УДК 539.3

Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях

Н. М. Бородачев, В. В. Астанин

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

Предлагается новый метод решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях. В основу метода положено уравнение равновесия в форме Тедоне. В отличие от способов Бетти и Черрути–Буссинеска, в рамках описываемого подхода не требуется предварительно определять объемное расширение. С целью иллюстрации метода рассмотрены первая и вторая краевые задачи для упругого изотропного полупространства.

Ключевые слова: теория упругости в перемещениях, пространственная задача, объемное расширение, вектор перемещений, гармонический вектор, гармонический скаляр.

Введение. Наиболее известными общими решениями пространственной задачи теории упругости в перемещениях являются решения Галеркина, Папковича–Нейбера и Нахди–Хсу. Бетти, Черрути и Буссинеск разработали метод интегрирования уравнения равновесия в перемещениях [1]. В соответствии с этим методом, для нахождения вектора перемещений необходимо предварительно определить объемное расширение.

Дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил имеет вид

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; ν – коэффициент Пуассона; Δ – оператор Лапласа в R^3; ∇ – набла-оператор в R^3. Точки пространства $\mathbf{R}^3$ будем обозначать $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Воспользуемся известным соотношением [2]

$$2\nabla\varphi = \Delta(\mathbf{R}\varphi) - \mathbf{R}\Delta\varphi, \tag{2}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{i}_s x_s$ – радиус-вектор. Применяя (2) к выражению $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$, получаем уравнение

$$\Delta\left\{\mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\nu)} \mathbf{R}(\nabla \cdot \mathbf{u})\right\} = 0 \tag{3}$$

с учетом того, что объемное расширение $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ является гармонической функцией в случае отсутствия массовых сил. Уравнение (3) представляет собой дифференциальное уравнение равновесия в форме Тедоне [3].

Бетти и Черрути [1] разработали способ нахождения объемного расширения θ, когда на границе тела заданы перемещения или напряжения.

Однако в этом случае расчет величины θ сопоставим по сложности с исходной задачей.

Когда объемное расширение $\theta(\mathbf{x})$ найдено, определение вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ [1, 4] на основании уравнения (3) сводится к задаче теории потенциала.

Новое выражение для вектора перемещений. Покажем, что вектор перемещений $\mathbf{u}$ можно найти с помощью уравнения (3), не определяя предварительно объемное расширение θ. Алгоритм решения опишем для случая упругого изотропного полупространства $x_3 \geq 0$, на границе которого заданы перемещения или нагрузки.

Из уравнения (3) следует

$$\mathbf{B} = \mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\nu)} \mathbf{R}(\nabla \cdot \mathbf{u}), \tag{4}$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ – гармонический вектор, т.е. $\Delta \mathbf{B} = 0$.

Формула (4) позволяет выразить гармонический вектор $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ через вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Сделаем формальное предположение

$$\mathbf{R}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{R}\theta = x_3 \nabla \varphi, \tag{5}$$

где φ – некоторая скалярная функция.

Из (5) следует

$$x_3 \Delta\varphi + \partial \varphi / \partial x_3 = \operatorname{div}(\mathbf{R}\theta) = 3\theta + \mathbf{R} \cdot \nabla\theta.$$

С учетом соотношения (5) формула (4) принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \nabla\varphi, \quad \Delta \mathbf{B} = 0. \tag{6}$$

Теперь потребуем, чтобы выражение для вектора перемещений (6) удовлетворяло дифференциальному уравнению равновесия (1):

$$\Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{2(1-2\nu)} \left[x_3 \nabla(\Delta\varphi) + 2\nabla \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \right];$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_3 \Delta\varphi \right);$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \nabla \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_3 \Delta\varphi \right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получаем

$$2\nabla\nabla\cdot\mathbf{B}-\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}-x_3\nabla(\Delta\varphi)-\frac{1}{1-2\nu}\nabla(x_3\Delta\varphi)=0. \tag{7}$$

Если положить

$$\Delta\varphi=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu}\nabla\cdot\mathbf{B}, \tag{8}$$

то уравнение (7) преобразуется в тождество.

Таким образом, выражение (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению равновесия (1), если функция φ подчиняется условиям (8). В компонентах декартовой системы координат выражение (6) имеет вид

$$\begin{cases} u_1=B_1-\dfrac{1}{2(1-2\nu)}x_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1};\\ u_2=B_2-\dfrac{1}{2(1-2\nu)}x_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2};\\ u_3=B_3-\dfrac{1}{2(1-2\nu)}x_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}. \end{cases} \tag{9}$$

Покажем, что подход (5)–(9) позволяет решить первую и вторую краевые задачи для полупространства.

Первая краевая задача. В этой задаче ставится кинематическое краевое условие: в полупространстве $x_3\ge 0$ разыскивается вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, принимающий на границе $x_3=0$ заданное значение

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_3=0}=\mathbf{u}^*(x_1,x_2). \tag{10}$$

Из формул (9) видно, что можно для компонент гармонического вектора $\mathbf{B}$ сформулировать граничные условия. На основании (9) и (10) имеем

$$B_i\big|_{x_3=0}=u_i^*\qquad (i=1,2,3).$$

Таким образом, нахождение гармонических функций B_i сводится к задаче Дирихле для полупространства, решение которой представлено в форме [2]

$$B_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_3}{2\pi}\iint_{R^2}\frac{u_i^*(y_1,y_2)dy_1dy_2}{r^3}, \tag{11}$$

где

$$r=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{1/2}.$$

Определение функций B_i позволяет найти функцию φ. Из условий (8) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}=\frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu}\nabla\cdot\mathbf{B}. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение гармонические функции L_i:

$$L_i=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{u_i^*(y_1,y_2)}{r}dy_1dy_2 \qquad (i=1,2,3).$$

Очевидно, что

$$B_i=\frac{\partial L_1}{\partial x_3}. \tag{13}$$

На основании полученных уравнений (12) и (13) вычисляем функцию φ следующим образом:

$$\varphi=\frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu}\nabla\cdot\mathbf{L}=\frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x_3}\right), \tag{14}$$

где $\mathbf{L}=(L_1,L_2,L_3)$ – гармонический вектор.

Итак, гармонический вектор $\mathbf{B}=(B_1,B_2,B_3)$ и гармонический скаляр φ определяются соответственно по формулам (11) и (14). Гармонический скаляр φ, входящий в соотношение (6), определен в процессе решения задачи.

Следовательно, вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, соответствующий краевому условию (10), может быть вычислен по уравнению (6) без предварительного определения объемного расширения $\theta(\mathbf{x})$.

Подставляя (13), (14) в (9), получаем окончательные соотношения, с помощью которых определяются компоненты вектора перемещений для упругого изотропного полупространства в случае первой краевой задачи:

$$u_1=\frac{\partial L_1}{\partial x_3}-\frac{x_3}{3-4\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x_3}\right);$$

$$u_2=\frac{\partial L_2}{\partial x_3}-\frac{x_3}{3-4\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x_3}\right);$$

$$u_3=\frac{\partial L_3}{\partial x_3}-\frac{x_3}{3-4\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x_3}\right).$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться, что полученные таким образом перемещения удовлетворяют уравнениям равновесия (1) и граничным условиям (10), т.е. являются точным решением первой краевой задачи для упругого полупространства.

Вторая краевая задача. Это задача статическая. На границе полупространства $x_3 \geq 0$ заданы напряжения. При $x_3 = 0$ зададим

$$\sigma_{3i} = \begin{cases} -f_1(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_i; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_i, \end{cases} \tag{15}$$

где Ω_i – области нагружения в плоскости $x_3 = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Примем также

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \mu\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right); \\ \sigma_{32} = \mu\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right); \\ \sigma_{33} = 2\mu\left(\dfrac{\nu}{1-2\nu}\theta + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right), \end{cases} \tag{16}$$

где μ – модуль сдвига.

Как и в предыдущем случае, основываемся на формулах (9). Подставляя (9) в (16), получаем

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \mu\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_3}{\partial x_1} - a\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) - 2a\mu x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}; \\ \sigma_{32} = \mu\left(\dfrac{\partial B_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_3}{\partial x_2} - a\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) - 2a\mu x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \sigma_{33} = \mu\left(2\dfrac{\partial B_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) - 2a\mu x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}; \quad a = \dfrac{1}{2(1-2\nu)}. \end{cases} \tag{17}$$

Введем в рассмотрение функции

$$N_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_i} f_i(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) dy_1 dy_2 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Функции N_i – гармонические в полупространстве $x_3 > 0$, а на плоскости $x_3 = 0$ они могут быть записаны в форме

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x_3^2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_{\Omega_i} \frac{f_i(y_1, y_2)}{r} dy_1 dy_2 =$$

$$= \begin{cases} -f_i(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_i; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_i. \end{cases} \tag{19}$$

При получении этого результата использовано свойство нормальной производной потенциала простого слоя [5].

На основании формул (15), (17)–(19) имеем

$$\mu\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3}+\frac{\partial B_3}{\partial x_1}-a\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 N_1}{\partial x_3^2}; \qquad \mu\left(\frac{\partial B_2}{\partial x_3}+\frac{\partial B_3}{\partial x_2}-a\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 N_2}{\partial x_3^2};$$

$$\mu\left(2\frac{\partial B_3}{\partial x_3}-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 N_3}{\partial x_3^2},$$

откуда находим компоненты гармонического вектора **B**:

$$\begin{cases} B_1=\dfrac{1}{2\mu}\left(2\dfrac{\partial N_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial N_3}{\partial x_1}\right)+2a\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \\ B_2=\dfrac{1}{2\mu}\left(2\dfrac{\partial N_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial N_3}{\partial x_2}\right)+2a\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \\ B_3=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial N_3}{\partial x_3}+\dfrac{1}{2}\varphi, \quad \varphi=\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{cases} \tag{20}$$

Из приведенных выражений (20) следует

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_3}\nabla\cdot\mathbf{N}+\frac{1-4\nu}{2-4\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \tag{21}$$

где $\mathbf{N}=(N_1, N_2, N_3)$.

Подставляя (21) в соотношение (19), получаем выражение для определения гармонического скаляра φ:

$$\varphi=\frac{1-2\nu}{\mu}\nabla\cdot\mathbf{N}=\frac{1-2\nu}{\mu}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial N_3}{\partial x_3}\right). \tag{22}$$

Очевидно, что и в случае второй краевой задачи гармонический скаляр φ определен в процессе решения.

Таким образом, компоненты вектора перемещений для рассматриваемой краевой задачи могут быть найдены по формулам (9), где компоненты гармонического вектора **B** и скаляр φ определяются по выражениям (20), (22) соответственно:

$$u_1=\frac{1}{2\mu}\left[2\frac{\partial N_1}{\partial x_3}-\frac{\partial N_3}{\partial x_1}+4\alpha\nu\mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial N_3}{\partial x_3}\right)\right]; \tag{23а}$$

$$u_2=\frac{1}{2\mu}\left[2\frac{\partial N_2}{\partial x_3}-\frac{\partial N_3}{\partial x_2}+4\alpha\nu\mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial N_3}{\partial x_3}\right)\right]; \tag{23б}$$

$$u_3=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial N_3}{\partial x_3}+(1-2\nu)\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial N_3}{\partial x_3}\right)-x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial N_3}{\partial x_3}\right)\right].\tag{23в}$$

Итак, используя соотношения (23), можно вычислить компоненты вектора перемещений для упругого полупространства в случае второй краевой задачи и путем непосредственной проверки показать, что они точно удовлетворяют как (1), так и (15).

Как видно из приведенных результатов, вектор перемещений, соответствующий краевому условию (15), найден без предварительного определения обьемного расширения $\theta(\mathbf{x})$.

Зная компоненты вектора перемещений, можно при необходимости вычислить по известным формулам компоненты тензора напряжений.

Для подтверждения достоверности полученного решения рассмотрим частный случай, когда на границе полупространства задана только нормальная распределенная нагрузка, а касательная нагрузка отсутствует:

$$N_1=0, \qquad N_2=0, \qquad N_3\neq 0.$$

Тогда формулы (20), (22) принимают вид

$$B_1=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial N_3}{\partial x_1}+2\alpha\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}; \qquad B_2=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial N_3}{\partial x_2}+2\alpha\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_2};$$

$$B_3=\frac{1-\nu}{\mu}\frac{\partial N_3}{\partial x_3}; \qquad \varphi=\frac{1-2\nu}{\mu}\frac{\partial N_3}{\partial x_3}; \qquad \Phi=\frac{1-2\nu}{\mu}N_3.$$

Подставляя эти выражения в (6), получаем

$$\mathbf{u}=\frac{2(1-\nu)}{\mu}\mathbf{i}_3\frac{\partial N_3}{\partial x_3}-\frac{1}{2\mu}\nabla\left[x_3\frac{\partial N_3}{\partial x_3}+(1-2\nu)N_3\right],$$

что согласуется с известным результатом [2].

В формулы (20), (23) входит функция $\Phi(x_1,x_2,x_3)$, которая связана с $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ соотношением

$$\varphi=\partial\Phi/\partial x_3.\tag{24}$$

Функция φ определяется по уравнению (22). Чтобы найти функцию Φ, проинтегрируем (24) по переменной x_3. Тогда

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\int\varphi(x_1,x_2,x_3)dx_3+F(x_1,x_2).$$

Из условия затухания напряжений при $x_3\to\infty$ следует, что $F(x_1,x_2)=0$. Следовательно,

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\int\varphi(x_1,x_2,x_3)dx_3.$$

О решении Папковича–Нейбера. В настоящее время для решения пространственных задач теории упругости в перемещениях чаще всего используют решение Папковича–Нейбера

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0), \tag{25}$$

где $\Delta \mathbf{B} = 0$ и $\Delta B_0 = 0$. Подробное исследование данного представления содержится в работе [6]. Однако при таком подходе не предусматривается, какие краевые условия следует наложить на поверхность тела, на гармонический вектор $\mathbf{B}$ и гармонический скаляр B_0 при решении первой и второй краевых задач. Поэтому П. Ф. Папкович [7] предлагает при решении краевых задач с использованием представления (25) обращаться к методу последовательных приближений.

Заключение. Получена новая форма решения пространственной задачи в перемещениях, в которой вектор перемещений выражается через гармонический вектор и гармонический скаляр. На примере упругого полупространства показано, что предложенная форма позволяет сравнительно просто решать краевые задачи теории упругости.

Резюме

Запропоновано новий метод розв'язку просторової задачі теорії пружності в переміщеннях, що базується на рівнянні рівноваги у формі Тедоне. На відміну від методів Бетті і Черруті–Буссінеска у рамках описаного підходу немає потреби попередньо визначати об'ємне розширення. Із метою ілюстрації методу розглянуто першу та другу крайові задачі для пружного ізотропного півпростору.

1. *Love A. E. H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. – Cambridge: University Press, 1927. – 674 p.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
3. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. VIa/2. – P. 1 – 295.
4. *Sneddon J. N. and Berry D. S.* The Classical Theory of Elasticity. – Berlin: Springer, 1958. – 219 p.
5. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. – 318 с.
6. *Слободянский М. Г.* Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 1. – С. 55 – 74.
7. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Л.; М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.

Поступила 09. 12. 2002