УДК 539.3

Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Сформулирована смешанная проекционно-сеточная схема решения краевых задач теории упругости. Исследована корректность и сходимость смешанных аппроксимаций для деформаций и перемещений. Представлены результаты анализа применения численного интегрирования. Оценки сходимости и точности базируются на теории обобщенных функций и методах функционального анализа. Предложены итерационные алгоритмы решения дискретных задач.

Ключевые слова: теория упругости, метод конечных элементов, смешанная схема, аппроксимация, устойчивость, сходимость, точность, итерационные методы.

Введение. В настоящее время наиболее универсальным методом решения краевых задач теории упругости является метод конечных элементов (МКЭ). Однако, отмечая достоинства классического МКЭ, следует учитывать и его недостатки. К наиболее существенным из них относятся разрывная аппроксимация напряжений и деформаций, а также более низкий порядок сходимости аппроксимации напряжений и деформаций по сравнению с таковым для перемещений. В то же время напряжения обычно являются основными искомыми функциями в задачах теории упругости и, следовательно, должны быть определены с достаточно высокой степенью точности.

В связи с этим перспективным в численном анализе задач теории упругости представляется применение смешанных формулировок МКЭ, в которых напряжения или деформации входят в разрешающие уравнения наряду с перемещениями как равноправные неизвестные. Основной выигрыш при использовании смешанных и смешанно-гибридных формулировок МКЭ по сравнению с классическим МКЭ в форме метода перемещений состоит в уменьшении погрешности аппроксимации для напряжений и деформаций, а также возможности точного удовлетворения статических граничных условий на поверхности тела. Еще одно преимущество заключается в том, что смешанные схемы МКЭ позволяют обеспечить непрерывность аппроксимации не только для перемещений, но и для напряжений и деформаций.

Исходные предпосылки для построения смешанных формулировок МКЭ могут быть различными, хотя все они имеют общие характерные особенности. Применяются вариационные принципы, теория двойственности, обобщенная постановка краевой задачи. И. Бабушка [1] и Ф. Бреззи [2] впервые теоретически сформулировали условия разрешимости и сходимости смешанной аппроксимации. Общая теория и анализ смешанно-гибридных методов содержатся в работе [3]. Приложение смешанных формулировок МКЭ к решению задач теории упругости и их численная реализация описаны в работах С. Н. Атлури, О. С. Зенкевича, П. П. Ворошко, А. С. Сахарова, С. Э. Уманского и др.

Однако, обладая преимуществами в точности, смешанные схемы МКЭ не получили широкого распространения, и их применение к задачам теории упругости ограничено. Это объясняется трудностями практического конструирования смешанных аппроксимаций, удовлетворяющих условиям устойчивости и сходимости метода. К тому же остается важная для практики задача фактического вычисления дискретного решения, что сопряжено с трудностями вычислительного характера. Актуальность решения этих проблем и определила содержание настоящей работы.

Обобщенная постановка краевой задачи теории упругости. Пусть рассматриваемое тело занимает область $\Omega \in \Re^n$ $(n = 2, 3)$ и имеет регулярную границу Γ. На части границы Γ_u заданы перемещения, а на оставшейся части Γ_σ – поверхностные нагрузки. Кроме того, тело подвержено воздействию массовых сил и начальных деформаций.

Считаем, что перемещения u удовлетворяют на Γ_u однородным граничным условиям, напряжения, полная и начальная деформации описываются тензорными функциями σ, ε и ξ соответственно. Связь между перемещениями и деформациями запишем в виде

$$\varepsilon = Bu, \tag{1}$$

где B – линейный дифференциальный оператор. Область определения оператора B обозначим через U, а область значений – через Y. Множества U и Y будем рассматривать как замкнутые линейные подпространства гильбертовых пространств V и X со скалярными произведениями $(\cdot;\cdot)_V$ и $(\cdot;\cdot)_X$ соответственно. Сужение $(\cdot;\cdot)_X$ на Y обозначим через $(\cdot;\cdot)_Y$. Тогда в силу неравенства Корна [4] множество U полно относительно нормы, ассоциированной со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_U = (B\cdot, B\cdot)_Y$, и, следовательно, U – гильбертово пространство.

Замечание 1. Обозначим через $H^1(\Omega)$ пространство функций, суммируемых с квадратом в Ω вместе со своими первыми производными включительно [5]. Тогда $V = [H^1(\Omega)]^n$. Пусть, кроме того, $H^{1/2}(\Gamma)$ – пространство следов на Γ функций из $H^1(\Omega)$. Полное подпространство в $H^1(\Omega)$ с компактным носителем в Ω обозначим через $H_0^1(\Omega)$. Тогда пространство U можно определить как промежуточное пространство между $[H_0^1(\Omega)]^n$ и $[H^1(\Omega)]^n$. Множество допустимых тензор-функций для напряжений и деформаций будем рассматривать как элементы пространства $X = [L_2(\Omega)]^m$, где $L_2(\Omega)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом в Ω, $m = 6$ при $n = 3$ и $m = 3$ при $n = 2$.

Соотношения между напряжениями и деформациями представим в виде

$$\sigma = D(\varepsilon - \xi), \tag{2}$$

где D – линейный оператор, связанный с физической природой упругой среды. По определению D – самосопряженный положительно определенный и ограниченный оператор, действующий из X в X. Тогда соотношение $(\cdot;\cdot)_D = (D\cdot;\cdot)_X$ индуцирует норму на пространстве X, причем существуют два вещественных положительных числа m и M такие, что

$$\sqrt{m}\|\cdot\|_X \le \|\cdot\|_D \le \sqrt{M}\|\cdot\|_X. \tag{3}$$

Обозначим через U^* пространство, сопряженное к U, и определим $\rho(v)$ как значение непрерывного линейного функционала $\rho \in U^*$ на элементе $v \in U$. Множество непрерывных линейных функционалов над U ассоциируем с работой приложенных к телу нагрузок на возможных перемещениях $v \in U$.

Замечание 2. Пространство U^* является полным в смысле слабой топологии в пространстве U и имеет структуру $U^* = [H^{-1}(\Omega)]^n \times [H^{-1/2}(\Gamma_\sigma)]^n$, где $H^{-1}(\Omega)$, $H^{-1/2}(\Gamma_\sigma)$ – пространства, сопряженные к $H_0^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Gamma_\sigma)$ соответственно.

С использованием вариационного уравнения Лагранжа [6] статические соотношения запишем в виде

$$(\sigma, Bv)_X = \rho(v), \qquad \forall\, v \in U. \tag{4}$$

Уравнения (1), (2), (4) позволяют сформулировать обобщенную краевую задачу теории упругости в перемещениях:

$$(Bu, Bv)_D = \rho(v) + (\xi, Bv)_D, \qquad \forall\, v \in U. \tag{5}$$

Существование и единственность обобщенного решения (5) следуют из свойств коэрцитивности и непрерывности симметричной билинейной формы $a(\cdot;\cdot): U \times U \to \Re$, определяемой соотношением

$$a(\cdot;\cdot) = (B\cdot, B\cdot)_D. \tag{6}$$

С помощью неравенств (3) получаем

$$m\|v\|_U^2 \le a(v,v) \le M\|v\|_U^2, \qquad \forall\, v \in U. \tag{7}$$

Следовательно, краевая задача, описываемая уравнением (5), однозначно разрешима при любых $\rho \in U^*$ и $\xi \in X$.

Использование уравнения (5) для построения сеточных схем приводит к обычной формулировке МКЭ в форме метода перемещений. В результате деформации вычисляются дифференцированием приближенных перемещений, найденных из решения задачи в перемещениях, что является основной причиной ухудшения сходимости аппроксимации для деформаций и напряжений по сравнению с таковой для перемещений.

Альтернативный подход состоит в изменении обобщенной постановки краевой задачи таким образом, чтобы деформации являлись ее непосредственными аргументами, а не определялись на основе решения задачи в перемещениях. Представив обобщенную краевую задачу системой уравнений

$$\begin{aligned}(\varepsilon,\eta)_D &= (Bu,\eta)_D, \qquad \forall\,\eta \in X;\\ (\varepsilon,Bv)_D &= \rho(v)+(\xi,Bv)_D, \qquad \forall\,v \in U,\end{aligned} \tag{8}$$

получим обобщенную постановку краевой задачи теории упругости относительно перемещений и деформаций.

Формулировка дискретной задачи. Построение проекционно-сеточной схемы базируется на дискретизации исходной континуальной задачи (8). Бесконечномерное пространство $U \times X$ аппроксимируется конечномерным пространством $U_h \times X_h$, где h – определяющий параметр семейства конечномерных пространств, стремящийся в пределе к нулю.

Для построения конечномерных пространств в качестве базисных используем кусочно-полиномиальные функции. Преимущества такого базиса заключаются в том, что носители его функций гораздо меньше Ω, и базис “почти ортогонален”.

Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств $U_h \times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \subset U \times X$. Тогда по аналогии с уравнениями (8) определим дискретную задачу следующим образом. Найти пару $(u_h,\varepsilon_h) \in U_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{aligned}(\varepsilon_h,\eta_h)_D &= (Bu_h,\eta_h)_D, \qquad \forall\,\eta_h \in X_h;\\ (\varepsilon_h,Bv_h)_D &= \rho(v_h)+(\xi,Bv_h)_D, \qquad \forall\,v_h \in U_h.\end{aligned} \tag{9}$$

Система уравнений (9) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку задачи теории упругости в перемещениях и деформациях.

Разрешимость дискретной задачи. Установим вначале соответствие между подпространствами $X_h \subset X$ и $Y_h \subset Y$. Заметим, что Y_h – множество значений оператора B, действующего на замкнутом подпространстве $U_h \subset U$, т.е. $Y_h = BU_h$. Следовательно, Y_h – аппроксимирующее подпространство для пространства Y. Оба пространства X_h и Y_h являются конечномерными и замкнутыми линейными подпространствами гильбертова пространства X. Однако ни одно из них, вообще говоря, не является подмножеством другого. Более того, пространства X_h и Y_h могут “не пересекаться”.

Отнесем каждому элементу $\bar{\tau}_h \in Y_h$ его проекцию на X_h. С этой целью для всякого h и любого элемента $\bar{\tau}_h \in Y_h$ определим проектирующий оператор I_h на пространство X_h. Тогда $I_h\bar{\tau}_h$ – ортогональная проекция $\bar{\tau}_h \in Y_h$ на X_h и, следовательно, имеем

$$(\bar{\tau}_h - I_h\bar{\tau}_h,\eta_h)_D = 0, \qquad \forall\,\eta_h \in X_h. \tag{10}$$

С использованием ортопроектора $I_h : Y_h \to X_h$ уравнения (9) запишем в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h, \eta_h)_D &= (I_h B u_h, \eta_h)_D, \qquad \forall \eta_h \in X_h; \\ (\varepsilon_h, I_h B v_h)_D &= \rho(v_h) + (\xi, B v_h)_D, \qquad \forall v_h \in U_h. \end{aligned} \tag{11}$$

Условие устойчивости. Пусть для всякого h и любого элемента $\bar{\tau}_h \in Y_h$ справедлива оценка

$$d \|\bar{\tau}_h\|_D \le \|I_h \bar{\tau}_h\|_D, \qquad 0 < d \le 1, \tag{12}$$

где постоянная d не зависит от h. Тогда при любом h дискретная задача (9) однозначно разрешима.

Действительно, принимая в уравнениях (11) $\eta_h = I_h B u_h \in X_h$ и $v_h = u_h \in U_h$, а затем $\eta_h = \varepsilon_h \in X_h$, на основе неравенств (3) и (12) получаем

$$\begin{aligned} \|u_h\|_U &\le \frac{1}{d^2}\left[\frac{1}{m}\|\rho\|_{U^*} + \sqrt{\frac{M}{m}}\|\xi\|_X\right]; \\ \|\varepsilon_h\|_X &\le \frac{1}{d}\left[\frac{1}{m}\|\rho\|_{U^*} + \sqrt{\frac{M}{m}}\|\xi\|_X\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, условие (12) обеспечивает корректную постановку дискретной задачи (9), а элемент $\varepsilon_h = I_h B u_h$ – суть ортогональная проекция $B u_h \in Y_h$ на X_h.

Замечание 3. Согласно условию (12) имеем

$$d = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \frac{\|I_h \bar{\tau}_h\|_D}{\|\bar{\tau}_h\|_D}. \tag{14}$$

Поскольку $I_h : Y_h \to X_h$ – проектирующий оператор, из равенства (14) следует

$$d^2 = 1 - \sup_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \inf_{\eta_h \in X_h} \frac{\|\bar{\tau}_h - \eta_h\|_D^2}{\|\bar{\tau}_h\|_D^2}, \tag{15}$$

откуда приходим к оценке снизу для d:

$$d^2 \ge 1 - \sup_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \frac{\|\bar{\tau}_h - \eta_h\|_D^2}{\|\bar{\tau}_h\|_D^2}, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{16}$$

Отметим, что равенства (14) и (15) допускают простую геометрическую интерпретацию. Косинус угла между гиперплоскостями Y_h и X_h не может быть меньше d, а синус – больше величины $\sqrt{1-d^2}$.

Сходимость смешанной аппроксимации. Для формулировки теоремы сходимости рассмотрим вначале последовательность ортогональных проектирующих операторов, каждый из которых отображает на соответствующее подпространство.

Определим для всякого h проектирующий оператор на замкнутое линейное подпространство U_h гильбертова пространства U относительно скалярного произведения $a(\cdot;\cdot)$. Для этого отнесем каждому элементу $v \in U$ его ортогональную проекцию на подпространство U_h. Полученное соответствие есть оператор в U. Обозначим его через P_h и по определению примем

$$(Bv - BP_h v, Bv_h)_D = 0, \qquad \forall\, v_h \in U_h. \tag{17}$$

С помощью ортопроектора $P_h: U \to U_h$ для любого $v \in U$ имеем

$$\|Bv - BP_h v\|_D = \inf_{v_h \in U_h} \|Bv - Bv_h\|_D. \tag{18}$$

Проектирующий оператор на замкнутое линейное подпространство X_h гильбертова пространства X обозначим через θ_h. Оператор θ_h, ассоциируемый со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_D$, определим для всякого h и любого $\eta \in X$ из равенства

$$(\eta - \theta_h \eta, \eta_h)_D = 0, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h. \tag{19}$$

С использованием ортопроектора $\theta_h: X \to X_h$ для всякого $\eta \in X$ получим

$$\|\eta - \theta_h \eta\|_D = \inf_{\eta_h \in X_h} \|\eta - \eta_h\|_D. \tag{20}$$

Сужение θ_h на Y_h есть оператор I_h, т.е. I_h – оператор с областью определения Y_h, для которого $I_h \bar{\tau}_h = \theta_h \bar{\tau}_h$, $\forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h$. Образ оператора I_h обозначим через $\mathrm{Im}(I_h)$. Множество $\mathrm{Im}(I_h)$ – линейно и замкнуто, т.е. является подпространством в X_h. Ортогональное дополнение к подпространству $\mathrm{Im}(I_h)$ обозначим через $[\mathrm{Im}(I_h)]^{\perp}$, которое также есть замкнутое подпространство в X_h. Тогда любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть единственным образом представлен в виде $\eta_h = \pi_h + \mu_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in [\mathrm{Im}(I_h)]^{\perp}$, причем

$$\|\mu_h\|_D = \|\eta_h - \pi_h\|_D = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \|\eta_h - I_h \bar{\tau}_h\|_D, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h. \tag{21}$$

Исходя из этого для любого $\eta \in X$ элемент $\theta_h \eta \in X_h$ допускает ортогональное разложение вида $\theta_h \eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и

$\mu_h \in [\mathrm{Im}(I_h)]^{\perp}$. В таком случае можно оценить разность $\eta - \pi_h$. Учитывая, что $\eta - \pi_h = \eta - \theta_h \eta + \mu_h$, для всякого $\eta \in X$ имеем

$$\|\eta - \pi_h\|_D^2 = \|\eta - \theta_h \eta\|_D^2 + \|\mu_h\|_D^2, \tag{22}$$

откуда на основании свойств ортогональных проекций (20) и (21) для любого $\eta \in X$ получаем

$$\|\eta - \pi_h\|_D \le \inf_{\chi_h \in X_h} \|\eta - \chi_h\|_D + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \|\theta_h(\eta - \bar{\tau}_h)\|_D. \tag{23}$$

Оператор I_h^*, сопряженный к оператору I_h, отображает X_h на Y_h и определяется соотношением

$$(I_h^* \eta_h, \bar{\tau}_h)_D = (\eta_h, I_h \bar{\tau}_h)_D, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{24}$$

Транспозицию оператора I_h обозначим через I_h'. Операторы I_h^* и I_h' связаны формулами $I_h^* = D^{-1} I_h' D$ и $I_h' = D I_h^* D^{-1}$. С помощью равенств (10) и (24) для любого $\eta_h \in X_h$ находим

$$(\eta_h - I_h^* \eta_h, \bar{\tau}_h)_D = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{25}$$

Следовательно, $I_h^*: X_h \to Y_h$ – ортогональный проектирующий оператор, $I_h^* \eta_h$ – ортогональная проекция $\eta_h \in X_h$ на пространство Y_h. Более того, согласно равенству (24) для всякого $\mu_h \in [\mathrm{Im}(I_h)]^{\perp}$ имеем

$$(I_h^* \mu_h, \bar{\tau}_h)_D = (\mu_h, I_h \bar{\tau}_h)_D = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \tag{26}$$

откуда ввиду произвольности выбора $\bar{\tau}_h \in Y_h$ получаем $\mu_h \in \ker(I_h^*)$, где $\ker(I_h^*)$ – ядро оператора I_h^*, другими словами, $\ker(I_h^*) = [\mathrm{Im}(I_h)]^{\perp}$. Таким образом, ортопроекторы I_h и I_h^* порождают разложение пространства X_h в прямую сумму подпространств $X_h = \mathrm{Im}(I_h) \oplus \ker(I_h^*)$.

Если оператор I_h удовлетворяет условию устойчивости (12), то отображение $I_h: Y_h \to X_h$ взаимно однозначно и непрерывно. Согласно теореме Банаха [7], существует обратный линейный ограниченный оператор I_h^{-1}, действующий из $\mathrm{Im}(I_h)$ на Y_h, причем

$$\|I_h^{-1} \pi_h\|_D \le \frac{1}{d} \|\pi_h\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{27}$$

Сужение I_h^* на $\mathrm{Im}(I_h)$ обозначим через $\widetilde{I}_h^*$. Оператор $\widetilde{I}_h^*$ отображает $\mathrm{Im}(I_h)$ на Y_h и устанавливает между этими пространствами взаимно однозначное соответствие. Определяя в равенстве (24) элемент $\bar{\tau}_h \in Y_h$ с помощью соотношения $\bar{\tau}_h = I_h^{-1}\pi_h \in Y_h$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца [8] и оценкой (27) для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ получаем

$$\|\pi_h\|_D^2 = (\widetilde{I}_h^*\pi_h, I_h^{-1}\pi_h)_D \le \|\widetilde{I}_h^*\pi_h\|_D \|I_h^{-1}\pi_h\|_D \le \frac{1}{d}\|\widetilde{I}_h^*\pi_h\|_D \|\pi_h\|_D, \tag{28}$$

откуда следует

$$d\|\pi_h\|_D \le \|\widetilde{I}_h^*\pi_h\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{29}$$

С помощью оценок (27) и (29) находим

$$\|\pi_h - I_h^{-1}\pi_h\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\|\pi_h\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h); \tag{30}$$

$$\|\pi_h - \widetilde{I}_h^*\pi_h\|_D \le \sqrt{1-d^2}\,\|\pi_h\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{31}$$

Замечание 4. Поскольку для всякого $\eta_h \in X_h$ справедливо ортогональное разложение вида $\eta_h = \pi_h + \mu_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I_h^*)$, из равенства $I_h^*\mu_h = 0$ в Y_h следует $I_h^*\eta_h = \widetilde{I}_h^*\pi_h$ в Y_h. Тогда для любого $\eta_h \in X_h$ элемент $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ однозначно определяется выражением $\pi_h = (\widetilde{I}_h^*)^{-1} I_h^*\eta_h$, причем $\|\pi_h\|_D \le \|\eta_h\|_D$. Действительно, оператор $\widetilde{I}_h^*$ удовлетворяет неравенству (29) и, следовательно, существует обратный линейный ограниченный оператор $(\widetilde{I}_h^*)^{-1}$ из Y_h на $\mathrm{Im}(I_h)$. Таким образом, $(\widetilde{I}_h^*)^{-1}I_h^*$ – проектирующий оператор, действующий из X_h в подпространство $\mathrm{Im}(I_h)$, а $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – ортогональная проекция $\eta_h \in X_h$ на $\mathrm{Im}(I_h)$. В более удобном виде запишем $\pi_h = I_h(\widetilde{I}_h^* I_h)^{-1} I_h^*\eta_h$ для любого $\eta_h \in X_h$. Заметим, что такая форма записи элемента $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ является вполне корректной. В самом деле, $\widetilde{I}_h^* I_h : Y_h \to Y_h$ – самосопряженный положительно определенный и ограниченный оператор в Y_h и, следовательно, существует обратный линейный ограниченный оператор $(\widetilde{I}_h^* I_h)^{-1}$, для которого $\|(\widetilde{I}_h^* I_h)^{-1}\|_D \le 1/d^2$.

Замечание 5. Пусть $\eta = Bv \in Y$, где $v \in U$. Кроме того, $\theta_h\eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I_h^*)$. Тогда можно оценить разность $\eta - \widetilde{I}_h^*\pi_h \in Y$. С использованием ортогонального разложения элемента $\eta - \widetilde{I}_h^*\pi_h \in Y$ в виде $\eta - \widetilde{I}_h^*\pi_h = \eta - BP_hv + BP_hv - \widetilde{I}_h^*\pi_h$ имеем

$$\left\|\eta - \widetilde{I}_h^* \pi_h\right\|_D^2 = \left\|\eta - BP_h v\right\|_D^2 + \left\|BP_h v - \widetilde{I}_h^* \pi_h\right\|_D^2. \qquad (32)$$

Для оценки второго слагаемого запишем равенство

$$(BP_h v - \widetilde{I}_h^* \pi_h, \bar{\tau}_h)_D = (\eta - \theta_h \eta, \bar{\tau}_h - I_h \bar{\tau}_h)_D, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \qquad (33)$$

Ввиду произвольности выбора $\bar{\tau}_h \in Y_h$ полагаем $\bar{\tau}_h = BP_h v - \widetilde{I}_h^* \pi_h \in Y_h$. Применяя для правой части равенства (33) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем условие устойчивости (12), находим

$$\left\|BP_h v - \widetilde{I}_h^* \pi_h\right\|_D \le \sqrt{1 - d^2} \left\|\eta - \theta_h \eta\right\|_D. \qquad (34)$$

Подставляя эту оценку в равенство (32), с учетом свойств ортогональных проекций (18) и (20) получаем

$$\left\|\eta - \widetilde{I}_h^* \pi_h\right\|_D \le \sqrt{1 - d^2} \inf_{\chi_h \in X_h} \left\|\eta - \chi_h\right\|_D + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\|\eta - \bar{\tau}_h\right\|_D. \qquad (35)$$

Замечание 6. Пусть, как и ранее, $\eta = Bv \in Y$, где $v \in U$. Поскольку $\theta_h \eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I_h^*)$, с использованием ортогонального разложения элемента $\eta - I_h^{-1} \pi_h \in Y$ в виде $\eta - I_h^{-1} = \eta - BP_h v + BP_h v - I_h^{-1} \pi_h$ имеем

$$\left\|\eta - I_h^{-1} \pi_h\right\|_D^2 = \left\|\eta - BP_h v\right\|_D^2 + \left\|BP_h v - I_h^{-1} \pi_h\right\|_D^2. \qquad (36)$$

Оценим сверху второе слагаемое в правой части (36). С этой целью для любого $\chi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ запишем равенство

$$(I_h BP_h v - \pi_h, \chi_h)_D = (BP_h v - \eta, \chi_h - \bar{\tau}_h)_D, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad (37)$$

в котором полагаем $\bar{\tau}_h = \widetilde{I}_h^* \chi_h \in Y_h$ и $\chi_h = I_h BP_h v - \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Применяя для правой части (37) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем условие устойчивости (12) и оценку (31), находим

$$\left\|BP_h v - I_h^{-1} \pi_h\right\|_D \le \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d} \left\|\eta - BP_h v\right\|_D. \qquad (38)$$

Равенство (36) с учетом оценки (38) и свойств ортогональных проекций (18) приводит к неравенству

$$\left\|\eta - I_h^{-1}\pi_h\right\|_D \le \frac{1}{d} \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\eta - \bar\tau_h\right\|_D. \tag{39}$$

Замечание 7. Пусть $\theta_h\varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, $\psi_h \in \ker(I_h^*)$. Близость элементов $\varepsilon \in Y$ и $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ устанавливается на основании приведенных выше неравенств. Используя оценки (23), (34), (35), (38) и (39), получаем

$$\left\|\varepsilon - \varphi_h\right\|_D \le \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\theta_h(\varepsilon - \bar\tau_h)\right\|_D; \tag{40}$$

$$\left\|\varepsilon - \widetilde{I}_h^*\varphi_h\right\|_D \le \sqrt{1-d^2} \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar\tau_h\right\|_D; \tag{41}$$

$$\left\|\varepsilon - I_h^{-1}\varphi_h\right\|_D \le \frac{1}{d} \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar\tau_h\right\|_D, \tag{42}$$

причем

$$\left\|BP_h u - \widetilde{I}_h^*\varphi_h\right\|_D \le \sqrt{1-d^2} \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D; \tag{43}$$

$$\left\|BP_h u - I_h^{-1}\varphi_h\right\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar\tau_h\right\|_D; \tag{44}$$

$$\left\|\widetilde{I}_h^*\varphi_h - I_h^{-1}\varphi_h\right\|_D \le \sqrt{1-d^2}\left[\inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \frac{1}{d} \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar\tau_h\right\|_D\right]. \tag{45}$$

Для ортогональных проекций имеем

$$\left\|\varphi_h - \widetilde{I}_h^*\varphi_h\right\|_D \le \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar\tau_h\right\|_D; \tag{46}$$

$$\left\|\varphi_h - I_h^{-1}\varphi_h\right\|_D \le \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \frac{1}{d} \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar\tau_h\right\|_D. \tag{47}$$

Отметим, что из неравенств (40)–(47) только оценки погрешности $\varepsilon - \varphi_h \in X$ и разности проекций $BP_h u - \widetilde{I}_h^*\varphi_h \in Y_h$ не включают слагаемое $\left\|\varepsilon - BP_h u\right\|_D$.

Замечание 8. При сопоставлении уравнений (8) и (9) получим

$$\widetilde{I}_h^* I_h B u_h = BP_h u \quad \text{в} \quad Y_h. \tag{48}$$

Тогда элементы $\varepsilon_h \in X_h$ и $Bu_h \in Y_h$ однозначно определяются выражениями

$$\varepsilon_h = I_h(\widetilde{I}_h^* I_h)^{-1} BP_h u; \qquad Bu_h = (\widetilde{I}_h^* I_h)^{-1} BP_h u. \tag{49}$$

Отметим, что для обычной схемы в перемещениях имеем $\overline{\varepsilon}_h = Bu_h = BP_h u \in Y_h$, а проектирование $Bu_h \in Y_h$ на пространство X_h дает $\widetilde{\varepsilon}_h = I_h Bu_h = I_h BP_h u \in \mathrm{Im}(I_h)$. Очевидно, что между этими элементами существует взаимно однозначное соответствие. Ортогональная проекция $\varepsilon_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на пространство Y_h есть элемент $\overline{\varepsilon}_h \in Y_h$, а проектирование этого элемента снова на пространство $\mathrm{Im}(I_h)$ определяет элемент $\widetilde{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Иначе, это можно записать так: $\overline{\varepsilon}_h = \widetilde{I}_h^* \varepsilon_h \in Y_h$ и $\widetilde{\varepsilon}_h = I_h \overline{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Обратное имеет место, однако I_h^{-1} и $(\widetilde{I}_h^*)^{-1}$ не являются проектирующими операторами. Заметим также, что пространства Y_h и $\mathrm{Im}(I_h)$ можно интерпретировать как множества напряжений и деформаций для классических и смешанных схем МКЭ.

Теорема сходимости. Если выполняется условие устойчивости (12), то существуют такие не зависящие от h постоянные C_1 и C_2, что

$$\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D \le C_1 \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D + \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \|\theta_h(\varepsilon - \overline{\tau}_h)\|_D; \tag{50}$$

$$\|\varepsilon - Bu_h\|_D \le C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D + C_1 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \|\varepsilon - \overline{\tau}_h\|_D, \tag{51}$$

причем

$$C_1 = \frac{1}{d}; \qquad C_2 = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}. \tag{52}$$

◀ Пусть $\theta_h \varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\psi_h \in \ker(I_h^*)$. С учетом того, что $\varepsilon - \varepsilon_h = \varepsilon - \theta_h \varepsilon + \varphi_h - \varepsilon_h + \psi_h$, получаем

$$\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D^2 = \|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D^2 + \|\varphi_h - \varepsilon_h\|_D^2 + \|\psi_h\|_D^2. \tag{53}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (53) с помощью равенства

$$(\varphi_h - \varepsilon_h, \pi_h)_D = (\varepsilon - \theta_h \varepsilon, \pi_h - I_h^{-1} \pi_h)_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{54}$$

Ввиду произвольности элемента $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ полагаем $\pi_h = \varphi_h - \varepsilon_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Применяя для правой части (54) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем оценку (30), находим

$$\|\varphi_h - \varepsilon_h\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D. \tag{55}$$

Равенство (53) с учетом оценки (55) приводит к неравенству

$$\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D^2 \le \frac{1}{d^2}\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D^2 + \|\psi_h\|_D^2, \tag{56}$$

откуда на основании свойств ортогональных проекций (20) и (21) получаем оценку (50).

Для доказательства неравенства (51) используем ортогональное разложение элемента $\varepsilon - Bu_h \in Y$ в виде $\varepsilon - Bu_h = \varepsilon - BP_h u + BP_h u - Bu_h$. Тогда

$$\|\varepsilon - Bu_h\|_D^2 = \|\varepsilon - BP_h u\|_D^2 + \|BP_h u - Bu_h\|_D^2. \tag{57}$$

Оценим второе слагаемое в (57). С этой целью для любого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ запишем равенство

$$(BP_h u - Bu_h, \pi_h)_D = (BP_h u - \varepsilon, \pi_h - \bar{\tau}_h)_D + (\varepsilon - \varepsilon_h, \pi_h - \bar{\eta}_h)_D, \quad \forall \bar{\tau}_h, \bar{\eta}_h \in Y_h. \tag{58}$$

Полагая $\bar{\tau}_h = \tilde{I}_h^* \pi_h \in Y_h$ и $\bar{\eta}_h = I_h^{-1} \pi_h \in Y_h$, имеем

$$(BP_h u - Bu_h, \pi_h)_D = (BP_h u - \varepsilon, \pi_h - \tilde{I}_h^* \pi_h)_D + \\ + (\varepsilon - \theta_h \varepsilon, \pi_h - I_h^{-1} \pi_h)_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{59}$$

Ввиду произвольности элемента $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ принимаем $\pi_h = I_h BP_h u - - I_h Bu_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Используя для правой части (59) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем оценки (12), (30) и (31), находим

$$\|BP_h u - Bu_h\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\left[\|BP_h u - \varepsilon\|_D + \frac{1}{d}\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D\right]. \tag{60}$$

Равенство (57) с учетом оценки (60) приводит к неравенству

$$\|\varepsilon - Bu_h\|_D \le \frac{1}{d}\|\varepsilon - BP_h u\|_D + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D, \tag{61}$$

откуда на основании свойств ортогональных проекций (18) и (20) получаем оценку (51). ▶

Следствие 1. Оценка погрешности смешанной аппроксимации для деформаций $\varepsilon - \varepsilon_h$ имеет слагаемое $\|\psi_h\|_D$. В этом ее принципиальное отличие от аналогичной оценки при обычной аппроксимации. Погрешность $\varepsilon - Bu_h$ неулучшаема в том смысле, что в ее оценке присутствует слагаемое

$\|\varepsilon - BP_h u\|_D$. Однако оценка погрешности для деформаций $\varepsilon - \varepsilon_h$ таким членом не располагает, и в этом состоит ее особенность.

Следствие 2. Обозначим через $\widetilde{\theta}_h$ сужение θ_h на пространство элементов $\varepsilon - \overline{\tau}_h$. Множество элементов $\varepsilon - \overline{\tau}_h$ образуют подпространство в Y, которое включает в себя подмножество элементов $\varepsilon - BP_h u$. Поскольку элемент $\varepsilon - BP_h u \in Y$ описывает погрешность аппроксимации для деформаций при обычной аппроксимации в перемещениях, элемент $\widetilde{\theta}_h(\varepsilon - BP_h u)$ – суть ортогональная проекция погрешности $\varepsilon - BP_h u$ на пространство X_h. Исходя из этого имеем оценку

$$\|\psi_h\|_D^2 \le \|\widetilde{\theta}_h(\varepsilon - BP_h u)\|_D^2 = \|\varepsilon - BP_h u\|_D^2 - \inf_{\eta_h \in X_h} \|(\varepsilon - BP_h u) - \eta_h\|_D^2, \quad (62)$$

откуда следует $\|\psi_h\|_D \le \|\varepsilon - BP_h u\|_D$, причем равенство справедливо, если $\varepsilon - BP_h u$ – элемент пространства X_h. Предположим, что пространства Y_h и X_h “не пересекаются”. Тогда вычитаемое в правой части неравенства (62) не может быть равным нулю и, следовательно, в этом случае имеет место строгое неравенство, т.е. $\|\widetilde{\theta}_h\|_D < 1$.

Пусть $\overline{\tau}_h = Bu_I \in Y_h$ и $u_I \in U_h$ – интерполянт $u \in U$. Кроме того, $\varepsilon_I \in X_h$ – интерполянт $\varepsilon \in Y$. Для оценки $\|\psi_h\|_D$ могут быть использованы неравенства

$$\|\psi_h\|_D \le \|\widetilde{\theta}_h B(u - u_I)\|_D =$$

$$= \sup_{\eta_h \in X_h} \frac{|(B(u - u_I), \eta_h)_D|}{\|\eta_h\|_D} \le \|\varepsilon - \varepsilon_I\|_D + \sup_{\eta_h \in X_h} \frac{|(\varepsilon_I - Bu_I, \eta_h)_D|}{\|\eta_h\|_D}. \quad (63)$$

Следствие 3. В случае, когда пространства X_h и Y_h принимаются одинаковыми, приходим к обычной формулировке МКЭ в перемещениях. Тогда I_h – тождественный оператор в Y_h и, следовательно, условие устойчивости (12) выполняется тождественно с постоянной $d = 1$. Поскольку, $\overline{\varepsilon}_h = Bu_h = BP_h u \in Y_h$ и $\|\psi_h\|_D \equiv 0$, оценки (50) и (51) преобразуются к обычному виду

$$\|\varepsilon - \overline{\varepsilon}_h\|_D = \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \|\varepsilon - \overline{\tau}_h\|_D. \quad (64)$$

Следствие 4. Оценим разницу в определении деформаций при обычной и смешанной аппроксимации. Для этого необходимо оценить разность $\varepsilon_h - BP_h u$. Используя равенство (60) при $\pi_h = \varepsilon_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, получаем

$$\|\varepsilon_h - BP_h u\|_D^2 \le \|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D \|\varepsilon_h - Bu_h\|_D + \|\varepsilon - BP_h u\|_D \|\varepsilon_h - BP_h u\|_D. \quad (65)$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$\left\| \varepsilon_h - Bu_h \right\|_D \le \frac{1}{d} \left\| \varepsilon_h - BP_h u \right\|_D. \tag{66}$$

С учетом ортогонального разложения $\varepsilon_h - Bu_h = \varepsilon_h - BP_h u + BP_h u - Bu_h$ имеем

$$\left\| \varepsilon_h - Bu_h \right\|_D^2 = \left\| \varepsilon_h - BP_h u \right\|_D^2 + \left\| BP_h u - Bu_h \right\|_D^2. \tag{67}$$

Для оценки второго слагаемого (67) воспользуемся следующим очевидным равенством:

$$(I_h Bu_h - I_h BP_h u, \pi_h)_D = (\varepsilon_h - BP_h u, \pi_h - \bar{\tau}_h)_D, \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{68}$$

Полагая $\bar{\tau}_h = \tilde{I}_h^* \pi_h \in Y_h$ и $\pi_h = I_h Bu_h - I_h BP_h u \in \mathrm{Im}(I_h)$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца и оценками (12), (30), (31) находим

$$\left\| Bu_h - BP_h u \right\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \left\| \varepsilon_h - BP_h u \right\|_D. \tag{69}$$

Равенство (67) с учетом оценки (69) приводит к неравенству (66). На основании неравенств (65) и (66) получаем оценку разности $\varepsilon_h - \bar{\varepsilon}_h$:

$$\left\| \varepsilon_h - \bar{\varepsilon}_h \right\|_D \le \frac{1}{d} \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_D + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \varepsilon - \bar{\tau}_h \right\|_D. \tag{70}$$

Предположим, что в этом неравенстве первое слагаемое более высокого порядка малости, чем второе. Тогда разница решений для деформаций $\varepsilon_h - \bar{\varepsilon}_h$ сопоставима с погрешностью вычисления самих деформаций при обычной аппроксимации. Следовательно, основной вклад в разность $\varepsilon_h - \bar{\varepsilon}_h$ вносит погрешность $\varepsilon - \bar{\varepsilon}_h$.

Следствие 5. Оценим разность $\varepsilon_h - Bu_h$, которая используется ниже при анализе сходимости аппроксимации для перемещений. На основании неравенств (66) и (70) получаем

$$\left\| \varepsilon_h - Bu_h \right\|_D \le \frac{1}{d^2} \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_D + \frac{1}{d} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \varepsilon - \bar{\tau}_h \right\|_D. \tag{71}$$

Следствие 6. При построении обычных схем в перемещениях для описания деформаций применяется элемент $\tilde{\bar{\varepsilon}}_h = I_h \bar{\varepsilon}_h \in X_h$, который наилучшим образом приближает решение $\bar{\varepsilon}_h \in Y_h$ в пространстве X_h. В литературе по МКЭ такие приближения называются сопряженной аппроксимацией или согласованными результатами для деформаций. Очевидно, что элемент $\widetilde{\varepsilon}_h \in X_h$ – суть ортогональная проекция $\overline{\varepsilon}_h \in Y_h$ на пространство X_h и $\widetilde{\varepsilon}_h = I_h B P_h u \in \mathrm{Im}(I_h)$.

Оценим погрешность $\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}_h$. Пусть $\theta_h \varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\psi_h \in \ker(I_h^*)$. Используя ортогональное разложение $\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}_h = = \varepsilon - \theta_h \varepsilon + \varphi_h - \widetilde{\varepsilon}_h + \psi_h$, имеем

$$\|\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}_h\|_D^2 = \|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\|_D^2 + \|\varphi_h - \widetilde{\varepsilon}_h\|_D^2 + \|\psi_h\|_D^2. \tag{72}$$

Для оценки второго слагаемого запишем равенство

$$\begin{gathered}(\varphi_h - I_h B P_h u, \pi_h)_D = (\varepsilon - B P_h u, \pi_h - \overline{\tau}_h)_D, \\ \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h.\end{gathered} \tag{73}$$

Полагая $\overline{\tau}_h = \widetilde{I}_h^* \pi_h \in Y_h$ и $\pi_h = \varphi_h - I_h B P_h u \in \mathrm{Im}(I_h)$, с учетом оценки (31) находим

$$\|\varphi_h - I_h B P_h u\|_D \le \sqrt{1 - d^2}\, \|\varepsilon - B P_h u\|_D. \tag{74}$$

На основании равенства (72) и неравенства (74) получаем

$$\|\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}_h\|_D \le \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D +$$

$$+ \sqrt{1 - d^2} \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \|\varepsilon - \overline{\tau}_h\|_D + \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \|\widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h)\|_D. \tag{75}$$

Сопоставление оценок (50) и (75) свидетельствует о преимуществе смешанной аппроксимации, поскольку в оценку погрешности смешанного метода (50) не входит второе слагаемое оценки (75).

Близость решений $\varepsilon_h - \widetilde{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ оценивается с помощью неравенства треугольника

$$\|\varepsilon_h - \widetilde{\varepsilon}_h\|_D \le \|\varepsilon_h - \varphi_h\|_D + \|\varphi_h - \widetilde{\varepsilon}_h\|_D. \tag{76}$$

При использовании оценок (55) и (74) находим

$$\|\varepsilon_h - \widetilde{\varepsilon}_h\|_D \le \sqrt{1 - d^2} \left[\frac{1}{d} \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D + \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \|\varepsilon - \overline{\tau}_h\|_D \right]. \tag{77}$$

Следствие 7. Пусть, как и ранее, $\theta_h \varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\psi_h \in \ker(I_h^*)$. Согласно определению элемента $\psi_h \in \ker(I_h^*)$, имеем

$$\|\varphi_h - I_h \overline{\tau}_h\|_D^2 + \|\psi_h\|_D^2 = \|\widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h)\|_D^2, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{78}$$

Тогда оценку погрешности для деформаций (50) можно представить в более общем виде, где не присутствует явно слагаемое $\|\psi_h\|_D$. В самом деле, оценка (56) и равенство (78) приводят к следующему неравенству:

$$\|\varphi_h - I_h\bar{\tau}_h\|_D^2 + \|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D^2 \le \frac{1}{d^2} \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D^2 + \|\widetilde{\theta}_h(\varepsilon - \bar{\tau}_h)\|_D^2, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{79}$$

Следствие 8. Приведем еще одну оценку для $\|\psi_h\|_D$. Применяя равенство (78) для элемента $\bar{\tau}_h = BP_h u \in Y_h$, получаем

$$\|\varphi_h - I_h BP_h u\|_D^2 + \|\psi_h\|_D^2 = \|\varepsilon - BP_h u\|_D^2 - \inf_{\eta_h \in X_h} \|(\varepsilon - BP_h u) - \eta_h\|_D^2. \tag{80}$$

Оценим снизу вычитаемое в правой части (80). С этой целью для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ запишем равенство

$$(\varphi_h - I_h BP_h u, \pi_h)_D = ((\varepsilon - BP_h u) - \eta_h, \pi_h - I_h^{-1}\pi_h)_D, \quad \forall \eta_h \in X_h. \tag{81}$$

Полагая $\pi_h = \varphi_h - I_h BP_h u \in \mathrm{Im}(I_h)$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца и оценкой (30) находим

$$\|\varphi_h - I_h BP_h u\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \inf_{\eta_h \in X_h} \|(\varepsilon - BP_h u) - \eta_h\|_D. \tag{82}$$

Подставляя эту оценку в равенство (80), приходим к неравенству

$$\frac{1}{1-d^2}\|\varphi_h - I_h BP_h u\|_D^2 + \|\psi_h\|_D^2 \le \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \|\varepsilon - \bar{\tau}_h\|_D^2. \tag{83}$$

Следствие 9. Предположим, что последовательность аппроксимирующих подпространств $U_h \times X_h$ предельно плотная в $U \times X$, т.е. для любых $(v,\eta) \in U \times X$ при $h \to 0$ имеем

$$\delta(v, U_h) = \inf_{v_h \in U_h} \|v - v_h\|_U \to 0, \qquad \delta(\eta, X_h) = \inf_{\eta_h \in X_h} \|\eta - \eta_h\|_X \to 0. \tag{84}$$

Тогда на основании оценок (3), (50) и (51) при $h \to 0$ получаем

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_X \le \sqrt{\frac{M}{m}}[C_1\delta(\varepsilon, X_h) + \delta(u, U_h)] \to 0; \\ &\|u - u_h\|_U \le \sqrt{\frac{M}{m}}[C_2\delta(\varepsilon, X_h) + C_1\delta(u, U_h)] \to 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Итак, достаточными условиями сходимости смешанной аппроксимации являются условие устойчивости (12) и предельная плотность аппроксимирующих подпространств $U_h \times X_h$.

Следствие 10. Допустим, что при построении аппроксимирующих подпространств $U_h \times X_h$ используются кусочно-полиномиальные функции, для которых справедливо условие согласованности погрешностей аппроксимации

$$\delta(Bv, X_h) \leq ch\delta(v, U_h), \qquad \forall\, v \in U, \tag{86}$$

где c – положительная константа, не зависящая от h. Другими словами, при конструировании пространства X_h используются кусочно-полиномиальные функции, степень которых не ниже степени полиномов из пространства U_h. Тогда, согласно неравенству (50), основной вклад в погрешность $\varepsilon - \varepsilon_h$ вносит второе слагаемое, т.е. член $\|\psi_h\|_D$. Следовательно, можем записать асимптотическую оценку погрешности для деформаций при $h < 1$. Таким образом, получаем простое, но важное неравенство

$$\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D \leq \|\psi_h\|_D. \tag{87}$$

Исходя из последнего неравенства, а также (62) заключаем, что погрешность вычисления деформаций при смешанной аппроксимации меньше, чем при обычной, поскольку проекция этой погрешности на пространство X_h не может быть больше самой погрешности.

Сходимость перемещений. Пусть L – такое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_L$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_L$, что $U \subset L$, вложение непрерывно и плотно. Пространство L будем отождествлять с сопряженным к нему и, следовательно, его можно отождествить с подпространствами, плотными в сопряженном для U пространстве U^*, т.е. $U \subset L = L^* \subset U^*$. Отношение двойственности на $U^* \times U$ отождествим с единственным расширением по непрерывности скалярного произведения в L, определенного на $L \times U \subset L \times L$. Покажем, что погрешность для перемещений $u - u_h$ в метрике пространства L имеет более высокий порядок сходимости, чем в норме пространства U.

С этой целью любому $\rho_\lambda \in L$ поставим в соответствие элемент $u_\lambda \in U$ как решение вспомогательной задачи

$$(Bu_\lambda, Bv)_D = (\rho_\lambda, v)_L, \qquad \forall\, v \in U. \tag{88}$$

Учитывая, что $v = u - u_h$ – элемент пространства U, для любых $\eta_h \in X_h$ и $\bar{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$(\rho_\lambda, u - u_h)_L = (Bu_\lambda - \bar{\tau}_h, \varepsilon - \varepsilon_h)_D + (\varepsilon_\lambda - \eta_h, \varepsilon_h - Bu_h)_D. \tag{89}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|(\rho_\lambda, u - u_h)_L\right| \le \sqrt{M}\,(\delta(u_\lambda, U_h)\left\|\varepsilon - \varepsilon_h\right\|_D + \delta(\varepsilon_\lambda, X_h)\left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_D). \quad (90)$$

Пусть $L = [L_2(\Omega)]^n$, и решение u_λ задачи (88) принадлежит пространству, содержащемуся в U, с более сильной топологией, т.е. пространству $[H^2(\Omega)]^n \cap U$. На основании результатов интерполяции [8, 9] и предположения о регулярности [10] можно заключить, что существуют такие не зависящие от h положительные константы c_1 и c_2, что

$$\delta(u_\lambda, U_h) \le c_1 h \left\|\rho_\lambda\right\|_L; \qquad \delta(\varepsilon_\lambda, X_h) \le c_2 h \left\|\rho_\lambda\right\|_L. \quad (91)$$

Полагая $\rho_\lambda = u - u_h \in L$, находим

$$\left\|u - u_h\right\|_L \le \sqrt{M}\, h(c_1\left\|\varepsilon - \varepsilon_h\right\|_D + c_2\left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_D), \quad (92)$$

откуда согласно оценкам (50) и (71) получаем такую не зависящую от h постоянную $C = \sqrt{M}\,(c_1 + c_2/d)$, что

$$\left\|u - u_h\right\|_L \le Ch\left[\frac{1}{d}\inf_{\eta_h \in X_h}\left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h}\left\|\varepsilon - \bar{\tau}_h\right\|_D\right]. \quad (93)$$

Пусть $L = [L_2(\Gamma_\sigma)]^n$ и $\rho_\lambda = u - u_h \in H^{1/2}$, где $H^{1/2} = [H^{1/2}(\Gamma_\sigma)]^n$. Тогда можно показать [9], что существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\left\|\rho_\lambda\right\|_{H^{1/2}} \le c\left\|\varepsilon - Bu_h\right\|_Y. \quad (94)$$

С учетом этой оценки приходим к неравенству

$$\left\|u - u_h\right\|_L^2 \le \sqrt{M}\, ch(c_3\left\|\varepsilon - \varepsilon_h\right\|_D + c_4\left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_D)\left\|\varepsilon - Bu_h\right\|_Y, \quad (95)$$

где c_3, c_4 – вещественные положительные константы. Применяя оценки (50), (51) и (71), получаем такую не зависящую от h постоянную C, что

$$\left\|u - u_h\right\|_L \le C\sqrt{h}\left[\frac{1}{d}\inf_{\eta_h \in X_h}\left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h}\left\|\varepsilon - \bar{\tau}_h\right\|_D\right]. \quad (96)$$

Предположим, что выполняется условие согласованности погрешностей смешанной аппроксимации (87). На основании оценок (92), (93) и (95), (96) приходим к выводу, что погрешность аппроксимации для перемещений

$u - u_h$ имеет более высокий порядок сходимости, чем погрешность для деформаций. При этом улучшение сходимости аппроксимации для деформаций не приводит к ухудшению сходимости для перемещений.

Сходимость в подпространстве. Пусть X_{sh} – подпространство в X_h и θ_{sh} – проектирующий оператор из X на X_{sh}, ассоциируемый со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_D$. Тогда включение $X_{sh} \subset X_h$ эквивалентно неравенству $\|\theta_{sh}\eta\|_D \le \|\theta_h\eta\|_D$ для любого $\eta \in X$. Сужение θ_{sh} на Y_h есть оператор $I_{sh}: Y_h \to X_{sh}$, причем $\|I_{sh}\bar{\tau}_h\|_D \le \|I_h\bar{\tau}_h\|_D$ для всякого $\bar{\tau}_h \in Y_h$. Проектируя первое уравнение (9) на подпространство X_{sh}, получаем элемент $\varepsilon_{sh} = I_{sh}Bu_h \in \mathrm{Im}(I_{sh})$, для которого $\|\varepsilon_{sh}\|_D \le \|\varepsilon_h\|_D$.

Оценим погрешность $\varepsilon - \varepsilon_{sh}$. С этой целью введем в рассмотрение элементы $\varphi_{sh} = I_{sh}I_h^{-1}\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_{sh})$ и $\psi_{sh} = \theta_{sh}(\varepsilon - I_h^{-1}\varphi_h) \in X_{sh}$. Учитывая, что $\varepsilon - \varepsilon_{sh} = \varepsilon - \theta_{sh}\varepsilon + \varphi_{sh} - \varepsilon_{sh} + \psi_{sh}$, в соответствии с неравенством треугольника имеем

$$\|\varepsilon - \varepsilon_{sh}\|_D \le \|\varepsilon - \theta_{sh}\varepsilon\|_D + \|\varphi_{sh} - \varepsilon_{sh}\|_D + \|\psi_{sh}\|_D. \tag{97}$$

Заметим, что

$$\|\varphi_{sh} - \varepsilon_{sh}\|_D = \|I_{sh}(I_h^{-1}\varphi_h - Bu_h)\|_D \le \|\varphi_h - \varepsilon_h\|_D, \tag{98}$$

с использованием оценок (55), (97) и (98) получаем

$$\|\varepsilon - \varepsilon_{sh}\|_D \le \|\varepsilon - \theta_{sh}\varepsilon\|_D + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\|\varepsilon - \theta_h\varepsilon\|_D + \|\psi_{sh}\|_D. \tag{99}$$

Допустим, что первое слагаемое $\|\varepsilon - \theta_{sh}\varepsilon\|_D$ имеет порядок сходимости не ниже $\|\varepsilon - \theta_h\varepsilon\|_D$. Тогда основной вклад в погрешность $\varepsilon - \varepsilon_h$ вносит слагаемое $\|\psi_{sh}\|_D$ и, следовательно, можем записать асимптотическую оценку погрешности для деформаций $\|\varepsilon - \varepsilon_{sh}\|_D \le \|\psi_{sh}\|_D$ при $h < 1$. Однако $\|\psi_{sh}\|_D \le \|\psi_h\|_D$, поскольку X_{sh} – более "узкое" пространство, чем X_h, и в этом смысле погрешность $\varepsilon - \varepsilon_{sh}$ меньше, чем $\varepsilon - \varepsilon_h$. Таким образом, улучшение аппроксимации для деформаций может быть достигнуто путем оптимального задания подпространства X_{sh} с целью минимизации $\|\psi_{sh}\|_D$ на этом пространстве. Так, например, при выборе подпространства X_{sh} целесообразно учитывать суперсходимость производных в специальных точках сетки, что приводит к уменьшению $\|\psi_{sh}\|_D$ и повышению точности вычисления деформаций в X_{sh}.

Численное интегрирование. Далее обозначение $[\cdot;\cdot]_D$ следует понимать так, что для вычисления скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_D$ применяется численное интегрирование. Ограничимся рассмотрением специальных квадратурных (кубатурных) формул, для которых справедливы равенства:

$$
\begin{aligned}
&[\eta_h,\bar{\tau}_h]_D = (\eta_h,\bar{\tau}_h)_D, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h, \qquad \forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h;\\
&[\bar{\eta}_h,\bar{\tau}_h]_D = (\bar{\eta}_h,\bar{\tau}_h)_D, \qquad \forall\, \bar{\eta}_h,\bar{\tau}_h \in Y_h.
\end{aligned} \tag{100}
$$

Полагаем, что скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_D$ в конечномерном пространстве X_h индуцирует норму $[\cdot]_D = [\cdot;\cdot]_D^{1/2}$, эквивалентную энергетической норме $\|\cdot\|_D$, причем

$$
\|\eta_h\|_D \le [\eta_h]_D \le R\|\eta_h\|_D, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h, \tag{101}
$$

где R – вещественная положительная константа, не зависящая от параметра h. Тогда X_h – гильбертово пространство, в котором скалярное произведение и норма задаются билинейной формой $[\cdot;\cdot]_D$.

По аналогии с уравнениями (8) определим дискретную задачу следующим образом. Найти пару $(\underline{u}_h,\underline{\varepsilon}_h)\in U_h\times X_h$ такую, что

$$
\begin{aligned}
&[\underline{\varepsilon}_h,\eta_h]_D = (B\underline{u}_h,\eta_h)_D, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h;\\
&(\underline{\varepsilon}_h,Bv_h)_D = \rho(v_h) + (\xi,Bv_h)_D, \qquad \forall\, v_h \in U_h.
\end{aligned} \tag{102}
$$

Для формулировки условий устойчивости и сходимости решения дискретной задачи (102) введем в рассмотрение проектирующий оператор $\underline{I}_h$, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его проекцию в X_h. Оператор $\underline{I}_h$, ассоциируемый со скалярным произведением $[\cdot;\cdot]_D$, определим из равенства

$$
[\bar{\tau}_h - \underline{I}_h\bar{\tau}_h,\eta_h]_D = 0, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h. \tag{103}
$$

Тогда элемент $\underline{\varepsilon}_h = \underline{I}_h B\underline{u}_h$ – суть ортогональная проекция $B\underline{u}_h \in Y_h$ на пространство X_h относительно скалярного произведения $[\cdot;\cdot]_D$, причем

$$
(\underline{\varepsilon}_h,\eta_h)_D = (\underline{I}_h B\underline{u}_h,\eta_h)_D, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h. \tag{104}
$$

С помощью первой формулы (100) устанавливаем взаимосвязь операторов $\underline{I}_h$ и I_h, которая в дальнейшем играет важную роль в анализе погрешности аппроксимации:

$$
(\eta_h,I_h\bar{\tau}_h)_D = (\eta_h,\bar{\tau}_h)_D = [\eta_h,\underline{I}_h\bar{\tau}_h]_D, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h, \qquad \forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{105}
$$

Условие устойчивости. Если выполняется условие устойчивости (12) и скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_D$ в X_h удовлетворяет неравенствам (101), то дискретная задача, описываемая уравнениями (102), однозначно разрешима при любом h.

Полагая в равенствах (105) $\eta_h = I_h \bar{\tau}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, согласно неравенству Коши–Буняковского–Шварца и правому неравенству (101) имеем

$$\|I_h \bar{\tau}_h\|_D^2 = [I_h \bar{\tau}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D \le [I_h \bar{\tau}_h]_D [\underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D \le R \|I_h \bar{\tau}_h\|_D [\underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \tag{106}$$

откуда с учетом условия (12) получаем

$$\frac{d}{R} \|\bar{\tau}_h\|_D \le [\underline{I}_h \bar{\tau}]_D, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{107}$$

Таким образом, условие устойчивости (12) и неравенства (101) обеспечивают корректную постановку дискретной задачи (102) при любом h.

Оператор $\underline{I}_h^*$, сопряженный к оператору $\underline{I}_h$, отображает X_h на Y_h и определяется соотношением

$$(\underline{I}_h^* \eta_h, \bar{\tau}_h)_D = [\eta_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{108}$$

Тогда для любого $\eta_h \in X_h$ справедливо равенство

$$(\eta_h - \underline{I}_h^* \eta_h, \bar{\tau}_h)_D = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{109}$$

Следовательно, $\underline{I}_h^*: X_h \to Y_h$ – проектирующий оператор и $\underline{I}_h^* \eta_h$ – ортогональная проекция элемента $\eta_h \in X_h$ на пространство Y_h. Более того, согласно равенству (108) для всякого $\underline{\mu}_h \in [\mathrm{Im}(\underline{I}_h)]^\perp$ имеем

$$(\underline{I}_h^* \underline{\mu}_h, \bar{\tau}_h)_D = [\underline{\mu}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{110}$$

Таким образом, операторы $\underline{I}_h$ и $\underline{I}_h^*$ порождают разложение пространства X_h, в котором введено скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_D$, в прямую сумму подпространств $X_h = \mathrm{Im}(\underline{I}_h) \oplus \ker(\underline{I}_h^*)$. Иначе говоря, любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть представлен в виде $\eta_h = \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$, причем

$$[\underline{\mu}_h]_D = [\eta_h - \underline{\pi}_h]_D = \inf_{\tau_h \in Y_h} [\eta_h - \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{111}$$

Поскольку оператор $\underline{I}_h$ удовлетворяет условию устойчивости (107), существует обратный линейный ограниченный оператор $\underline{I}_h^{-1}$, действующий из $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на Y_h, для которого справедлива оценка:

$$\left\|\underline{I}_h^{-1}\underline{\pi}_h\right\|_D \le \frac{R}{d}[\underline{\pi}_h]_D, \qquad \forall\,\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{112}$$

Сужение $\underline{I}_h^*$ на $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ обозначим через $\widetilde{\underline{I}}_h^*$. Оператор $\widetilde{\underline{I}}_h^*$ отображает $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на Y_h и устанавливает между этими пространствами взаимно однозначное соответствие. Определяя в равенстве (108) элемент $\bar{\tau}_h \in Y_h$ с помощью соотношения $\bar{\tau}_h = \underline{I}_h^{-1}\underline{\pi}_h \in Y_h$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца и оценкой (112) для любого $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ получаем

$$[\underline{\pi}_h]_D^2 = (\widetilde{\underline{I}}_h^*\underline{\pi}_h, \underline{I}_h^{-1}\underline{\pi}_h)_D \le \left\|\widetilde{\underline{I}}_h^*\underline{\pi}_h\right\|_D \left\|\underline{I}_h^{-1}\underline{\pi}_h\right\|_D \le \frac{R}{d}\left\|\widetilde{\underline{I}}_h^*\underline{\pi}_h\right\|_D [\underline{\pi}_h]_D, \tag{113}$$

откуда находим

$$\frac{d}{R}[\underline{\pi}_h]_D \le \left\|\widetilde{\underline{I}}_h^*\underline{\pi}_h\right\|_D, \qquad \forall\,\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{114}$$

Любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть представлен как

$$\begin{aligned} \eta_h &= \pi_h + \mu_h, \qquad \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \qquad \mu_h \in \ker(I_h^*); \\ \eta_h &= \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h, \qquad \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h), \qquad \underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}_h^*). \end{aligned} \tag{115}$$

Тогда можно установить взаимосвязь элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$. Действительно, согласно соотношениям (105) для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ определяется из равенства

$$[\underline{\pi}_h, \underline{I}_h\bar{\tau}_h]_D = (\pi_h, I_h\bar{\tau}_h)_D, \qquad \forall\,\bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{116}$$

С использованием ортопроекторов $\widetilde{I}_h^*$ и $\widetilde{\underline{I}}_h^*$ приходим к уравнению

$$\widetilde{\underline{I}}_h^*\underline{\pi}_h = \widetilde{I}_h^*\pi_h \qquad \text{в} \quad Y_h. \tag{117}$$

Следовательно, элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ допускает представление в виде

$$\underline{\pi}_h = \underline{I}_h(\widetilde{\underline{I}}_h^*\underline{I}_h)^{-1}\widetilde{I}_h^*\pi_h, \qquad \forall\,\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{118}$$

Заметим, что такая форма записи элемента $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ является вполне корректной. Действительно, оператор $\widetilde{\underline{I}}_h^*$ удовлетворяет неравенству (114) и, значит, существует обратный линейный ограниченный оператор $(\widetilde{I}_h^*)^{-1}$ из Y_h в $\mathrm{Im}(I_h)$. Кроме того, $\widetilde{\underline{I}}_h^* I_h : Y_h \to Y_h$ – самосопряженный положительно определенный и ограниченный оператор в Y_h, для которого существует обратный линейный ограниченный оператор $(\widetilde{\underline{I}}_h^* \underline{I}_h)^{-1}$. Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами пространств $\mathrm{Im}(I_h)$ и $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$.

Согласно определению элемента $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, для любого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ справедливо равенство

$$[\underline{\pi}_h - \pi_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{119}$$

Исходя из этого элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ – суть ортогональная проекция $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ относительно скалярного произведения $[\cdot;\cdot]_D$. Учитывая, что $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – элемент пространства X_h, можно получить ортогональное разложение вида $\pi_h = \underline{\pi}_h + \underline{\lambda}_h$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\underline{\lambda}_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$, причем

$$[\pi_h - \underline{\pi}_h]_D = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} [\pi_h - \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{120}$$

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. В самом деле, для всякого $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ имеем

$$(\pi_h - \underline{\pi}_h, I_h \bar{\tau}_h)_D = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{121}$$

Тогда элемент $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – суть ортогональная проекция из $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(I_h)$ относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_D$ и, следовательно, элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ допускает разложение в виде $\underline{\pi}_h = \pi_h + \lambda_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\lambda_h \in \ker(I_h^*)$, причем

$$\left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\|_D = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \underline{\pi}_h - I_h \bar{\tau}_h \right\|_D, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{122}$$

Элементы $\underline{\lambda}_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$ и $\lambda_h \in \ker(I_h^*)$ взаимосвязаны между собой простым соотношением $\underline{\lambda}_h = -\lambda_h$ и имеют две эквивалентные формы представления вида $\underline{\lambda}_h = \pi_h - \underline{\pi}_h = \underline{\mu}_h - \mu_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$ и $\lambda_h = \underline{\pi}_h - \pi_h = \mu_h - \underline{\mu}_h \in \ker(I_h^*)$.

Итак, по определению, $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ – суть ортогональная проекция $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, и их проекции на пространство Y_h совпадают. Аналогично имеем $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – ортогональная проекция $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на $\mathrm{Im}(I_h)$, и их проекции в Y_h тождественно равны. Иначе, это можно записать как

$$\left\| \underline{\pi}_h - \bar{\tau}_h \right\|_D^2 = \left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\|_D^2 + \left\| \pi_h - \bar{\tau}_h \right\|_D^2, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{123}$$

С использованием неравенств (101) получаем соотношения эквивалентности норм $[\cdot;\cdot]_D$ и $\|\cdot\|_D$ для элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$:

$$\|\pi_h\|_D \le \|\underline{\pi}_h\|_D \le [\underline{\pi}_h]_D \le [\pi_h]_D \le R\|\pi_h\|_D. \tag{124}$$

С учетом этих оценок приходим к неравенствам

$$\|\pi_h - \underline{\pi}_h\|_D \le \sqrt{R^2-1}\,\|\pi_h\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h); \tag{125}$$

$$[\underline{\pi}_h - \widetilde{\underline{I}}_h^* \underline{\pi}_h]_D \le \sqrt{R^2-d^2}\,\|\pi_h\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{126}$$

Покажем теперь взаимосвязь элементов $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$ и $\mu_h \in \ker(I_h^*)$. Из равенств (115) вытекает, что $\underline{\mu}_h = \mu_h + \pi_h - \underline{\pi}_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, причем

$$[\underline{\mu}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D = [\mu_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_D = (\underline{\mu}_h, I_h \bar{\tau}_h)_D = (\mu_h, I_h \bar{\tau}_h)_D = 0, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{127}$$

Тогда можем записать

$$[\underline{\mu}_h]_D^2 = (\mu_h, \underline{\mu}_h)_D + [\eta_h, \underline{\mu}_h]_D - (\eta_h, \underline{\mu}_h)_D, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \tag{128}$$

откуда следует

$$\|\underline{\mu}_h\|_D \le [\underline{\mu}_h]_D \le \|\mu_h\|_D + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|(\eta_h, \chi_h)_D - [\eta_h, \chi_h]_D|}{\|\chi_h\|_D}. \tag{129}$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части этого неравенства обусловлено ошибкой согласования билинейных форм $(\cdot;\cdot)_D$ и $[\cdot;\cdot]_D$, что связано с погрешностью численного интегрирования при вычислении скалярных произведений $(\cdot;\cdot)_D$ на элементах из пространства X_h.

Неравенство (129) позволяет оценить разность $\underline{\pi}_h - \pi_h \in \ker(I_h^*)$. Согласно определению элемента $\lambda_h \in \ker(I_h^*)$, имеем $\underline{\pi}_h - \pi_h = \mu_h - \underline{\mu}_h \in \ker(I_h^*)$ и, следовательно,

$$\|\underline{\pi}_h - \pi_h\|_D \le \|\mu_h\|_D + \|\underline{\mu}_h\|_D. \tag{130}$$

Возможно, что эта оценка неоптимальна, однако она приводит к нужному результату в анализе сходимости. На основании неравенств (129) и (130) находим

$$\left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\|_D \le 2\left\| \mu_h \right\|_D + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| (\eta_h, \chi_h)_D - [\eta_h, \chi_h]_D \right|}{\left\| \chi_h \right\|_D}. \tag{131}$$

Замечание 9. В результате сопоставления уравнений (8) и (102) приходим к уравнению в Y_h:

$$\underline{\widetilde{I}}_h^* \underline{I}_h B \underline{u}_h = B P_h u. \tag{132}$$

Тогда элементы $\underline{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $B\underline{u}_h \in Y_h$ однозначно определяются следующими выражениями:

$$\begin{gathered} \underline{\varepsilon}_h = \underline{I}_h (\underline{\widetilde{I}}_h^* \underline{I}_h)^{-1} \widetilde{I}_h^* \varepsilon_h = \underline{I}_h (\underline{\widetilde{I}}_h^* \underline{I}_h)^{-1} \widetilde{I}_h^* I_h B u_h = \underline{I}_h (\underline{\widetilde{I}}_h^* \underline{I}_h)^{-1} B P_h u; \\ B\underline{u}_h = (\underline{\widetilde{I}}_h^* \underline{I}_h)^{-1} \widetilde{I}_h^* \varepsilon_h = (\underline{\widetilde{I}}_h^* \underline{I}_h)^{-1} \widetilde{I}_h^* I_h B u_h = (\underline{\widetilde{I}}_h^* I_h)^{-1} B P_h u. \end{gathered} \tag{133}$$

Теорема. Если выполняется условие устойчивости (104), то существуют такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5, что

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon - \underline{\varepsilon}_h \right\|_D \le C_1 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_D + \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h) \right\|_D + \\ + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_D - [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_D \right|}{\left\| \chi_h \right\|_D}; \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon - B\underline{u}_h \right\|_D \le C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_D + C_3 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \left\| \varepsilon - \overline{\tau}_h \right\|_D + \\ + C_4 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h) \right\|_D + C_5 \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_D - [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_D \right|}{\left\| \chi_h \right\|_D}, \end{aligned} \tag{135}$$

причем

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{\sqrt{R^2(1-d^2)+d^2}}{d}; \qquad C_2 = \frac{R^2\sqrt{1-d^2}}{d^2}; \\ C_3 = \frac{1}{d}; \qquad C_4 = \frac{\sqrt{R^2-1}}{d}; \qquad C_5 = \frac{R}{d}. \end{gathered} \tag{136}$$

◀ Пусть $\theta_h \varepsilon = \underline{\varphi}_h + \underline{\psi}_h \in X_h$, где $\underline{\varphi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\underline{\psi}_h \in \ker(\underline{I}_h^*)$. Кроме того, $\theta_h = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\psi_h \in \ker(I_h^*)$. Учитывая, что $\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h = \varepsilon - \theta_h \varepsilon + \underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h$, имеем

$$\left\|\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h\right\|_D^2 = \left\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\right\|_D^2 + \left\|\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h\right\|_D^2. \tag{137}$$

При использовании левого неравенства (101) получаем

$$\left\|\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h\right\|_D \leq [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h]_D. \tag{138}$$

Равенство (137) и оценка (138) приводят к неравенству

$$\left\|\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h\right\|_D^2 \leq \left\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\right\|_D^2 + [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h]_D^2 + [\underline{\psi}_h]_D^2. \tag{139}$$

Поскольку $\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, с использованием неравенств (124) и (55) находим

$$[\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h]_D \leq [\varphi_h - \varepsilon_h]_D \leq R\left\|\varphi_h - \varepsilon_h\right\|_D \leq \frac{R}{d}\sqrt{1-d^2}\left\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\right\|_D. \tag{140}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\left\|\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h\right\|_D \leq \frac{\sqrt{R^2(1-d^2)+d^2}}{d}\left\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\right\|_D + [\underline{\psi}_h]_D, \tag{141}$$

откуда на основании свойств ортогональных проекций (20) и (21) получаем оценку (134).

Для доказательства неравенства (135) используем ортогональное разложение элемента $\varepsilon - B\underline{u}_h \in Y$ в виде $\varepsilon - B\underline{u}_h = \varepsilon - BP_h u + BP_h u - B\underline{u}_h$. Тогда

$$\left\|\varepsilon - B\underline{u}_h\right\|_D^2 = \left\|\varepsilon - BP_h u\right\|_D^2 + \left\|BP_h u - B\underline{u}_h\right\|_D^2. \tag{142}$$

Оценим второе слагаемое в правой части равенства (142). Для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ запишем равенство

$$(BP_h u - B\underline{u}_h, \pi_h)_D = (I_h BP_h u - \varphi_h, \pi_h)_D + [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h, \underline{\pi}_h]_D +$$

$$+(\theta_h \varepsilon, \underline{\pi}_h)_D - [\theta_h \varepsilon, \underline{\pi}_h]_D + (\psi_h, \pi_h - \underline{\pi}_h)_D. \tag{143}$$

Ввиду произвольности элемента $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ полагаем $\pi_h = I_h B P_h u - -I_h B \underline{u}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Применяя для правой части равенства (143) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем оценки (12), (74), (124), (125) и (140), получаем

$$\left\|BP_h u - B\underline{u}_h\right\|_D \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\left\|\varepsilon - BP_h u\right\|_D + \frac{R^2\sqrt{1-d^2}}{d^2}\left\|\varepsilon - \theta_h \varepsilon\right\|_D +$$

$$+\frac{\sqrt{R^2-1}}{d}\left\|\psi_h\right\|_D + \frac{R}{d}\sup_{\chi_h \in X_h}\frac{\left|(\theta_h\varepsilon,\chi_h)_D - [\theta_h\varepsilon,\chi_h]_D\right|}{\left\|\chi_h\right\|_D}. \qquad (144)$$

Равенство (142) с учетом оценки (144) и свойств ортогональных проекций (18) (20), (21) приводит к нужному неравенству (135). ▶

Замечание 10. Пусть, как и ранее, $u_I \in U_h$ – интерполянт $u \in U$ и $\varepsilon_I \in X_h$ – интерполянт $\varepsilon \in Y$. Поскольку

$$[\underline{\psi}_h]_D \le [\theta_h\varepsilon - \underline{I}_h B u_I]_D \le [\theta_h\varepsilon - \varepsilon_I]_D + [\varepsilon_I - \underline{I}_h B u_I]_D, \qquad (145)$$

с учетом неравенств

$$[\theta_h\varepsilon - \varepsilon_I]_D \le R\left\|\theta_h\varepsilon - \varepsilon_I\right\|_D \le R\left\|\varepsilon - \varepsilon_I\right\|_D \qquad (146)$$

получаем оценку для $[\underline{\psi}_h]_D$:

$$[\underline{\psi}_h]_D \le R\left\|\varepsilon - \varepsilon_I\right\|_D + \sup_{\eta_h \in X_h}\frac{\left|[\varepsilon_I - Bu_I,\eta_h]_D\right|}{[\eta_h]_D}. \qquad (147)$$

Замечание 11. Близость решений $\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \in \ker(I_h^*)$ оценивается с помощью неравенств

$$\left\|\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h\right\| \le \left\|\varepsilon_h - \varphi_h + \underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h\right\|_D +$$

$$+\left\|\varphi_h - \underline{\varphi}_h\right\|_D \le \sqrt{R^2-1}\left\|\varepsilon_h - \varphi_h\right\|_D + \left\|\varphi_h - \underline{\varphi}_h\right\|_D. \qquad (148)$$

С использованием оценок (55) и (131) получаем такие не зависящие от h положительные постоянные C_1 и C_2, что

$$\left\|\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h\right\|_D \le C_1 \inf_{\eta_h \in X_h}\left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_D + C_2 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h}\left\|\widetilde{\theta}_h(\varepsilon - \overline{\tau}_h)\right\|_D +$$

$$+\sup_{\chi_h \in X_h}\frac{\left|(\theta_h\varepsilon,\chi_h)_D - [\theta_h\varepsilon,\chi_h]_D\right|}{\left\|\chi_h\right\|_D}. \qquad (149)$$

Сопоставление оценок (134) и (149) свидетельствует о том, что погрешность аппроксимации $\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h \in X$ и разность решений $\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \in X_h$ – суть величины одного порядка малости.

Замечание 12. Для оценки разности $Bu_h - B\underline{u}_h \in Y_h$ запишем равенство

$$(Bu_h - B\underline{u}_h, \pi_h)_D = (\varepsilon_h - \varphi_h, \pi_h)_D + [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h, \underline{\pi}_h]_D +$$

$$+ (\theta_h \varepsilon, \underline{\pi}_h)_D - [\theta_h \varepsilon, \underline{\pi}_h]_D + (\psi_h, \pi_h - \underline{\pi}_h)_D, \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \quad (150)$$

Если в первых двух слагаемых учесть свойства ортогональных проекций и формул численного интегрирования (100), то получим более точную оценку. В соответствии с равенством

$$(\varepsilon_h - \varphi_h, \pi_h)_D + [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h, \underline{\pi}_h]_D = (\varepsilon_h - \varphi_h - \widetilde{I}_h^*(\varepsilon_h - \varphi_h), \pi_h - \widetilde{I}_h^* \pi_h)_D +$$

$$+ [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h - \widetilde{\underline{I}}_h^*(\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h), \underline{\pi}_h - \widetilde{\underline{I}}_h^* \underline{\pi}_h]_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h) \quad (151)$$

и неравенствами (31) и (126) имеем

$$\left| (\varepsilon_h - \varphi_h, \pi_h)_D + [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h, \underline{\pi}_h]_D \right| \le (R^2 + 1 - 2d^2) \left\| \varepsilon_h - \varphi_h \right\|_D \left\| \pi_h \right\|_D, \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \quad (152)$$

На основании равенства (150) и оценок (12), (55), (124), (125) и (152) так или иначе находим такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2 и C_3, что

$$\left\| Bu_h - B\underline{u}_h \right\|_D \le C_1 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_D + C_2 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h) \right\|_D +$$

$$+ C_3 \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_D - [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_D \right|}{\left\| \chi_h \right\|_D}. \quad (153)$$

Согласно оценкам (135) и (153), разность решений $Bu_h - B\underline{u}_h \in Y_h$ не превышает погрешность $\varepsilon - B\underline{u}_h \in Y$. В оценку разности (153) не входит второе слагаемое оценки (135), которое вносит основной вклад в погрешность $\varepsilon - B\underline{u}_h \in Y$. Таким образом, применение формул численного интегрирования, удовлетворяющих равенствам (100), не приводит к изменению порядка сходимости погрешности аппроксимации $\varepsilon - B\underline{u}_h \in Y$.

Замечание 13. Оценим разницу между деформациями, определенными при обычной и смешанной аппроксимациях с учетом эффекта численного интегрирования. Для этого необходимо оценить разность $\underline{\varepsilon}_h - \overline{\varepsilon}_h$, где элемент $\overline{\varepsilon}_h \in Y_h$ задается выражением $\overline{\varepsilon}_h = BP_h u \in Y_h$. Поскольку элементы $\varepsilon_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ взаимосвязаны соотношением $\widetilde{I}_h^* \varepsilon_h = \widetilde{\underline{I}}_h^* \underline{\varepsilon}_h = BP_h u \in Y_h$, с использованием равенства (123) имеем

$$\left\| \underline{\varepsilon}_h - BP_h u \right\|_D^2 = \left\| \varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \right\|_D^2 + \left\| \varepsilon_h - BP_h u \right\|_D^2 . \tag{154}$$

На основе оценок (70) и (149) получаем такие не зависящие от h постоянные C_1 и C_2, что

$$\left\| \underline{\varepsilon}_h - \bar{\varepsilon}_h \right\|_D \le C_1 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_D + C_2 \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \varepsilon - \bar{\tau}_h \right\|_D +$$

$$+ \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_D - [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_D \right|}{\left\| \chi_h \right\|_D} . \tag{155}$$

Сопоставление оценок (70) и (153) показывает, что разности решений $\varepsilon_h - \bar{\varepsilon}_h$ и $\underline{\varepsilon}_h - \bar{\varepsilon}_h$ – суть величины одного порядка малости. Таким образом, все необходимые оценки получены.

Решение дискретной задачи. Рассмотрим простейший итерационный процесс

$$\begin{gathered} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_D = (Bu_h^k, \eta_h)_D, \quad \forall \eta_h \in X_h; \\ (Bu_h^{k+1}, Bv_h)_D = (Bu_h^k, Bv_h)_D + \alpha\{\rho(v_h) - (\varepsilon_h^k - \xi, Bv_h)_D\}, \forall v_h \in U_h, \end{gathered} \tag{156}$$

где α – числовой параметр, вводимый для управления скоростью сходимости процесса. При $0 < \alpha < 2$ имеет место сходимость, причем $\alpha_{opt} = = 2/[1 + (d/R)^2]$.

Итерационный процесс (156) можно трактовать как метод поправок

$$\begin{gathered} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_D = (Bu_h^k, \eta_h), \qquad \forall \eta_h \in X_h; \\ (B\omega_h^k, Bv_h)_D = \rho(v_h) - (\varepsilon_h^k - \xi, Bv_h)_D, \qquad \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k + \alpha^k \omega_h^k, \end{gathered} \tag{157}$$

где $\omega_h^k \in U_h$ – поправка для k-й итерации. Если константа d для вычисления параметра α_{opt} неизвестна либо определяется слишком грубо, целесообразно пользоваться формулой метода скорейшего спуска:

$$\alpha^k = \frac{\left\| B\omega_h^k \right\|_D^2}{[\underline{I}_h B\omega_h^k]_D^2} . \tag{158}$$

Рассмотрим обобщенный метод сопряженных градиентов [11], обладающий более высокой скоростью сходимости. Пусть $u_h^0 \in U_h$ – произвольное начальное приближение к решению $u_h \in U_h$, и элементы $g_h^0, \ldots$ $\ldots, g_h^k \in U_h$ выбираются взаимно сопряженными, т.е. для любых $m = 0, 1, \ldots$

..., $k-1$ имеем $(\underline{I}_h Bg_h^k, Bg_h^m)_D = 0$. Тогда формулы метода сопряженных градиентов могут быть записаны в виде

$$
\begin{gathered}
(B\omega_h^k, Bv_h)_D = \rho(v_h) - (\varepsilon_h^k - \xi, Bv_h)_D, \qquad \forall\, v_h \in U_h; \\
g_h^{k+1} = \omega_h^k + \beta^k g_h^k; \qquad u_h^{k+1} = u_h^k + \alpha^k g_h^{k+1}; \\
\beta^k = \frac{\left\|B\omega_h^k\right\|_D^2}{\left\|B\omega_h^{k-1}\right\|_D^2}; \qquad \alpha^k = \frac{\left\|B\omega_h^k\right\|_D^2}{[\underline{I}_h Bg_h^{k+1}]_D^2}.
\end{gathered}
\tag{159}
$$

Описанные выше итерационные алгоритмы (155)–(159) являются, по-видимому, одними из наиболее эффективных, поскольку количество требуемых итераций для достижения заданной точности решения $(u_h^k, \varepsilon_h^k) \in U_h \times X_h$ не зависит от параметра сетки h.

Заключение. Приведенные результаты могут быть использованы при построении различного рода смешанных аппроксимаций для двухмерных и пространственных задач теории упругости. Возможно также их применение к анализу упругопластических нелинейных краевых задач. Принципиальное отличие смешанных схем МКЭ от традиционных состоит в необходимости построения таких аппроксимирующих функций, для которых обеспечивается выполнение условия устойчивости (12), что, в свою очередь, гарантирует разрешимость, сходимость и получение устойчивого решения конечномерной задачи при любом h. Попытка игнорирования условия (12) при конструировании смешанных аппроксимаций может привести к плохо обусловленным дискретным задачам, решения которых имеют неустойчивый осциллирующий характер.

Применение смешанной аппроксимации для двухмерных задач теории упругости и численный анализ будут рассмотрены в следующей работе автора.

Р е з ю м е

Сформульовано змішану проекційно-сіткову схему розв’язку крайових задач теорії пружності. Досліджено коректність і збіжність змішаних апроксимацій для деформацій і переміщень. Наведено результати аналізу використання числового інтегрування. Оцінка збіжності і точності базується на теорії узагальнених функцій і методах функціонального аналізу. Запропоновано ітераційні алгоритми розв’язку дискретних задач.

1. *Babuska I.* Error bounds for finite element method // Numer. Math. – 1971. – **16**, No. 3. – P. 322 – 333.
2. *Brezzi F.* On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Operationnelle. – 1974. – R. 2. – P. 129 – 151.

3. *Babuska I., Oden J. T., and Lee J. K.* Mixed-hybrid finite element approximations of the second-order elliptic boundary-value problems // TICOM Reports 75. – 1971. – **7**. – University of Texas at Austin, Austin.
4. *Fichera F.* Existence theorems in elasticity. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints // Encyclopedia of Physics, vol. VIa/2; Mechanics of Solids II / C. Truesdell (Ed.). – Springer-Verlag, 1972. – P. 347 – 424.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
6. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
8. *Bramble J. H. and Hilbert S. R.* Estimation of linear functional on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation // SIAM J. Numer. Anal. – 1970. – **7**. – P. 113 – 124.
9. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
11. *Hestens M. and Stiefel E.* Methods of conjugate gradients for solving linear system // Nat. Bur. Std. J. Res. – 1952. – **49**. – P. 409 – 436.

Поступила 05. 07. 2002