

Модификация метода Уилкинса для исследования динамики осесимметричных толстостенных оболочек с винтовой ортотропией

П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко, С. А. Тарасовская

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Проведена модификация метода Уилкинса для численного исследования динамики толстостенных цилиндрических оболочек с винтовой ортотропией. Тестовые расчеты хорошо согласуются с известными решениями. Обнаружены новые физические эффекты, которые отсутствуют в изотропных и цилиндрически ортотропных телах.

Ключевые слова: ортотропия, динамика, армирование, цилиндрическая оболочка.

Композитные материалы находят все более широкое применение в технике, в частности в конструкциях, подверженных нестационарным нагрузкам. К таким конструкциям относятся сосуды, корпуса или защитные сооружения, предназначенные для удержания в своей полости значительных газодинамических нагрузок и экологически опасных продуктов аварийного взрыва того или иного взрывчатого объекта (активная зона ядерного реактора) [1, 2]. Структура и технология создания указанных материалов определяют их качественное различие в реакции на динамическую нагрузку. В технике широко используются оболочки вращения, изготовленные из композитных материалов, армированных по спирали под определенным углом к образующей. Эти оболочки, как правило, локально ортотропны. Однако их главные оси анизотропии не совпадают с осями цилиндрической системы координат x, φ, r . Известны решения подобных задач для статических условий нагружения.

В работе [3] представлено решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией в виде линейной комбинации однородных элементарных решений, построение которых сведено к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рассматривался сплошной цилиндрический локально трансверсально изотропный толстый стержень с переменной осью симметрии упругих свойств. На основе аналитических и численных методов осуществлено интегрирование этих задач и исследована матрица жесткости в широком диапазоне параметров. При растяжении–сжатии цилиндра с винтовой анизотропией кроме продольной деформации возникает крутильная и, наоборот, при кручении кроме крутильной – продольная. Аналогичным свойством обладают также естественно закрученные стержни [4]. Установлено, что при растяжении цилиндра знак и величина крутильной деформации существенно зависят от относительного угла закручивания винтовых спиралей.

В работе [5] исследовалось влияние структуры армирования материала на напряженно-деформированное состояние (НДС) полого цилиндра, подверженного действию осесимметричного внешнего давления. Там же приведены зависимости радиальных перемещений, осевых и окружных напряже-

ний от угла армирования. Полученные данные свидетельствуют о необходимости учета при решении задач о НДС упругих оболочек эффектов, обусловленных несовпадением главных направлений упругости с направлением координатных линий. Большое количество работ посвящено экспериментальным исследованиям по внутреннему взрывному нагружению стеклоэпоксидных оболочек [1, 6–9]. Установлены преимущество композитных оболочек, подвергающихся воздействию экстремальных импульсных нагрузок, перед оболочками из традиционного конструкционного материала (сталь) и значительные различия в реакции на динамическую нагрузку оболочек с разной структурой армирования. В [10] численно исследуется осесимметричная волновая динамика спирально армированных цилиндров на основе приближенной теории тонких оболочек. Динамические задачи теории упругости о влиянии угла спиральной намотки на НДС толстостенных полых цилиндрических тел, насколько известно авторам, не рассматривались.

Ранее [11] была выполнена модификация двухмерного численного метода Уилкинса для исследования осесимметричной динамики толстостенных ортотропных оболочек в цилиндрических координатах. Поскольку главные направления анизотропии совпадали с координатными осями, часть компонент тензоров напряжений и деформаций, а также окружное перемещение тождественно обнулялись.

Цель данной работы заключалась в дальнейшей модификации двухмерного алгоритма Уилкинса на случай ортотропных цилиндрических оболочек с произвольным углом армирования, тестировании разработанного метода и исследовании влияния угла армирования на НДС толстостенной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией, подверженной осесимметричному динамическому воздействию.

Приведем математическую формулировку задачи исследования (начало координат будем всегда располагать в центре симметрии цилиндра). Уравнения движения в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии и произвольного угла армирования α ($0 \dots 90^\circ$) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{du_r}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{rx}}{r} = \rho \frac{du_x}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = \rho \frac{du_\varphi}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – плотность материала; $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \tau_{rx}, \tau_{r\varphi}, \tau_{x\varphi}$ – компоненты тензора напряжений; t – время; u_r, u_φ, u_x – компоненты вектора скорости перемещений.

Геометрические соотношения, выражающие тензор скоростей деформаций через вектор скорости перемещений, представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \dot{\varepsilon}_\varphi &= \frac{u_r}{r}; & \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \dot{\gamma}_{rx} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}; & \dot{\gamma}_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; & \dot{\gamma}_{x\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Физические уравнения с учетом произвольного угла армирования α запишем в векторной форме:

$$d\{\sigma_x; \sigma_\varphi; \sigma_r; \tau_{x\varphi}; \tau_{\varphi r}; \tau_{rx}\} = C\{\dot{\varepsilon}_x; \dot{\varepsilon}_\varphi; \dot{\varepsilon}_r; \dot{\gamma}_{x\varphi}; \dot{\gamma}_{\varphi r}; \dot{\gamma}_{rx}\} dt, \quad (3)$$

где C – квадратная матрица размерностью 6×6 симметрична ($C_{ij} = C_{ji}$) и имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} C_{12} &= B_{x\varphi} + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi} - 4G_{x\varphi}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ C_{44} &= G_{x\varphi} \cos^2 2\alpha + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \quad C_{33} = A_r; \\ \{C_{11}; C_{22}\} &= \{A_x; A_\varphi\} \cos^4 \alpha + \{A_\varphi; A_x\} \sin^4 \alpha + \{1; 1\} (0.5B_{x\varphi} + G_{x\varphi}) \sin^2 2\alpha; \\ \{C_{13}; C_{23}; C_{55}; C_{66}\} &= \{B_{rx}; B_{\varphi r}; G_{\varphi r}; G_{rx}\} \cos^2 \alpha + \{B_{\varphi r}; B_{rx}; G_{rx}; G_{\varphi r}\} \sin^2 \alpha; \\ \{C_{34}; C_{56}\} &= \{B_{\varphi r} - B_{rx}; G_{\varphi r} - G_{rx}\} \sin \alpha \cos \alpha; \\ \{C_{14}; C_{24}\} &= [\{A_\varphi; -A_x\} \sin^2 \alpha + \{-A_x; A_\varphi\} \cos^2 \alpha + \\ &\quad + \{1; -1\} (B_{x\varphi} + 2G_{x\varphi}) \cos 2\alpha] \sin \alpha \cos \alpha; \\ A_x &= E_x(1 - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi})/D; \quad B_{x\varphi} = E_\varphi(\nu_{x\varphi} + \nu_{xr} \nu_{r\varphi})/D; \\ D &= 1 - 2\nu_{x\varphi} \nu_{\varphi r} \nu_{rx} - \nu_{x\varphi} \nu_{\varphi x} - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi} - \nu_{rx} \nu_{xr}, \end{aligned}$$

выражения для $A_\varphi, A_r, B_{\varphi r}, B_{rx}$ получаются путем циклической перестановки индексов x, φ, r ; E_i, ν_{ij}, G_{ij} ($i, j = x, \varphi, r$; $i \neq j$) – технические характеристики упругости ортотропного материала в главных осях анизотропии при угле армирования $\alpha = 0$, т.е. в случае цилиндрически ортотропного тела.

При этом выполняются равенства [12]:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается начальными и граничными условиями. Начальные условия полагались нулевыми, граничные – силовыми или кинематическими. Несмотря на наличие всех компонент перемещений, напряжений и деформаций, краевая задача (1)–(3) будет осесимметричной в том смысле, что ни одна из ее переменных не будет зависеть от угловой координаты φ [5].

На основе приведенных уравнений разработан пакет прикладных программ (ППП) для осесимметричного двухмерного динамического численного расчета толстостенных цилиндрических оболочек вращения при произвольном угле армирования, базирующийся на явной по времени интегрирующей по пространству конечно-разностной схеме Уилкинса [11].

Поскольку в [10] отсутствует достаточный набор исходных данных для однозначного восстановления полученных волновых численных решений даже в оболочечном приближении, тестирование ППП проводили на статических линейных задачах для малых перемещений и деформаций, имеющих аналитические или известные численные решения.

Тестовая задача (ТЗ) № 1. Рассматривается бесконечно длинный цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления 100 МПа в условиях плоского деформированного состояния. Внутренний радиус $R_1 = 0,1$ м, наружный – $R_2 = 0,2$ м. Физико-механические характеристики модельного материала следующие: $\rho = 2000$ кг/м³; $E_x = 30000$ МПа; $E_\varphi = 10^5$ МПа; $E_r = 10^4$ МПа; $\nu_{x\varphi} = 0,2$; $\nu_{\varphi r} = 0,3$; $\nu_{rx} = 0,4$; $G_{rx} = 4000$ МПа; $G_{x\varphi} = 20000$ МПа; $G_{\varphi r} = 7000$ МПа. Угол армирования $\alpha = 45^\circ$.

ТЗ № 2. Задача № 1 для материала с такими физико-механическими характеристиками [2]: $\rho = 1870$ кг/м³; $E_x = 11000$ МПа; $E_\varphi = 36800$ МПа; $E_r = 26800$ МПа; $\nu_{x\varphi} = \nu_{\varphi r} = 0,105$; $\nu_{rx} = 0,431$; $G_{rx} = 4140$ МПа; $G_{x\varphi} = 4470$ МПа; $G_{\varphi r} = 5050$ МПа; $\alpha = 45^\circ$.

ТЗ № 3. Цилиндр конечной длины $L = 0,4$ м под действием внутреннего давления 10 МПа; $R_1 = 0,1$ м, $R_2 = 0,116$ м. Оба торца свободны от нагрузок. Физико-механические характеристики материала таковы [11]: $\rho = 1900$ кг/м³; $E_x = 19000$ МПа; $E_\varphi = 33000$ МПа; $E_r = 26000$ МПа; $\nu_{x\varphi} = 0,12$; $\nu_{\varphi r} = 0,22$; $\nu_{rx} = 0,19$; $G_{rx} = 3700$ МПа; $G_{x\varphi} = 6500$ МПа; $G_{\varphi r} = 10^4$ МПа. Угол армирования $\alpha = 45^\circ$.

ТЗ № 4. Рассматривается ТЗ № 3 для случая отсутствия давления, но при этом на торцах заданы сжимающие напряжения $\sigma_x = -100$ МПа.

ТЗ № 5. Рассматривается задача из [5]. Цилиндр конечных размеров ($R_2 = 3R_1/2$; $L = 2R_1$) под действием наружного давления $\sigma_{r=R_2} = -P_0 \cos(x\pi/L)$, на торцах выполняются условия симметрии: $u_x = u_\varphi = \partial u_r / \partial x = 0$ при $x = \pm L/2$. Характеристики материала: $E_x = 4,608A$; $E_\varphi = 1,6A$; $E_r = 1,121A$; $\nu_{x\varphi} = 0,272$; $\nu_{\varphi r} = 0,3$; $\nu_{rx} = 0,017$; $G_{rx} = 0,33A$; $G_{x\varphi} = 0,56A$; $G_{\varphi r} = 0,43A$; угол армирования α варьировался. При расчетах с использованием ППП полагали: $R_1 = 0,1$ м; $P_0 = 100$ МПа; $A = 10^4$ МПа; $\rho = 2000$ кг/м³.

Тестовые задачи № 1 и 2 имеют точные аналитические решения, задачи № 3 и 4 допускают аналитические решения в оболочечном приближении [12], а задача № 5 численно проинтегрирована в [5]. Результаты тестовых расчетов представлены в таблице и на рис. 1.

Поскольку ППП предназначен для решения только нестационарных задач, для обеспечения условий нагружения, близких к статическим, временное изменение внешней нагрузки в рассмотренных примерах задавалось в виде функции

$$Q(t) = Q_0 [H(t - T) + tT^{-1}H(T - t)],$$

где Q_0 – амплитудное (стационарное) значение нагрузки; $H(t)$ – функция Хевисайда; время нарастания нагрузки T задавалось не менее 0,005 с; результаты выводились и осреднялись при $t > 2T$. Установлено хорошее совпадение полученных с помощью ППП данных с аналитическими решениями и удовлетворительное с численными [5].

Тестовые расчеты

№ ТЗ	σ_x , МПа	σ_φ , МПа	$\tau_{x\varphi}$, МПа	$w_r \cdot 10^4$, м	β , град
	$r = R_1$				
1	19,6	219,0	109,0	5,38	
	20,0	220,0	110,0	5,40	
2	72,9	154,0	61,7	9,42	
	73,0	155,0	61,7	9,54	
3		62,5			
		65,0			
4					
$r = R_2$					
1	21,5	52,2	15,6	1,49	
	21,7	52,5	15,8	1,51	
2	36,4	69,3	24,6	7,25	
	36,9	70,2	25,0	7,35	
3		62,5			-0,148
		60,0			-0,148
4					0,237
					0,237

Примечания. 1. Над чертой приведены данные теоретических расчетов, под чертой – с использованием ППП. 2. β – угол закручивания одного из торцов цилиндра относительно другого. 3. w_r – радиальное перемещение.

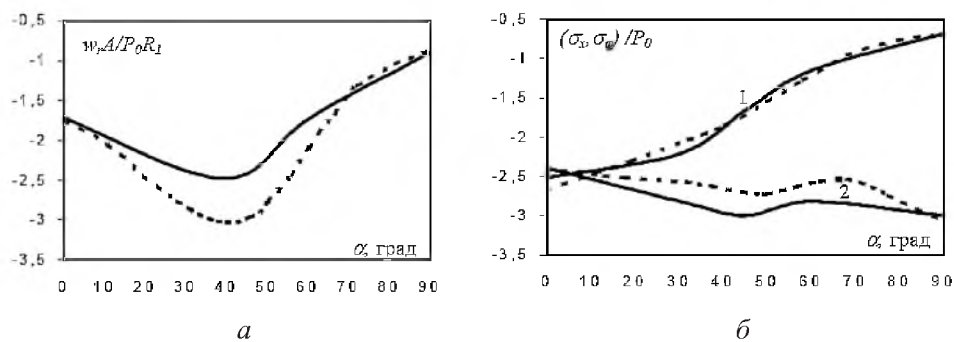


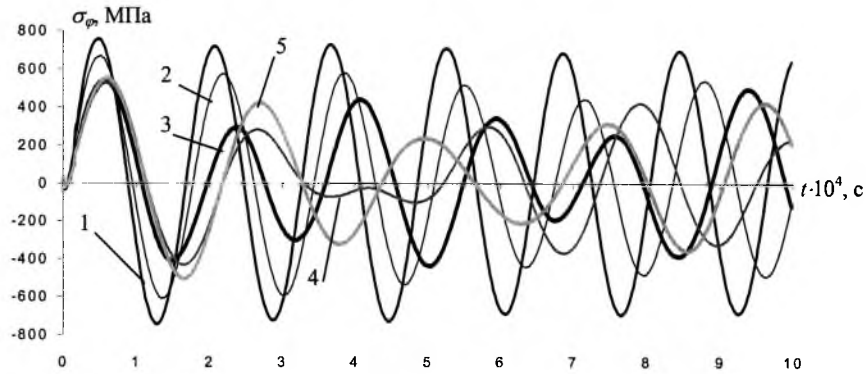
Рис. 1. Сравнение данных расчетов с использованием ППП (сплошные линии) с численным решением [5] для задачи № 5 при $x = 0$, $r = R_2$ (штриховые линии): 1 – σ_x ; 2 – σ_φ .

С использованием ППП исследовалась зависимость динамики цилиндрической оболочки, материал и геометрия которой описаны в ТЗ № 3, от

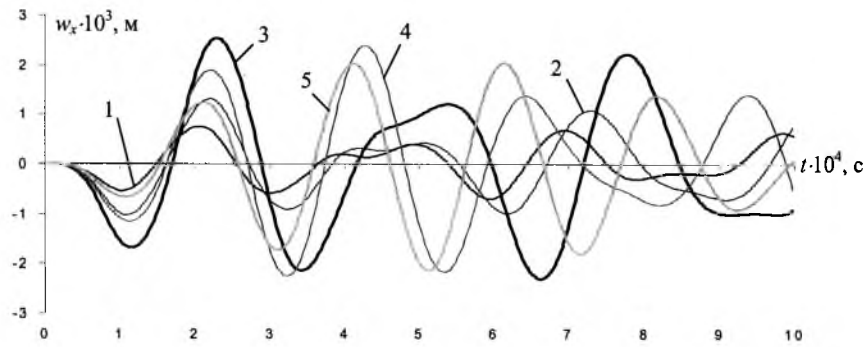
угла намотки волокон α . Торцы цилиндра и внешняя поверхность свободны от нагрузок, внутреннее давление изменяется по закону [11]

$$\sigma_{r|_{r=R_1}} = -\sigma_0 R_1^3 l^{-3} H(la^{-1} - t),$$

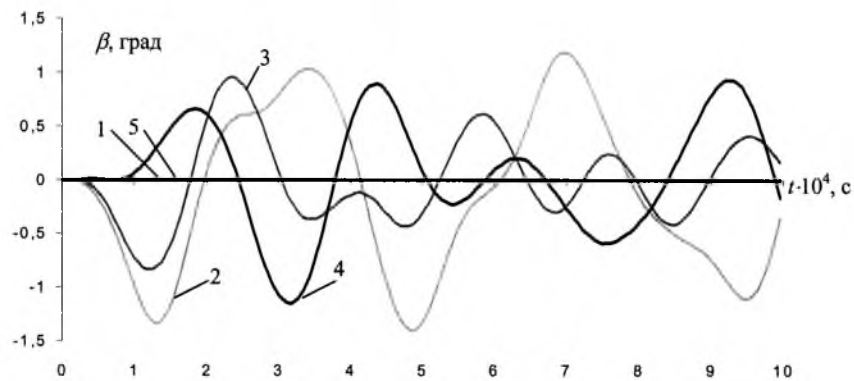
где $\sigma_0 = 186$ МПа; $a = 6310$ м/с; $l = \sqrt{x^2 + R_1^2}$.



а



б



в

Рис. 2. Влияние угла намотки волокон α на динамическое НДС цилиндрической оболочки: 1 – $\alpha = 0^\circ$; 2 – $\alpha = 22,5^\circ$; 3 – $\alpha = 45^\circ$; 4 – $\alpha = 67,5^\circ$; 5 – $\alpha = 90^\circ$.

При $\alpha = 0$ и 90° решение этой задачи получено ранее [11], для промежуточных значений $0 < \alpha < 90^\circ$ ППП, представленный в [11], получить решение не позволял. На рис. 2 показано изменение во времени окружного напряжения σ_φ на внутренней поверхности в центральном сечении $x = 0$, осевого перемещения w_x правого торца во внутренней точке и угла закручивания β . Из рис. 2, в видно, что при промежуточных углах намотки появляются крутильные колебания конструкции, отсутствующие при осевом либо окружном армировании. Цилиндр начинает совершать колебания в радиальном, осевом и окружном направлениях одновременно. При $\alpha = 67,5^\circ$ происходит качественное изменение гармонического характера колебаний σ_φ (на рис. 2, а появление “седла”). Наиболее явные отклонения колебаний w_x от гармонического закона наблюдаются при малых углах намотки ($\alpha = 0$ и $22,5^\circ$), при $\alpha \geq 45^\circ$ характер осевых колебаний выравнивается и становится более близким к гармоническому (рис. 2, б). При $\alpha = 67,5^\circ$ окружные напряжения минимальны, в то время как осевые напряжения максимальны. Минимальная интенсивность напряжений в конструкции реализуется при $\alpha \approx 45^\circ$.

Таким образом, модифицирован численный алгоритм Уилкинса решения нестационарных двумерных краевых задач на случай толстостенных композитных цилиндрических оболочек с произвольным углом спирального армирования при осесимметричном нагружении, на основе которого создан ППП. Выполнен ряд тестовых расчетов, свидетельствующих о высокой точности разработанного ППП. На базе развитого метода исследована осесимметричная динамика анизотропной оболочки в зависимости от угла армирования. Обнаружены физические эффекты, связанные с появлением крутильных форм колебаний, которые в телах с цилиндрической ортотропией не наблюдаются.

Резюме

Проведено узагальнення методу Уїлкінса для числового дослідження динаміки товстостінних циліндричних оболонок із гвинтовою ортотропією. Результати тестових розрахунків збігаються з відомими розв'язками. Виявлено нові фізичні ефекти, що відсутні в ізотропних та циліндрично ортотропних тілах.

1. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Иванов А. Г. Динамическая прочность оболочек из ориентированных волокнистых композитов при взрывном нагружении (обзор) // Прикл. механика и техн. физика. – 1993. – № 1. – С. 126 – 133.
2. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
3. Устинов Ю. А. Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып. 1. – С. 99 – 108.

4. *Друзь А. Н., Поляков Н. А., Устинов Ю. А.* Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // Там же. – 1996. – **60**, вып. 4. – С. 660 – 668.
5. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
6. *Рыжанский В. А., Минеев В. Н., Иванов А. Г. и др.* Разрушение цилиндрических стеклоэпоксидных оболочек, заполненных водой, при внутреннем импульсном нагружении // Механика полимеров. – 1978. – № 2. – С. 283 – 289.
7. *Цыпкин В. И., Русак В. Н., Шитов А. Т., Иванов А. Г.* Деформация и разрушение цилиндрических оболочек из стеклоэпоксида при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1981. – № 2. – С. 249 – 255.
8. *Рыжанский В. А., Русак В. Н., Иванов А. Г.* Оценка взрывостойкости цилиндрических композитных оболочек // Физика горения и взрыва. – 1999. – **35**, № 1. – С. 115 – 121.
9. *Федоренко А. Г., Цыпкин В. И., Иванов А. Г. и др.* Особенности динамического деформирования и разрушения цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1983. – № 1. – С. 90 – 94.
10. *Навал И. К., Сабодаш П. Ф.* Осесимметричные волны в ортотропной цилиндрической оболочке // Там же. – 1981. – № 5. – С. 924 – 928.
11. *Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Корбач В. Г.* Пределы применимости метода Уилкинса для исследования динамического напряженно-деформированного состояния анизотропных упругих осесимметричных оболочек // Пробл. прочности. – 2003. – № 1. – С. 76 – 86.
12. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

Поступила 09. 09. 2003