

Влияние характера напряженного состояния на критическую нагрузку и несущую способность оболочек с осесимметричными вмятинами

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Предлагается методика приближенного определения критических напряжений упругих оболочек по форме близких к цилиндрическим с использованием уравнений в перемещениях. Получены аналитические выражения для оценки критических напряжений в безмоментных гладких оболочках. Проанализированы два случая распределения внутренних усилий: силы постоянной величины и переменной.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, несущая способность, критическая нагрузка, осесимметричная вмятина.

Введение. В настоящей работе исследуется влияние характера напряженного состояния на критические нагрузки и несущую способность цилиндрических оболочек с осесимметричными вмятинами.

Рассматривается цилиндрическая оболочка с осесимметричной начальной погибью, размещенной в произвольном месте по длине оболочки (рис. 1). Начало и конец ее задаются произвольными величинами l_1 и l_2 .

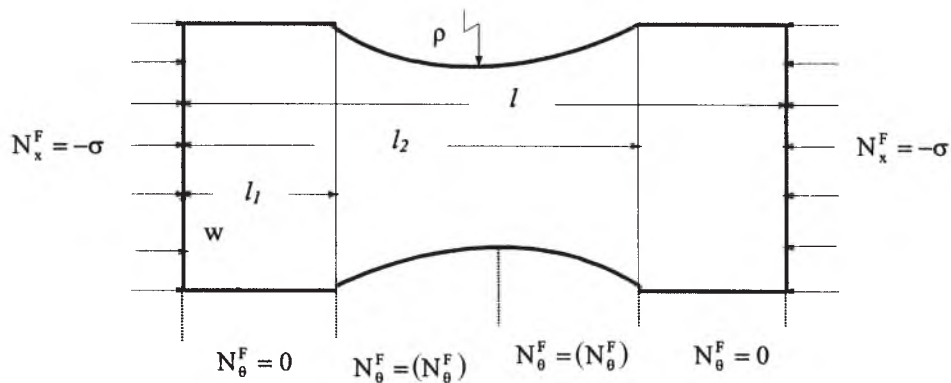


Рис. 1. Схема цилиндрической оболочки с вмятиной.

Часть оболочки длиной $l_2 - l_1$ вследствие наличия вмятины искривлена вдоль образующей по радиусу ρ и рассматривается как оболочка по форме близкая к цилиндрической с радиусами кривизн r и ρ . Глубина вмятины мала и сравнима с толщиной оболочки.

Используются методики, представленные в [1, 2–6]. Методики численного расчета несовершенных оболочек приведены ранее [7–9].

1. Процедура нахождения решений задач об устойчивости и несущей способности оболочек. Оболочка подвержена равномерному продольному сжатию, и в ней в безмоментном (основном) состоянии задано следующее распределение продольных N_x^F и окружных N_θ^F докритических усилий:

$$(N_x^F, N_\theta^F) = \begin{cases} -\sigma t, & 0 & \text{при } x \in [0, l_1] \text{ и } x \in [l_2, l]; \\ -\sigma t, & (N_\theta^F)_1 & \text{при } x \in \left[l_1, \frac{l_1 + l_2}{2} \right]; \\ -\sigma t, & (N_\theta^F)_2 & \text{при } x \in \left[\frac{l_1 + l_2}{2}, l_2 \right], \end{cases} \quad (1)$$

где $(N_\theta^F)_1 = \bar{r}\sigma t(1 + B_{11}X)$; $(N_\theta^F)_2 = \bar{r}\sigma t(1 - B_{11}X)$; $\bar{r} = \frac{r}{\rho}$; $X = \frac{2x}{ldl} - l_{12}$; $l_{12} = \frac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1}$; $dl = \frac{l_2 - l_1}{l}$; $B_{11} = 0$ или 1; если $B_{11} = 0$, получаем $(N_\theta^F)_1 = (N_\theta^F)_2 = N_\theta^F$, т.е. усилия постоянны по длине вмятины; если $B_{11} = 1$, то усилие $(N_\theta^F)_1$ линейно возрастает от нуля до N_θ^F , а усилие $(N_\theta^F)_2$ уменьшается от N_θ^F до нуля, т.е. $(N_\theta^F)_1$ и $(N_\theta^F)_2$ переменны по длине вмятины.

Используя принятые ранее [1] обозначения, введем величины:

$$\begin{aligned} N_x^F &= K(E_x^F + \mu E_\theta^F); & n_x'' &= K(\varepsilon_x'' + \mu \varepsilon_\theta''); \\ N_\theta^F &= K(\mu E_x^F + E_\theta^F); & n_\theta'' &= K(\mu \varepsilon_x'' + \varepsilon_\theta''), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$K = \frac{Et}{1 - \mu^2}; \quad \varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2. \quad (3)$$

Величины продольных и окружных деформаций по длине оболочки следующие:

$$(E_x^F, E_\theta^F) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{E}, & \mu \frac{\sigma}{E} & \text{при } x \in [0, l_1] \text{ и } x \in [l_2, l]; \\ -\frac{\sigma}{E}(1 + \mu \bar{r}(1 + B_{11}X)), & \frac{\sigma}{E}(\mu + \bar{r}(1 + B_{11}X)) & \text{при } x \in \left[l_1, \frac{l_1 + l_2}{2} \right]; \\ -\frac{\sigma}{E}(1 + \mu \bar{r}(1 - B_{11}rX)), & \frac{\sigma}{E}(\mu + \bar{r}(1 - B_{11}X)) & \text{при } x \in \left[\frac{l_1 + l_2}{2}, l_2 \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Полная потенциальная энергия продольно сжатой рассматриваемой цилиндрической оболочки длины l , радиуса r и толщины t , испытывающей полные кинематически допустимые перемещения u, v, w относительно ненагруженного и недеформированного состояния, состоит из потенциальной энергии деформаций (V_2) и работы внешних сил (A_2):

$$V = V_2 + A_2.$$

Здесь

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [M_x X_x + M_\theta X_\theta + 2M_{x\theta} X_{x\theta}] r d\theta dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [N_x E_x + N_\theta E_\theta + 2N_{x\theta} E_{x\theta}] r d\theta dx; \quad (5)$$

$A_2 = A_{2cl}$ (для задач об устойчивости оболочек при определении критических нагрузок) или $A_2 = A_{2rsm}$ (для задач о несущей способности оболочек, определяемой по методу уменьшенной жесткости (RSM));

$$A_{2cl} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [(N_x^F \varepsilon_x'' + n_x'' E_x^F) + (N_\theta^F \varepsilon_\theta'' + n_\theta'' E_\theta^F)] r d\theta dx; \quad (6)$$

$$A_{2rsm} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [(N_x^F \varepsilon_x'' + n_x'' E_x^F) + N_\theta^F \varepsilon_\theta''] r d\theta dx, \quad (7)$$

где $M_x, M_\theta, M_{x\theta}$ – изгибающие и крутящие моменты; $E_x, E_\theta, E_{x\theta}$ – мембранные деформации; $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ – мембранные усилия; $X_x, X_\theta, X_{x\theta}$ – изменения кривизн срединной поверхности оболочки.

Подставив (2) и (3) в (6) и (7) с учетом (1) и (4), получим

$$A_{2cl} = -\frac{\sigma}{2E} K(1 - \mu^2) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 r dx d\theta - \bar{r} \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 r dx d\theta - \right. \\ \left. - \bar{r} B_{11} \int_0^{2\pi} \left[\int_{l_1}^{(l_1+l_2)/2} - \int_{(l_1+l_2)/2}^{l_2} \right] X \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 r dx d\theta \right\}; \quad (8)$$

$$A_{2rsm} = -\frac{K}{2} \frac{\sigma}{2E} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[\alpha_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] r dx d\theta + \right. \\ \left. + \bar{r} \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_{12} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] r dx d\theta + \right.$$

$$+ \bar{r} B_{11} \int_0^{2\pi} \left[\int_{l_1}^{(l_1+l_2)/2} - \int_{(l_1+l_2)/2}^{l_2} \right] \left[\mu X \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_{12} X \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] r dx d\theta, \quad (9)$$

где $\alpha_{11} = 2 - \mu^2$; $\alpha_{12} = 1 - 2\mu^2$.

Для шарнирно опертой оболочки перемещения u , v , w задаются в форме

$$u = u_{ij} \cos i\theta \cos \lambda x/r; \quad v = v_{ij} \sin i\theta \sin \lambda x/r; \quad w = w_{ij} \cos i\theta \sin \lambda x/r, \quad (10)$$

где $\lambda = j\pi r/l$.

После подстановки (10) в (8) и (9) получим

$$A_{2cl} = -\frac{\sigma(1-\mu^2)K\pi l}{E} \frac{1}{4r} [\lambda^2 - \bar{r}I_3 - i^2 \bar{r}B_{11}(I_{12} - l_{12}I_{21})] w_{ij}^2; \quad (11)$$

$$A_{2rsm} = -\frac{\sigma}{8E} \frac{\pi l}{r} K \{ \alpha_{11} \lambda^2 + \mu i^2 + \bar{r}(\mu \lambda^2 I_2 - \alpha_{12} i^2 I_3) + \\ + \bar{r}B_{11}[\mu \lambda^2 dl + (\mu \lambda^2 + \alpha_{12} i^2)(I_{12} - l_{12}I_{21})] \} w_{ij}^2, \quad (12)$$

где

$$I_2 = \frac{2}{l} \int_{l_1}^{l_2} \cos^2 \frac{\lambda x}{r} dx; \quad I_3 = \frac{2}{l} \int_{l_1}^{l_2} \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx;$$

$$I_{21} = \frac{2}{l} \left(\int_{l_1}^{(l_1+l_2)/2} - \int_{(l_1+l_2)/2}^{l_2} \right) \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx;$$

$$I_{12} = \frac{4}{l(l_2 - l_1)} \left(\int_{l_1}^{(l_1+l_2)/2} - \int_{(l_1+l_2)/2}^{l_2} \right) x \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx.$$

Потенциальную энергию, как и в [1], запишем в виде

$$V'_2 = K \frac{\pi l}{4r} \{ \lambda^2 u_{ij}^2 + 2\mu \lambda u_{ij}(w_{ij} - iv_{ij}) + (w_{ij} - iv_{ij})^2 + \frac{1-\mu}{2} (\lambda v_{ij} - iu_{ij})^2 + \\ + [(\lambda u_{ij} + \bar{r}w_{ij})^2 + 2\mu(\lambda u_{ij} + \bar{r}w_{ij})(w_{ij} - iv_{ij})] I_3 + \\ + \frac{1}{a} [\lambda^4 w_{ij}^2 + 2\mu \lambda^2 w_{ij}(i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + (i^2 w_{ij} - iv_{ij})^2 + 2(1-\mu)\lambda^2 (iw_{ij} - v_{ij})^2 + \\ + \bar{r}[(2\lambda u_{ij} + \bar{r}w_{ij})w_{ij} - 2\mu w_{ij}(iv_{ij} - w_{ij})] I_3 + \frac{\bar{r}}{a} [\lambda^2 u_{ij}(\bar{r}u_{ij} + 2\lambda w_{ij}) +$$

$$+ 2\mu i \lambda u_{ij} (i w_{ij} - v_{ij}) I_3 + 2(1 - \mu) \bar{r} i u_{ij} (2i \lambda w_{ij} - 2\lambda v_{ij} + \bar{r} i u_{ij}) I_2 \}. \quad (13)$$

Введем обозначения $A_2^* = \frac{4r}{K\pi l} A_2$, $V_2^* = \frac{4r}{K\pi l} V_2'$ и представим полную энергию следующим образом:

$$V^* = V_2^* + A_2^*, \quad A_2^* = (A_2^*)_{cl}, \quad \text{или} \quad A_2^* = (A_2^*)_{rsm}. \quad (14)$$

Из условия экстремума полной потенциальной энергии системы получим систему однородных алгебраических уравнений для определения критических значений нагрузок:

$$\begin{cases} A_{11} u_{ij} + A_{12} v_{ij} + A_{13} w_{ij} = 0; \\ A_{21} u_{ij} + A_{22} v_{ij} + A_{23} w_{ij} = 0; \\ A_{31} u_{ij} + A_{32} v_{ij} + A_{33} w_{ij} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $A_{ij} = A'_{ij} + \Lambda A''_{ij}$; A'_{ij} принимают такие же значения, как в [1]; величины с двумя штрихами имеют следующие значения.

Если $A_2^* = (A_2^*)_{cl}$, то

$$A''_{11} = A''_{12} = A''_{13} = A''_{22} = A''_{23} = 0; \quad (A''_{33})_{cl} = (1 - \mu^2)(\bar{r} i^2 I_3 - \lambda^2) + B_{11} \alpha_{33}.$$

Если $A_2^* = (A_2^*)_{rsm}$, то

$$A''_{33} = (A''_{33})_{rsm} = -\frac{1}{2}(\lambda^2 \bar{\alpha}_{11} + i^2 \bar{\alpha}_{12} + B_{11}(\lambda^2 \alpha_{22} - i^2 \alpha_{21})), \quad (16)$$

где

$$\bar{\alpha}_{11} = \alpha_{11} + \bar{r} \mu I_2; \quad \bar{\alpha}_{12} = \mu - \bar{r} \alpha_{12} I_3; \quad \alpha_{21} = \bar{r} \mu (I_{12} + l_{12} I_{21});$$

$$\alpha_{22} = \bar{r} \mu (I_{11} - l_{12} I_{22}); \quad \alpha_{33} = \bar{r} i^2 (I_{12} - l_{12} I_{21}).$$

На основании существования решений полученной системы уравнений находим спектр решений для задач об устойчивости и несущей способности безмоментных оболочек соответственно:

$$\left(\frac{\sigma}{E} \right)_{cl} = \frac{1}{A''_{33cl}} \left[A'_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right]; \quad (17)$$

и

$$\left(\frac{\sigma}{E} \right)_{rsm} = \frac{1}{A''_{33rsm}} \left[A'_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right]. \quad (18)$$

2. Влияние осесимметричных вмятин на верхние критические нагрузки и нижний предел несущей способности оболочек. С помощью процедуры, описанной в п. 1, исследуем влияние локальных осесимметричных вмятин, расположенных в центре оболочки (рис. 1), на параметр критической нагрузки σ_c/σ_{kl} и на параметр $\sigma_{cm}^*/\sigma_{kl}$, где σ_c – критическая нагрузка оболочки с вмятиной; $\sigma_{kl} = 0,605 Et/r$ – классическая критическая нагрузка продольно сжатой идеальной оболочки; σ_{cm}^* – критическая нагрузка, определенная по методу уменьшенной жесткости. Длина вмятины может изменяться в пределах $0 \leq dl \leq 1$, т.е. иметь ограниченную длину, либо распространяться на всю длину оболочки.

Рассмотрим зависимости $\sigma_c/\sigma_{kl} = f(r/t)$ – рис. 2 и $\sigma_{cm}^*/\sigma_{kl} = f(r/t)$ – рис. 3 для оболочек, имеющих две безразмерные длины ($l/r = 0,5$ и 1 ; $dl = 0,5$).

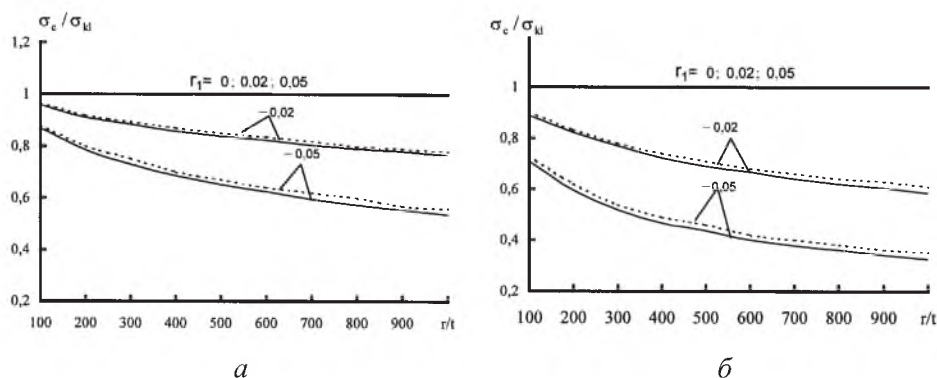


Рис. 2. Зависимость отношения σ_c/σ_{kl} от r/t для переменных внутренних (сплошные линии) и постоянных (штриховые линии) усилий (здесь и на рис. 3: а – $l/r = 0,5$; б – $l/r = 1$).

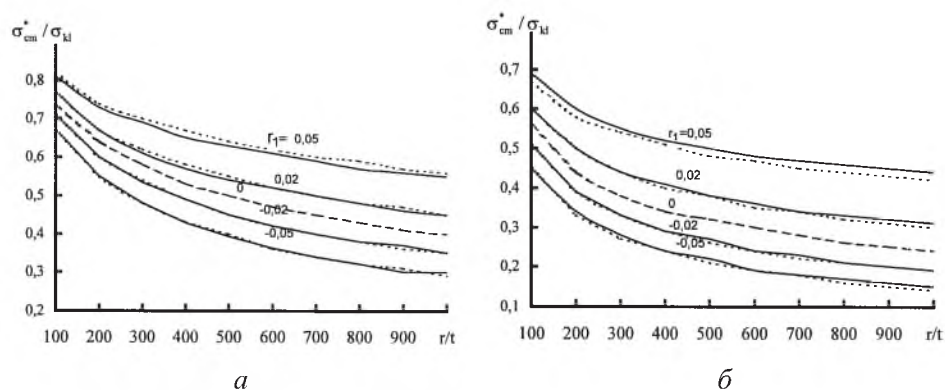


Рис. 3. Зависимость отношения $\sigma_{cm}^*/\sigma_{kl}$ от r/t .

Видно, что отношение σ_c/σ_{kl} уменьшается с ростом r/t при $r_1 < 0$. При $r_1 = \bar{r} \geq 0$ оно почти не зависит от r/t . На рис. 2 сплошные кривые размещаются над штриховыми. Величины $\sigma_{cm}^*/\sigma_{kl}$ также уменьшаются с увеличением r/t как при $r_1 > 0$, так и при $r_1 < 0$.

Из рис. 3,б видно, что сплошные и штриховые кривые располагаются почти одинаково. При отрицательных значениях r_1 и $l/r = 0,5$ различие между указанными кривыми также незначительное; при $r_1 \geq 0,05$ оно несколько возрастает и составляет примерно 5% (рис. 3,а).

Обоснование результатов расчета. Теоретические результаты сравнивались с экспериментальными данными [10], которые получены для оболочек с вмятиной на установке, представленной на рис. 4.

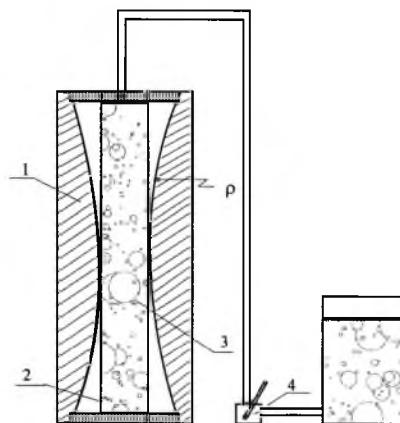


Рис. 4. Схема установки для изготовления оболочек с вмятиной.

Цилиндрическая оболочка 2, внутри которой вставлен резиновый герметичный мешок 3, устанавливалась в резервуар 1. Внутренняя поверхность последнего выполняется с определенным радиусом кривизны ρ по специальному шаблону на токарном станке. Жидкость, подаваемая в мешок под давлением от насоса 4, “вытягивает” оболочку, придавая ей необходимую кривизну $1/\rho$. Для извлечения оболочки резервуар выполняется разъемным по плоскости меридионального сечения из мягкой латуни Л-62М, обладающей достаточно большой пластической деформацией. С целью устранения начальных напряжений, возникающих во время вытяжки образцов, последние подвергались естественному старению в течение года.

Выполненные таким образом оболочки устанавливались в опорные кольца, пазы которых предварительно наполнялись клеем на основе эпоксидной смолы. Застывая при нормальной температуре, клей, создавая монолитную массу, наглухо соединял оболочку с опорным кольцом.

Образцы имели следующие геометрические характеристики: $l = 28$ см; $r = 8$ см; $t = (0,197 \dots 0,2) \cdot 10^{-1}$ см; $l/r = 3,5$; $r/t = 400$.

Толщина стенки t оболочки замерялась на специальном приспособлении индикатором часового типа по 12 образующим в семи сечениях. Определялось t_{cp} , которое, как правило, практически мало отличалось от номинального.

Для установления механических характеристик материала (модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ) были изготовлены пять образцов, которые испытывали на испытательной машине. При этом получено $E = 1 \cdot 10^6$ кг/см², $\mu = 0,3$.

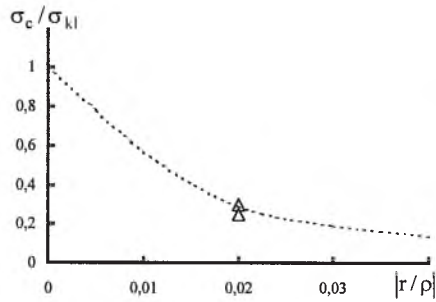


Рис. 5. Зависимость σ_c/σ_{kl} от $|r/\rho|$.

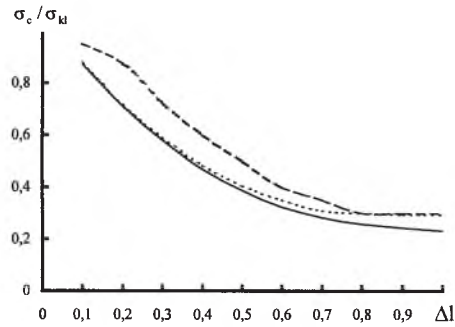


Рис. 6. Зависимость σ_c/σ_{kl} от Δl .

На рис. 5 представлена зависимость σ_c/σ_{kl} от $|r/\rho|$. Как видно, отношение σ_c/σ_{kl} уменьшается с ростом $|r/\rho|$. Треугольниками показаны экспериментальные данные [10] для оболочек при $r/t = 400$, $l/r = 3,5$. Отметим, что экспериментальные значения критических напряжений располагаются близко друг к другу, а также к расчетным данным.

На рис. 6 приведены результаты расчетов численным методом по нелинейной теории [8] (штриховая линия) и по формулам (17) (сплошная и пунктирная линии). В случае постоянных внутренних усилий N_θ^F численный расчет совпадает с аналитическим решением при $\Delta l \geq 0,8$, при переменных усилиях приближенное аналитическое решение оказывается ниже численного почти на 30%. Параметр критической нагрузки σ_c/σ_{kl} , полученный путем аналитического решения, оказывается ниже полученного численным методом, т.е. определяется в запас прочности. Предпочтительными для приближенной оценки критических нагрузок являются решения, полученные при условии постоянства окружных усилий в зоне вмятины.

Заключение. Сравнение критических нагрузок σ_c/σ_{kl} для двух случаев распределения внутренних усилий показало, что максимальное различие между ними при постоянных и переменных внутренних усилиях N_θ^F составляет 10% (рис. 2,а, $r/t = 700$, $\bar{r} = -0,05$). При $\bar{r} \geq 0$ эти величины полностью совпадают.

Критическая нагрузка, определяемая по методу уменьшенной жесткости ($\sigma_{cm}^*/\sigma_{kl}$) при переменных и постоянных внутренних усилиях, мало зависит от характера напряженного состояния. Теоретические критические нагрузки хорошо согласуются с полученными экспериментально [10].

Возможные уточнения решений задач связаны с более точным учетом трансформации формы начального прогиба под нагрузкой. Эта задача будет предметом дальнейших исследований.

Резюме

Запропоновано методику наближеного визначення критичних напружень пружних оболонок за формою близьких до циліндричних із використанням

рівнянь в переміщеннях. Отримано аналітичні вирази для оцінки критичних напружень у безмоментних гладких оболонках. Проаналізовано два випадки розподілу внутрішніх зусиль: сили постійної і змінної величини.

1. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Устойчивость и несущая способность цилиндрических оболочек с осесимметричными вмятинами // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 7. – С. 68 – 78.
2. Groll J. G. A. and Batista R. C. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders // Int. J. Mech. Sci. – 1981. – **23**, No. 6. – P. 331 – 343.
3. Croll J. G. A. Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology // Thin-Walled Structures. – 1995. – **23**. – P. 67 – 84.
4. Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д. Обоснование метода уменьшенной жесткости // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 39 – 58.
5. Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д. Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания гладких оболочек и классический анализ устойчивости (обзор) // Там же. – 1999. – № 2. – С. 45 – 66.
6. Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д. Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания подкрепленных оболочек // Там же. – 2000. – № 2. – С. 90 – 104.
7. Gavrilenko G. D., Matsner V. I., and Sytnik A. S. Stability of ribbed cylindrical shells with a nonideal shape // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 12. – P. 1222 – 1228.
8. Gavrilenko G. D. Stability and load-carrying capacity of incomplete shells // Ibid. – 2000. – **36**, No. 7. – P. 866 – 887.
9. Gavrilenko G. D., Matsner V. I., and Sytnik A. S. Minimum critical loads of ribbed shells with given initial deflections // Ibid. – 2000. – **36**, No. 11. – P. 1482 – 1486.
10. Полуэктов А. Е. Устойчивость цилиндрических оболочек с эксцентричным подкреплением // Избранные главы по строительной механике / Под. ред. С. Н. Кана. – М., 1969. – Вып. 8. – С. 143 – 152.

Поступила 09. 07. 2003