

## Методика оценки напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек ГТД из композитных материалов

Б. П. Маслов<sup>а</sup>, В. Б. Жуков<sup>б</sup>, А. Д. Погребняк<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

<sup>б</sup> ЗМКБ “Прогресс”, Запорожье, Украина

*Рассмотрены методические аспекты расчета толстостенных оболочек из композитных материалов, используемых в конструкциях ГТД. Приведена методика расчета кольцевых элементов немалой кривизны, а также коротких оболочек, свободных от закреплений и нагруженных на левом торце изгибающим моментом и нормальным давлением, приложенным к срединной поверхности. На основании этих решений установлены пределы применимости теории толстостенных оболочек.*

**Ключевые слова:** толстостенная оболочка, короткая оболочка, кольцевой элемент, композитные материалы, методы расчета напряженно-деформированного состояния.

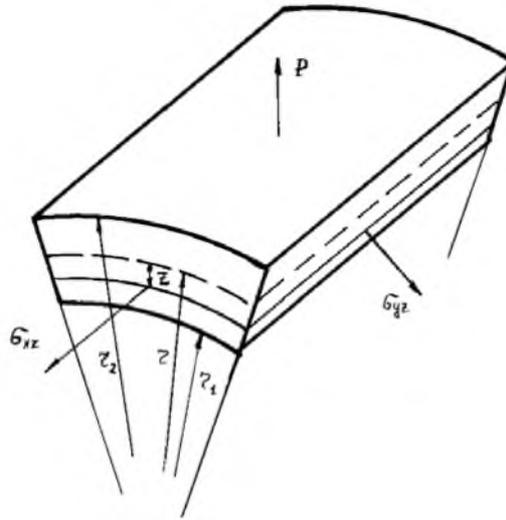
**Введение.** В настоящее время в конструкциях авиационных двигателей достаточно широко применяются композитные материалы с явно выраженной анизотропией [1–3] и очень низким модулем сдвига. Как известно [4], для повышения точности расчетов в зоне концентрации напряжений оболочечные конструкции в местах фланцевых соединений, а также сопряжения оболочек различных радиусов расчленяются на короткие. В этом случае не удовлетворяется условие малости их толщины по сравнению с длиной и возникает необходимость применения неклассических задач механики разрушения [5]. Анализ концентрации напряжений в структуре композитных материалов связан с использованием новых моделей неоднородной среды [6]. В настоящем исследовании описанные ранее [5, 6] методы используются для расчета напряженно-деформированного состояния оболочек из композитных материалов с учетом поперечных деформаций сдвига в каждом составляющем элементе.

**1. Основные уравнения толстостенных оболочек.** Относительные удлинения эквидистантной поверхности цилиндрической оболочки средней толщины, выполненной из композитного материала, в осевом и окружном направлениях соответственно принимаем в виде

$$\varepsilon_{xz} = \frac{du}{dx} + z \frac{d\vartheta}{dx}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{yz} = wr^{-1}(1-zr^{-1})^{-1}, \quad (2)$$

где  $u$ ,  $w$  – осевое и радиальное перемещения;  $\vartheta$  – угол поворота меридиана оболочки;  $r$  – радиус срединной поверхности;  $z$  – координата, отсчитываемая от срединной поверхности к центру оболочки (рисунки).



Элемент цилиндрической оболочки.

В выражение (2) входит отношение  $zr^{-1}$ , которое для оболочек средней толщины не может быть исключено из соображений малости по сравнению с единицей.

Напряжения и деформации связаны соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= (\varepsilon_{xz}E_x + \mu_{xy}\varepsilon_{yz}E_y)(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1}; \\ \sigma_{yz} &= (\varepsilon_{yz}E_y + \mu_{yx}\varepsilon_{xz}E_x)(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1}.\end{aligned}$$

Выразим напряжения через перемещения

$$\sigma_{xz} = \left[ \left( \frac{du}{dx} + z \frac{d^2w}{dx^2} \right) E_x + \mu_{xy} w (r - z)^{-1} E_y \right] (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1}; \quad (3)$$

$$\sigma_{yz} = \left[ w (r - z)^{-1} E_y + \mu_{yx} \left( \frac{du}{dx} + z \frac{d^2w}{dx^2} \right) E_x \right] (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1}. \quad (4)$$

Нормальные усилия и изгибающие моменты для оболочек нулевой гауссовой кривизны через напряжения представим в виде

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} (1 - zr^{-1}) dz; & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz; \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} (1 - zr^{-1}) z dz; & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} z dz.\end{aligned} \quad (5)$$

Из первого равенства (5) с учетом (3) находим, что

$$\frac{du}{dx} = (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})E_x^{-1}h^{-1}N_x + \frac{1}{12}h^2r^{-1}\frac{d^2w}{dx^2} - \mu_{xy}E_yE_x^{-1}r^{-1}w.$$

С учетом соотношений симметрии упругого тела

$$E_yE_x^{-1} = \mu_{yx}\mu_{xy}^{-1}$$

получим

$$\frac{du}{dx} = (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})E_x^{-1}h^{-1}N_x + \frac{1}{12}h^2r^{-1}\frac{d^2w}{dx^2} - \mu_{yx}r^{-1}w.$$

Подставим выражение  $\frac{du}{dx}$  в соотношения (3) и (4), а затем, исключив малые члены, с учетом зависимости между коэффициентом Пуассона и модулями упругости получим выражения для напряжений в оболочке средней толщины:

$$\sigma_{xz} = N_x h^{-1} + (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1} E_x z \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = & \mu_{yx} N_x h^{-1} - \mu_{yx} (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1} E_x z \frac{d^2 w}{dx^2} + \\ & + (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})^{-1} E_x \mu_{yx} \mu_{xy}^{-1} ((r - z)^{-1} - \mu_{yx} \mu_{xy} r^{-1}) w. \end{aligned} \quad (7)$$

В (6) и (7) усилие  $N_x$  известно, а радиальное перемещение  $w$  удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка. Чтобы получить это уравнение, запишем условие равновесия элемента оболочки, нагруженной нормальным давлением  $p$ , полагая, что оно приложено на радиусе  $r$  срединной поверхности:

$$\frac{dQ}{dx} + N_y r^{-1} = p; \quad (8)$$

$$\frac{dN_x}{dx} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q, \quad (10)$$

где  $Q$  – поперечная сила;  $N_y$  – нормальное усилие, действующее по окружности оболочки.

Если на оболочку действует внутреннее давление  $p_1$ , то оно приводится к радиусу срединной поверхности по формуле

$$p = p_1 r_1 r^{-1},$$

а приложенное на наружном радиусе  $r_2$  наружное давление  $p_2$  –

$$p = p_2 r_2 r^{-1}.$$

Аналогично приводятся к срединной поверхности также другие локальные нагрузки и моменты [1].

Дифференцируя уравнение (10) по осевой координате и подставляя значение производной  $\frac{dQ}{dx}$  в равенство (7), находим

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + N_y r^{-1} = p. \quad (11)$$

Если выражение (7) подставить во второе равенство (5), а (6) – в третье, то получим окружное усилие и меридиональный изгибающий момент:

$$N_y = \mu_{xy} N_x + (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})^{-1} E_y w (\ln(r_2 r_1^{-1}) - \mu_{xy} \mu_{yx} h r^{-1}); \quad (12)$$

$$M_x = -\frac{1}{12} h^2 r^{-1} N_x + (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})^{-1} E_x \frac{h^3}{12} \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (13)$$

Дважды продифференцировав выражение (13) и подставив значение второй производной  $\frac{d^2 M_x}{dx^2}$  и  $N_y$  в зависимость (11), получим дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\mu_{yx} r^{-1} D_x^{-1} N_x + p D_x^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\beta = [3(\ln(r_2 r_1^{-1}) - \mu_{xy} \mu_{yx} h r^{-1}) E_y E_x^{-1} h^{-3} r^{-1}]^{1/4}; \quad (15)$$

$$D_x = \frac{1}{12} (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})^{-1} E_x h^3.$$

Уравнение для изотропной оболочки средней толщины отличается от такого для тонкостенной цилиндрической оболочки параметром  $\beta$ .

Если выражение логарифма разложить в ряд

$$\ln(r_2 r_1^{-1}) = h r^{-1} \left( 1 + \frac{1}{12} h^2 r^{-1} + \dots \right)$$

и удержать лишь первый его член, то параметр  $\beta$  переходит в известное соотношение для тонкостенной оболочки:

$$\beta = [3(1 - \mu^2)h^{-2}r^{-2}]^{1/4}.$$

Уравнение (14) также можно использовать для расчета несимметричного краевого эффекта, например антисимметричного, при условии, что напряженно-деформированное состояние оболочки плавно изменяется по окружности. При этом под нагрузками, силовыми факторами и смещениями подразумеваются амплитудные значения этих величин, получаемые в результате их разложения в ряды Фурье.

Однородное решение уравнения (14) формально не отличается от решения для тонкостенной оболочки, а частное решение находится обычным путем и записывается в виде

$$\bar{w} = \frac{1}{4}\beta^{-4}(-\mu_{yx}r^{-1}N_x + p)D_x^{-1}. \quad (16)$$

Таким образом, при расчете оболочечных систем ГТД, включающих выполненные из композитного материала оболочки средней толщины, достаточно использовать параметр  $\beta$  и цилиндрическую жесткость  $D_x$  согласно выражению (15), а напряжения определять из формул (6) и (7).

**2. Расчет прочности кольцевых элементов немалой кривизны из композитных материалов.** Представим векторы смещений и силовых факторов при осесимметричном деформировании, выраженные через начальный вектор состояния, следующим матричным уравнением [7]:

$$\begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = [K] \left( \begin{Bmatrix} \{w^0\} \\ \{M^0\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

где  $[K]$  – матрица, зависящая от геометрических параметров оболочки и функций Крылова;  $\{w\} = \{w, \vartheta\}^T$  – вектор смещений;  $\{M\} = \{M, Q\}^T$  – вектор силовых факторов;  $\{w^0\} = \{w^0, \vartheta^0\}^T$  – начальный вектор смещений;  $\{M^0\} = \{M^0, Q^0\}^T$  – начальный вектор силовых факторов;  $\{\bar{w}\} = \{\bar{w}, 0\}^T$  – вектор частного решения ( $T$  – транспонирование соответствующей матрицы).

Принимая функции Крылова для очень коротких оболочек равными

$$K_1(\beta x) = 1; \quad K_2(\beta x) = \beta x; \quad K_3(\beta x) = \frac{1}{2}\beta^2 x^2; \quad K_4(\beta x) = \frac{1}{6}\beta^3 x^3,$$

блоки матрицы  $[K]$  запишем так:

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & \beta x \\ -\frac{2}{3}\beta^4 x^3 & \beta \end{bmatrix}; \quad [K_{12}] = \frac{1}{2}\beta^2 x \begin{bmatrix} x & \frac{1}{3}\beta x^2 \\ 2 & \beta x \end{bmatrix};$$

$$[K_{21}] = -4\beta^2 D_x [K_{12}]; \quad [K_{22}] = \beta^2 D_x [K_{11}].$$

Полагая  $x = l$ , из равенства (17) находим вектор состояния на правом крае оболочки:

$$\begin{Bmatrix} \{w^l\} \\ \{M^l\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \{w^0\} \\ \{M^0\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

где блоки матрицы  $[L]$  равны:

$$[L_{11}] = [K_{11l}] [K_{110}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & l \\ -\frac{2}{3}\beta^4 l^3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[L_{12}] = [K_{12l}] [K_{220}^{-1}] = \frac{1}{2} D_x^{-1} l \begin{bmatrix} l & \frac{1}{3} l^2 \\ 2 & l \end{bmatrix};$$

$$[L_{21}] = [K_{21l}] [K_{110}^{-1}] = -2\beta^4 D_x l \begin{bmatrix} l & \frac{1}{3} l \\ 2 & l \end{bmatrix}; \quad [L_{22}] = [K_{22l}] [K_{220}^{-1}] = [L_{11}].$$

Пусть очень короткая оболочка свободна от закреплений и на левом торце нагружена моментом  $m_0$ . В этом случае граничные условия принимают вид

$$\{M^0\} = \begin{Bmatrix} m^0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{M^l\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Учитывая условия (19), из соотношений (18) находим смещения

$$\begin{aligned} \{w^0\} &= -[L_{21}^{-1}] [L_{22}] \{M^0\}; \\ \{w^l\} &= ([L_{12}] + [L_{11}] [L_{21}^{-1}] [L_{22}]) \{M^0\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем в соотношения (20) значения матриц  $[L_{11}]$ , ...,  $[L_{22}]$ . Отбрасывая второстепенные элементы матриц, в результате преобразований получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w^0 \\ \vartheta^0 \end{Bmatrix} &= \frac{3}{2} \beta^{-4} l^{-3} D_x^{-1} \begin{bmatrix} l & \frac{2}{3} l^2 \\ -2 & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m^0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} w^l \\ \vartheta^l \end{Bmatrix} &= -\frac{3}{2} \beta^{-4} l^3 D_x^{-1} \begin{bmatrix} l & \frac{2}{3} l^2 \\ 2 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m^0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Записывая (21) в скалярной форме, имеем

$$\begin{aligned} w^0 = -w^I &= \frac{3}{2} m^0 \beta^{-4} l^{-2} D_x^{-1}; \\ \vartheta^0 = -\vartheta^I &= -3m^0 \beta^{-4} l^{-3} D_x^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Формулы (22) используем для расчета колец. Учитывая, что кольца находятся в условиях одноосного напряженно-деформированного состояния, полагаем для  $\beta$  и  $D_x$   $\mu_{xy} = \mu_{yx} = 0$  и подставляем их в (22):

$$w^0 = -w^I = 6rl^{-2} E_y^{-1} m^0 \ln^{-1}(r_2 r_1^{-1}); \quad (23)$$

$$\vartheta^0 = -\vartheta^I = -12rl^{-3} E_y^{-1} m^0 \ln^{-1}(r_2 r_1^{-1}). \quad (24)$$

Анализ формул (23) и (24) показал, что они полностью совпадают с аналогичными зависимостями для колец, кривизна которых не может считаться малой [8], и дают достаточную точность при условии, что  $r_2 r_1^{-1} < 1,5$ . Отсюда следует примерная оценка границ толстостенности

$$0,05 \leq hr^{-1} \leq 0,4,$$

при которой оболочки можно считать оболочками средней толщины.

Если же

$$hr^{-1} > 0,4,$$

то оболочечные краевые эффекты можно не учитывать и ограничиться известными инженерными методиками, например, для полых валов, рассчитываемых на основании балочной теории.

**3. Расчет прочности короткой оболочки.** В случае очень короткой оболочки, свободной от закреплений и нагруженной нормальным давлением, которое приложено к срединной поверхности, применим для расчета выражения (18):

$$\{w^I\} = \{w^0\} = \{\bar{w}\}.$$

Записывая эти равенства в скалярной форме и учитывая частное решение (16), получаем

$$\begin{aligned} w^I = w^0 &= \frac{1}{4} \beta^{-4} D_x^{-1} p; \\ \vartheta^I = \vartheta^0 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Опуская в выражениях (25) для параметров  $\beta$ ,  $D_x$  члены, содержащие коэффициенты Пуассона, находим перемещение кольца, нагруженного силой  $q_2$ :

$$w^l = w^0 = q_2 r l^{-1} E_y^{-1} \ln^{-1}(r_2 r_1^{-1}), \quad (26)$$

где  $q_2 = pl$ .

Максимальные напряжения в кольцах определяем по формуле

$$\sigma_2 = (q_2 + 6l^{-1}m)r(r-h)^{-1}l^{-1} \ln^{-1}(r_2 r_1^{-1}). \quad (27)$$

Соотношения (26) и (27) применяются при расчете кольцевых элементов оболочечных систем средней толщины.

**Заключение.** Получены и предложены простые и удобные формулы для практических расчетов толстостенных оболочек ГТД, выполненных из композитных материалов, которые могут быть использованы при оценке их прочности.

### Резюме

Розглянуто методичні аспекти розрахунку товстостінних оболонок із композитних матеріалів, що використовуються в конструкціях ГТД. Наведено методику розрахунку кільцевих елементів немалої кривини, а також коротких оболонок, вільних від закріплення та навантажених на лівому торці згинальним моментом і нормальним тиском, що прикладений до серединної поверхні. На основі цих розв'язків визначено межу застосування теорії товстостінних оболонок.

1. *Композиционные материалы: В 8 т. Т. 3. Применение композиционных материалов в технике / Под ред. Б. Нотона. – М.: Машиностроение, 1978. – 511 с.*
2. *Маслов Б. П. Напряженно-деформированное состояние в матрице стохастически армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1989. – № 3. – С. 396 – 402.*
3. *Маслов Б. П., Меликбекян А. Х., Бугай С. Н. Прогнозирование прочности трехкомпонентных волокнистых композитов // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 9. – С. 10 – 16.*
4. *Соппротивление материалов / Под ред. Г. С. Писаренко. 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.*
5. *Guz A. N. Description and investigation of some non-classical problems of fracture mechanics and corresponding mechanisms // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 12. – P. 3 – 37.*
6. *Maslov B. P. Stress concentration in non-compressible multicomponent material // Ibid. – P. 108 – 114.*
7. *Жуков В. Б. Расчет на прочность статора авиационного ГТД при осесимметричном деформировании // Пробл. прочности. – 1984. – № 4. – С. 93 – 101.*
8. *Тимошенко С. П. Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.*

Поступила 22. 05. 2002