещиной, весьма актуальна.

В настоящее время интенсивно разрабатываются так называемые не-локальные критерии прочности [2–6], в частности интегральный критерий, или критерий средних напряжений. Этот критерий обычно связывают с именами Нейбера [7] и В. Новожилова [8], хотя идею усреднения напряжений в зоне их концентрации высказывали также Виегардт, Уитни, Нуисмер, Р. Вагапов, Ф. Диментберг, С. Серенсен и другие исследователи.

Интегральный критерий прочности имеет вид

$$\langle \sigma_e \rangle_d < \sigma_0, \quad (6)$$

где $\langle \sigma_e \rangle_d$ – значение эквивалентного напряжения, усредненного на расстоянии d по опасному сечению,

$$\langle \sigma_e \rangle_d = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_e(x) dx. \quad (7)$$

Размер усреднения d полагают новой константой материала. Он сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров конструктивного элемента.

Интегральный критерий применим как для гладких (тупых), так и для сингулярных (трещиноподобных) концентраторов напряжений. В отличие от традиционных критериев прочности, интегральный критерий дает конечное значение критического напряжения при $K_t \rightarrow \infty$. Для прямолинейной трещины длиной $l = 2a$ в пластине, к которой на бесконечности приложено равномерное растягивающее напряжение σ , распределение нормальных напряжений σ_y в опасном сечении имеет вид [9]

$$\sigma_y = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7) и приравняв результат интегрирования к σ_0 , получим

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + l/d}}. \quad (9)$$

Формула (8) является точной, поэтому в рамках интегрального критерия нет необходимости вводить понятие коэффициента интенсивности напряжений, которое является ключевым в линейной механике разрушения. Для длинных трещин ($l \gg d$) формула (9) совпадает с формулой (5), полученной в рамках подхода линейной механики разрушения.

В то же время из (9) следует, что образование в пластине любой сколь угодно малой трещины приводит к снижению ее прочности. Аналогичный вывод имеет место для твердого тела, содержащего искусственный дефект

произвольной формы, что не согласуется с современными представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной дефектностью [10]. Поэтому малые искусственные дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не влияют на его прочность до тех пор, пока их размеры не достигнут определенного (критического) значения. В рамках интегрального критерия задача определения критического размера дефекта не может быть поставлена. Это относится также к другим нелокальным критериям, если только в них не будет введен дополнительный размерный параметр, например, как в [11].

Таким образом, нелокальные критерии прочности, общим свойством которых является введение характерного размера материала, позволяют описать масштабный эффект в условиях концентрации напряжений, что свидетельствует о расширении области их применения по сравнению с традиционными критериями. Однако использование нелокальных критериев для оценки опасности малых технологических и эксплуатационных дефектов может привести к существенной погрешности.

Задача определения критического размера дефекта может быть поставлена в рамках статистических теорий прочности, например теории Вейбулла [12]. При неоднородном распределении напряжений по объему тела теория Вейбулла предсказывает увеличение максимального разрушающего напряжения σ_0^* по сравнению с прочностью σ_0 при однородном распределении напряжений:

$$\sigma_0^* = \sigma_0 \left(\frac{V}{V_e} \right)^{1/m}, \quad 0 < V_e \leq V, \quad (10)$$

где V – объем всего тела; V_e – эффективный нагруженный объем [13],

$$V_e = \int_V \left(\frac{\sigma_e(r)}{\sigma_{\max}} \right)^m dV; \quad (11)$$

σ_{\max} – максимальное эквивалентное напряжение в объеме V ; m – параметр гомогенности материала.

Критический нагруженный объем V_c определяется из условия $\sigma_c = \sigma_0$. Подставляя σ_0^* вместо σ_0 в формулу (2) и приравнявая σ_c к σ_0 , с учетом (10) получаем

$$V_c = \frac{V}{(K_t)^m}. \quad (12)$$

Критический размер дефекта

$$l_c \sim (V_c)^{1/n_d} \quad (n_d = 1, 2 \text{ или } 3), \quad (13)$$

где n_d – размерность задачи.

Убывающая в соответствии с выражениями (12) и (13) зависимость l_c от K_t представляется вполне закономерной. В противном случае менее острые концентраторы становились бы более опасными в результате уменьшения критического размера. Однако в пределе $K_t \rightarrow \infty$ имеем $l_c = 0$, что, конечно, не соответствует действительности. Кроме того, определенная по формуле (13) величина l_c зависит от размеров тела, т.е. не есть характеристикой материала. Это является следствием того, что выражение (10) не содержит размерных параметров структуры материала. Отсутствие в теории Вейбулла характерного размера структуры – основное препятствие для ее распространения на квазихрупкие материалы [14].

Постановка задачи. Исследовалось линейно-упругое твердое тело с распределенными в нем дефектами структуры, которое подвергается простому нагружению. При этом определяется критическое значение приложенной нагрузки, соответствующее достижению в теле предельного состояния (разрушение). После образования в теле нового дефекта определенного размера и формы, который рассматривается как концентратор напряжений, также определяется критическое значение приложенной нагрузки. Необходимо найти ответ на следующие вопросы.

1. Какова область допустимых размеров дефекта данной формы, образование которого в исследуемом теле не приводит к снижению критической нагрузки.

2. Насколько снижается критическая нагрузка, если размеры дефекта превышают допустимые.

Цель работы заключается в формулировке критерия прочности, применимого для исследования концентраторов напряжений любого типа – как гладких, так и сингулярных.

Функция локальной прочности. Для формулировки критерия локальной прочности предлагается использовать подход [15], в соответствии с которым локальная прочность материала (максимальное разрушающее напряжение) σ_0^* в условиях концентрации напряжений предполагается зависящей не только от нагруженного объема, как в статистических теориях прочности, но и от характерного размера структуры материала. Как отмечалось выше, эффективный нагруженный объем в этих условиях определяется размером зоны концентрации напряжений, который обозначим L_e . Если он достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала, т.е. заведомо выполняются условия усреднения механических свойств, то величина локальной прочности мало отличается от σ_0 . И наоборот, если размер L_e сопоставим с размерами структурных элементов, их влияние на локальную прочность становится заметным. Причем это влияние тем сильнее, чем меньше размер L_e по отношению к характерному размеру структуры материала L_0 . Таким образом, локальная прочность материала должна зависеть не просто от размера зоны концентрации напряжений L_e , а от соотношения L_0/L_e . Данное соотношение определяет масштабный параметр в рассматриваемой задаче. С учетом этого функцию локальной прочности представим в виде

$$\sigma_0^* = f(\sigma_0, L_0/L_e). \quad (14)$$

Критерий разрушения может быть сформулирован следующим образом: предельное состояние (разрушение) в области концентрации напряжений наступает тогда, когда эквивалентное напряжение достигает величины локальной прочности материала, которая зависит от масштабного параметра, представляющего собой отношение размера зоны концентрации напряжений к характерному размеру структуры материала. Условие локальной прочности имеет вид

$$\sigma_e < \sigma_0^*, \quad (15)$$

где σ_0^* определяется по выражению (14).

Чтобы установить вид функции локальной прочности $f(\sigma_0, L_0/L_e)$, необходимо сформулировать дополнительные условия, отражающие специфику данной задачи. В качестве базовой рассмотрим задачу об одноосном растяжении твердого тела (двухмерного или трехмерного), содержащего гладкий концентратор напряжений, симметричный относительно оси растяжения и вырождающийся в трещину при $K_t \rightarrow \infty$ (рис. 1).

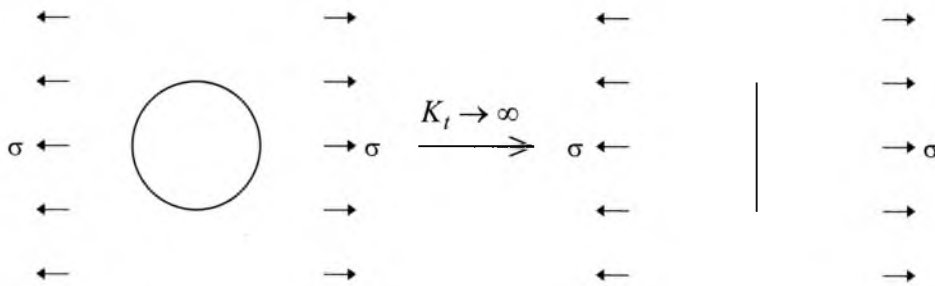


Рис. 1. Растяжение твердого тела с гладким концентратором напряжений.

Исследуем концентраторы, для которых K_t является достаточно быстро возрастающей функцией параметра l/ρ (l – размер концентратора в опасном сечении; ρ – радиус кривизны контура концентратора в опасной точке):

$$f_t' > 0, \quad K_t = f_t(l/\rho); \quad (16)$$

$$g_t' > 0, \quad (17)$$

где $g_t(\xi) = \xi \frac{f_t'(\xi)}{f_t(\xi)}$ – вспомогательная функция параметра $\xi = l/\rho$, характеризующая скорость изменения функции f_t .

Условиям (16), (17) отвечает, например, функция

$$f_t = 1 + (\alpha l/\rho)^n, \quad (18)$$

где $\alpha > 0$ и $n > 0$ – числовые параметры.

Для критического напряжения $\sigma_c = f(\sigma_0, L_0/L_e)/K_t$ в результате асимптотического анализа его поведения можно записать

$$\sigma_c = \sigma_0 \quad \text{при} \quad K_t = 1; \quad (19)$$

$$\sigma_c \rightarrow \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad K_t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Требование (19) обеспечивает связь критерия (15) с традиционным критерием (1) в случае однородного напряженного состояния. Требование (20) отражает хорошо известный экспериментальный факт: независимо от остроты надреза и величины теоретического коэффициента концентрации напряжений тело разрушается при конечной нагрузке, о чем говорилось выше. Это требование фактически обеспечивает связь критерия (15) с линейной механикой разрушения.

Кроме требований (19), (20) запишем требование монотонного убывания критического напряжения с ростом K_t :

$$\frac{d\sigma_c}{dK_t} \leq 0, \quad 1 \leq K_t < \infty. \quad (21)$$

Знак равенства в выражении (21) соответствует случаю, когда размер дефекта не превышает критический, а константа в выражении (20) равна σ_0 .

Для геометрически подобных концентраторов критическое напряжение уменьшается с ростом их размера, так как увеличивается эффективный нагруженный объем:

$$\frac{d\sigma_c}{dl} < 0 \quad \text{при} \quad l \geq l_c \quad \text{и} \quad K_t = \text{const}. \quad (22)$$

Для дефектов любой формы в соответствии с определением критического размера дефекта имеем

$$\sigma_c = \sigma_0 \quad \text{при} \quad l = l_c. \quad (23)$$

Условия, аналогичные (20) и (21), должны быть также наложены на поведение критического размера дефекта l_c в зависимости от K_t :

$$l_c \rightarrow \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad K_t \rightarrow \infty; \quad (24)$$

$$\frac{dl_c}{dK_t} \leq 0, \quad 1 \leq K_t < \infty. \quad (25)$$

Требования (21) и (25) свидетельствуют о том, что с увеличением остроты дефекта возрастает опасность его присутствия в теле как с точки зрения

критического напряжения, так и критического размера. В то же время, как следует из условий (20) и (24), даже для тела с трещиной эти величины принимают ненулевые конечные значения. В соответствии с требованиями (24) и (25) представим l_c в виде

$$l_c = l_0 \left(1 + \frac{\beta}{K_t} \right), \quad (26)$$

где l_0 – критический размер дефекта в виде трещины; $\beta \geq 0$ – числовой параметр.

Теперь оценим параметры L_0 и L_e , входящие в функцию локальной прочности. В рассматриваемой задаче локальное распределение напряжений зависит от радиуса кривизны концентратора больше, чем от других геометрических параметров [7, 16, 17]. Поэтому в первом приближении для оценки L_e можно использовать радиус кривизны концентратора ρ в опасной точке. Величину L_0 оценим по критическому размеру дефекта l_c . Представим функцию $f(\sigma_0, L_0/L_e)$ в виде

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0 f(l_c/\rho). \quad (27)$$

Учет неравенств (16) и (17) для функции f_t показал, что для выполнения требований (19)–(23) достаточно взять в качестве $f(l_c/\rho)$ функцию f_t :

$$f(l_c/\rho) = f_t(l_c/\rho). \quad (28)$$

А поскольку условие (23) должно выполняться для любых ρ , то функция (28) также является единственной.

Критерий локальной прочности с учетом (27) и (28) принимает вид

$$\sigma_e < \sigma_0 f_t(l_c/\rho). \quad (29)$$

Следовательно, локальная прочность и критическое напряжение определяются соответственно по выражениям

$$\sigma_0^* = \sigma_0 f_t(l_c/\rho); \quad (30)$$

$$\sigma_c = \sigma_0 \frac{f_t(l_c/\rho)}{f_t(l/\rho)}, \quad l > l_c, \quad (31)$$

а отношение $K_{eff} = \frac{f_t(l/\rho)}{f_t(l_c/\rho)}$ можно рассматривать как эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Критическое напряжение. Рассмотрим некоторые примеры использования выражения (31) для оценки критического (разрушающего) напряжения.

Растяжение пластины с эллиптическим вырезом. Задача о напряженном состоянии бесконечной изотропной пластины с эллиптическим отверстием при равномерном (на бесконечности) одноосном растяжении аналитически решена в [18, 19]. Для такой пластины коэффициент концентрации напряжений будет

$$K_t = 1 + \sqrt{2 \frac{l}{\rho}}, \quad (32)$$

для ортотропной пластины [20] –

$$K_t = 1 + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{E_x}{E_y} - \nu_{xy} + \frac{E_x}{2G_{xy}}} \right) \frac{l}{\rho}}, \quad (33)$$

где E_x , E_y , G_{xy} и ν_{xy} – упругие постоянные материала пластины. В общем случае коэффициент концентрации напряжений можно представить в виде

$$K_t = 1 + \sqrt{\alpha \frac{l}{\rho}}, \quad (34)$$

где α – числовой коэффициент, зависящий от упругих постоянных материала и размеров пластины.

Поправка на конечные размеры пластины осуществляется по приближенным формулам или по номограммам, приведенным в справочной литературе, например в [21]. Формула (34) применяется также для “эквивалентного эллипса”, образованного двумя круговыми отверстиями, которые соединены пазом, в частности для щели с закругленными краями. Параметры l и ρ эквивалентного эллипса соответствуют длине паза и радиусу отверстий. Кроме того, формула (34) применяется для широкой пластины с боковыми вырезами, цилиндрического стержня с мелким кольцевым надрезом или малым поперечным отверстием, а также для многих других практически важных случаев [21].

С учетом формул (31) и (34) критическое напряжение принимает вид

$$\sigma_c = \sigma_0 \left(\frac{1}{K_t} + \sqrt{\frac{l_c}{l} \left(1 - \frac{1}{K_t} \right)} \right), \quad l > l_c. \quad (35)$$

Если $l \leq l_c$, то $\sigma_c = \sigma_0$. Критический размер l_c определяется по выражению (26). Для получения нижних оценок l_c и σ_c , идущих в запас прочности, параметр β в формуле (26) следует принять равным нулю.

Выразим критический размер трещины l_0 (26) через критический коэффициент интенсивности напряжений K_c , используя условие (23) и формулу (5):

$$l_0 = \frac{2K_c^2}{\pi\sigma_0^2}. \quad (36)$$

Подставив выражение (36) в формулу (35), с учетом (26) получим

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{K_t} + \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}} \varphi(K_t), \quad (37)$$

где

$$\varphi(K_t) = \left(1 - \frac{1}{K_t}\right) \sqrt{1 + \frac{\beta}{K_t}}. \quad (38)$$

Выражение (37), по сути, представляет собой интерполяционную формулу для σ_c , а $\varphi(K_t)$ – интерполирующую функцию, определенную в интервале $1 \leq K_t < \infty$ и удовлетворяющую граничным условиям $\varphi(1) = 0$ и $\varphi(\infty) = 1$. При $K_t \approx 1$ величина критического напряжения определяется преимущественно первым слагаемым в выражении (37), что соответствует расчету по классическим критериям, при $K_t \gg 1$ – вторым слагаемым, что соответствует расчету по критериям линейной механики разрушения. При произвольном K_t присутствуют оба слагаемых. Таким образом, выражение (37) может быть использовано для оценки критических напряжений в пластинах с произвольными концентраторами напряжений, включая концентраторы типа трещин. Заметим, что в таком представлении концентратор не обязательно должен иметь эллиптическую форму.

Растяжение неограниченного тела с эллипсоидальной полостью. Задача о напряженном состоянии неограниченного изотропного тела с эллипсоидальной полостью при равномерном (на бесконечности) одноосном растяжении аналитически решена Нейбером [7]. Поскольку полость представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси нагружения, в сечении, проходящем через эту ось, она имеет вид эллипса. Данная задача является трехмерным аналогом задачи о растяжении пластины с эллиптическим отверстием. При $K_t \rightarrow \infty$ эллипсоид вырождается в дискообразную (круглую) трещину радиуса a . Коэффициент концентрации напряжений

$$K_t = \frac{1 - \nu - (1,5 - \nu)a/\rho + 2(a/\rho)^2 + (\nu - (1,5 + \nu)a/\rho)ac/\rho}{1 - \nu + a/\rho + (a/\rho - 2 + 2\nu)ac/\rho - (1 + \nu)(ac/\rho)^2}, \quad (39)$$

где

$$c = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{a/\rho - 1}}{\sqrt{a/\rho - 1}}, \quad \text{если } a/\rho > 1$$

или

$$c = \frac{\ln(1 + \sqrt{1 - a/\rho}) - (1/2)\ln(a/\rho)}{\sqrt{1 - a/\rho}}, \quad \text{если } a/\rho < 1;$$

 ν – коэффициент Пуассона.Если $\rho = a$, то получим

$$K_t = \frac{3(9 - 5\nu)}{2(7 - 5\nu)}. \quad (40)$$

Для инженерных расчетов можно использовать приближенную формулу

$$K_t = 1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}}. \quad (41)$$

Формула (41) удобна тем, что она нечувствительна к значению ν и имеет правильную асимптотику при вырождении эллипсоида в круглую трещину. Графики K_t , рассчитанные по формулам (39) и (41) при $\nu = 0,2$, приведены на рис. 2. Поскольку значения K_t , полученные по формуле (41), несколько завышены по сравнению с точным решением, расчет критической нагрузки с ее использованием идет в запас прочности.

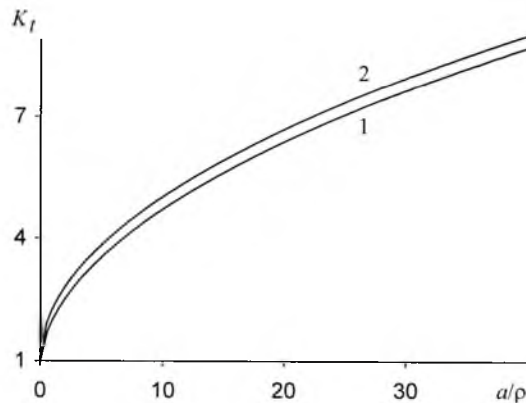


Рис. 2. Зависимость коэффициента концентрации напряжений K_t от параметра a/ρ : 1, 2 – расчет по формулам соответственно (39) и (41).

Критическое напряжение определяется по формуле (31) с учетом (39) и (40), размер l_c – по формуле (26), где l_0 представляет собой критический размер дефекта в виде круглой трещины.

Для приближенного расчета σ_c можно использовать формулу (41). В этом случае критическое напряжение определяется по выражению (35). Если учесть, что для круглой трещины при растяжении коэффициент интенсивности напряжений равен [22]

$$K = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (42)$$

и в соответствии с подходом линейной механики разрушения критическое напряжение

$$\sigma_c = \frac{K_c}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (43)$$

то, выразив критический размер (диаметр) круглой трещины l_0 через K_c (используются условие (23) и формула (43)) и подставив полученное выражение

$$l_0 = \frac{\pi K_c^2}{2\sigma_0^2} \quad (44)$$

в формулу (35), с учетом (26) получим

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{K_t} + \frac{K_c}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \varphi(K_t), \quad (45)$$

где функция $\varphi(K_t)$ определяется по выражению (38).

Формула (45) аналогична (37), полученной при рассмотрении плоской задачи. При этом следует уточнить, что в отличие от (37) она является приближенной.

Таким образом, с точки зрения проведения расчетов на прочность предложенный критерий можно приближенно представить как некоторое объединение подходов классической механики и механики разрушения, а для оценки критического (разрушающего) напряжения использовать интерполяционные формулы (37) и (45). Причем для получения нижней оценки критического напряжения, идущей в запас прочности, не требуется определять новые константы материала, кроме стандартного предела прочности и критического коэффициента интенсивности напряжений.

Сопоставление результатов расчета критического напряжения с экспериментальными данными. *Пластина с круговым отверстием при растяжении.* Прочность пластин с круговыми отверстиями различного диаметра, изготовленных из тканого эпоксидного стеклопластика, исследовалась в [23]. Материал пластин полагали квазиизотропным. На рис. 3,а приведены полученные при испытании пластин шириной 20 мм экспериментальные данные (точки), аппроксимированные функцией (35) (сплошная линия). При этом определялся критический размер (диаметр) отверстия $l_c = 0,7$ мм. В [24] испытывались пластины из эпоксидного углепластика с квазиизотропной укладкой слоев с круговыми отверстиями. На рис. 3,б экспериментальные данные (точки) аппроксимированы функцией (35) (сплошная линия). Критический размер l_c составил 0,8 мм. В этой же работе приведены данные о прочности ортотропных пластин из эпоксидного углепластика с круговыми отверстиями ($K_t = 3,44$). На рис. 3,в экспериментальные данные (точки) аппроксимированы функцией (35) (сплошная линия). Критический размер $l_c = 1,6$ мм.

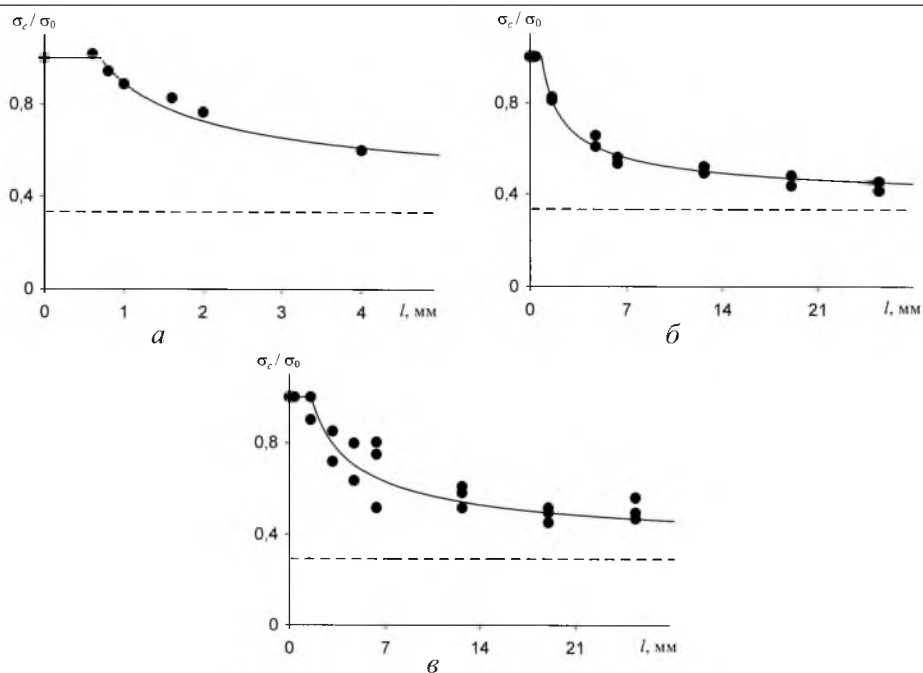


Рис. 3. Зависимость критического напряжения σ_c/σ_0 от размера отверстия при растяжении пластин из эпоксидного стеклопластика (а) и эпоксидного углепластика (б, в) с круговым отверстием. (Здесь и на рис. 4, 5: штриховые линии – расчет по формуле (2) в соответствии с традиционным подходом; сплошные линии – данные эксперимента.)

Пластина с боковыми вырезами при растяжении. В работе [23] приведены данные о прочности пластин из эпоксидного стеклопластика шириной 20 мм с симметричными боковыми U-образными вырезами глубиной $a = 3$ мм и радиусом закругления в вершине $\rho = 0,08-5$ мм. Для этих вырезов может быть введено понятие “эквивалентного эллиптического отверстия” [21] размером $l = 2a$, и для определения коэффициента концентрации напряжений K_t применена формула (32). На рис. 4 приведена зависимость критического напряжения σ_c/σ_0 от K_t (сплошная линия), рассчитанная по формуле (35) при значении критического размера дефекта $l_c = 0,7$ мм, которое было определено ранее на образцах с круговыми отверстиями (рис. 3,а).

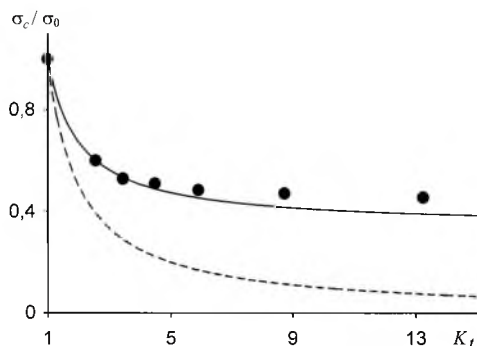


Рис. 4. Зависимость критического напряжения σ_c/σ_0 от коэффициента концентрации напряжений K_t при растяжении пластин из эпоксидного стеклопластика с боковыми вырезами.

Стержень с поперечным отверстием при растяжении. В работе [25] представлены данные о прочности полых цилиндрических стержней с наружным диаметром 20 мм и внутренним диаметром 16 мм, изготовленных из графита. Образцы имели круговое отверстие диаметром $l = 0,4-2,8$ мм. Коэффициент концентрации напряжений определялся по формуле (32) с погрешностью не более 9% [21]. На рис. 5,а приведены экспериментальные данные (точки), аппроксимированные с помощью функции (35) (сплошная линия). Критический размер l_c составил 0,6 мм. В [26] испытывали сплошные цилиндрические графитовые стержни диаметром $D = 10, 20$ и 30 мм с круговыми отверстиями различного диаметра l . Для образцов с $l/D \leq 0,15$ коэффициент концентрации напряжений определялся по формуле (32) с погрешностью не более 13% [21]. Рис. 5,б иллюстрирует экспериментальные данные (точки) по прочности образцов, аппроксимированные функцией (35) (сплошная линия). Критический размер $l_c = 0,7$ мм.

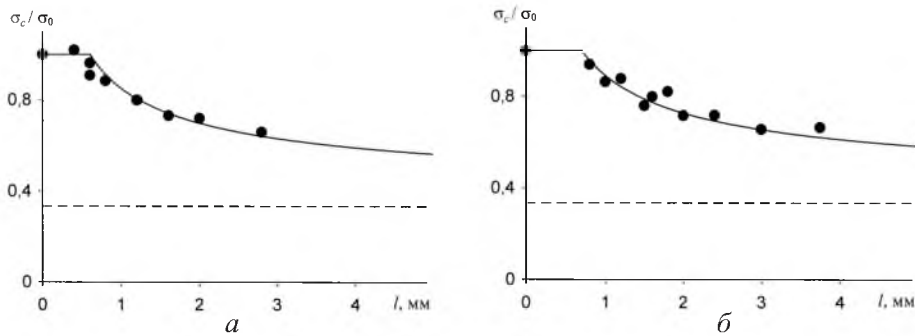


Рис. 5. Зависимость критического напряжения σ_c/σ_0 от размера отверстия при растяжении полых (а) и сплошных (б) цилиндрических графитовых стержней с круговым отверстием.

Стержень с кольцевым надрезом при растяжении. В [27] исследовалась прочность цилиндрических стержней из высокопрочной стали с кольцевым надрезом. Надрез глубиной $a = 2$ мм имел V-образную форму с углом раствора $\psi = 60^\circ$ и радиусом закругления в вершине $\rho = 0,044-2,1$ мм. Диаметр стержней составлял 8,5 мм. На рис. 6 представлены результаты расчета разрушающего напряжения σ_c по формуле (37) – кривая 1 при $\beta = 0$ и заданных значениях σ_0 и K_c (с учетом геометрии стержня [22]).

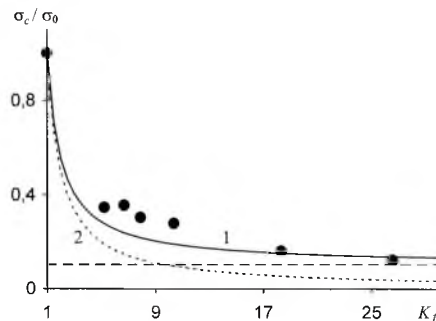


Рис. 6. Зависимость критического напряжения σ_c/σ_0 от коэффициента концентрации напряжений K_t при растяжении цилиндрических стержней из высокопрочной стали с кольцевым надрезом.

Критический размер l_0 , рассчитанный по формуле (36) с учетом геометрии стержня, составил 0,12 мм. Штриховой линией проведена асимптота, соответствующая пределу механики разрушения. Кривая 2 рассчитана по формуле (2) в соответствии с традиционным подходом. Экспериментальные данные представлены точками.

Во всех рассмотренных примерах результаты расчета σ_c по критерию локальной прочности хорошо согласуются с экспериментальными данными и свидетельствуют о преимуществе предложенного подхода перед традиционным.

Заключение. Для оценки хрупкой прочности структурно-неоднородных материалов (высокопрочные металлические сплавы, керамика, композиты и др.) предложен критерий, базирующийся на масштабном эффекте механических свойств материала в условиях концентрации напряжений. Предполагается, что локальная прочность материала в зоне концентрации напряжений зависит от размера зоны и внутреннего размера материала, характеризующего его структуру. Отношение этих размеров определяет масштабный параметр в рассматриваемой задаче, который и является критическим для критерия локальной прочности. Функция локальной прочности материала определяется на основании анализа поведения критического напряжения и критического размера дефекта при изменении коэффициента концентрации напряжений от малых ($K_t \approx 1$) до предельно высоких ($K_t \rightarrow \infty$) значений. Показано, что для базовой задачи об одноосном растяжении твердого тела, содержащего гладкий концентратор напряжений, функция локальной прочности может быть однозначно определена, если коэффициент концентрации напряжений является достаточно быстро возрастающей функцией безразмерного параметра, представляющего собой отношение размера концентратора и радиуса кривизны его контура в опасной точке.

Для критического (разрушающего) напряжения получено простое выражение интерполяционного вида, позволяющее проводить расчеты на прочность во многих практически важных случаях, причем для получения нижней оценки, идущей в запас прочности, не требуется определения новых констант материала, кроме стандартных механических свойств. Проведено сопоставление результатов расчета разрушающего напряжения с известными экспериментальными данными, полученными на образцах из высокопрочной стали, графита, стекло- и углепластиков с различными концентраторами напряжений, которое свидетельствует об их хорошем соответствии.

Резюме

Запропоновано локальний критерій хрупкої міцності структурно-неоднорідних матеріалів, що базується на масштабному ефекті механічних властивостей матеріалу в умовах концентрації напружень. Згідно із запропонованим критерієм функція локальної міцності матеріалу припускається залежною від масштабного параметра, що представляє собою відношення розміру зони концентрації напружень до характерного розміру структури матеріалу. Розглянуто задачу щодо міцності твердого тіла при розтязі з концентратором напружень довільних розмірів і форми, включаючи граничний

випадок виродження гладкого концентратора в прямолінійну або круглу тріщину. Сформульовано вимоги до поведінки критичного напруження і критичного розміру дефекта та визначено вид функції локальної міцності. Для руйнівного напруження отримано вирази інтерполяційного виду і проведено зіставлення розрахункових даних із відомими експериментальними.

1. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
2. *Seweryn A. and Mroz Z.* A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **51**, No. 6. – P. 955 – 973.
3. *Mikhailov S. E.* A functional approach to non-local strength condition and fracture criteria // *Ibid.* – **52**, No. 4. – P. 731 – 754.
4. *Dyskin A. V.* Crack growth criteria incorporating non-singular stresses: Size effect in apparent fracture toughness // *Int. J. Fract.* – 1997. – **83**, No. 2. – P. 191 – 206.
5. *Isupov L. P. and Mikhailov S. E.* A comparative analysis of several nonlocal fracture criteria // *Arch. Appl. Mech.* – 1998. – **68**, No. 9. – P. 597 – 612.
6. *Seweryn A.* A non-local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria // *Eng. Fract. Mech.* – 1998. – **59**, No. 6. – P. 737 – 760.
7. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
8. *Новожилов В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *Прикл. математика и механика.* – 1969. – **33**, вып. 2. – С. 212 – 222.
9. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 364 с.
10. *Shaw M. C.* A critical review of mechanical failure criteria // *Trans. ASME., J. Eng. Mater. Technol.* – 1984. – **106**, No. 3. – P. 219 – 226.
11. *Милейко С. Т., Хохлов В. К., Сулейманов Ф. Х.* Разрушение композитного материала с макродефектом // *Механика композитных материалов.* – 1981. – № 2. – С. 358 – 362.
12. *Weibull W.* A statistical theory of the strength of materials // *Ingeniors Vetenskaps Akademien. Handlingar.* – 1939. – No. 151. – P. 1 – 45.
13. *Новиков Н. В., Левитас В. И., Шестаков С. И.* Численное моделирование прочности и долговечности конструкций с учетом масштабного эффекта. Сообщ. 1. Обоснование критерия прочности и долговечности // *Пробл. прочности.* – 1991. – № 5. – С. 37 – 43.
14. *Vazant Z. P.* Size effect on structural strength: a review // *Arch. Appl. Mech.* – 1999. – **69**, No. 9/10. – P. 703 – 725.
15. *Сукнев С. В., Новопашин М. Д.* Определение локальных механических свойств материалов // *Докл. АН РФ.* – 2000. – **373**, № 1. – С. 48 – 50.

16. *Leven M. M.* Stress gradients in grooved bars and shafts // Proc. SESA. – 1955. – **13**, No. 1. – P. 207 – 213.
17. *Израилов Ю. Л.* Распределение и градиент напряжений в двухмерных телах с надрезами // Пробл. прочности. – 1982. – № 4. – С. 70 – 74.
18. *Колосов Г. В.* Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. – Юрьев: Типография К. Маттисена, 1909. – 187 с.
19. *Inglis C. E.* Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Trans. Inst. Naval Arch. – 1913. – **105**, pt 1. – P. 219 – 230.
20. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
21. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. – М.: Мир, 1977. – 304 с.
22. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 1016 с.
23. *Hyakutake H., Hagio T., and Nisitani H.* Fracture of FRP plates containing notches or a circular hole under tension // Int. J. Pres. Ves. Piping. – 1990. – **44**, No. 3. – P. 277 – 290.
24. *Daniel I. M.* The behavior of uniaxially loaded graphite/epoxy plates with holes // 2nd Int. Conf. on Composite Materials. – Toronto, 1978. – P. 1019 – 1034.
25. *Sato Y., Ohe K., and Nagai F.* Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. Ser. A. – 1980. – **46**, No. 406. – P. 557 – 563.
26. *Imamura S. and Sato Y.* Fracture of a graphite solid cylinder with a transverse hole in tension // Coll. Eng. Nihon Univ. Ser. A. – 1987. – **28**. – P. 51 – 55.
27. *Nisitani H. and Noguchi H.* Tensile fracture criterion of high strength steel specimens with a circumferential notch // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. Ser. A. – 1986. – **52**, No. 477. – P. 1286 – 1289.

Поступила 07. 07. 2003