УДК 538.931; 539.3:4

Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. Сообщение 1. Постановка задачи и вывод общего уравнения

В. М. Грешнов, Ф. Ф. Сафин, М. В. Грешнов

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

Предложена модель сопротивления металлов пластической деформации в широком температурно-скоростном диапазоне, в котором основным механизмом деформации является дислокационное скольжение в зернах. За счет конкретизации параметров термоактивируемых микромеханизмов преодоления дислокациями барьеров и перестройки дислокационной структуры в процессах динамических полигонизации и рекристаллизации модель позволяет учитывать влияние на сопротивление деформации истории нагружения, связанной с зависимостью скорости деформации $\dot{\varepsilon}_i$ *от времени.*

Ключевые слова: пластическая деформация, дислокации, барьеры, процессы динамической полигонизации и рекристаллизации.

Введение. В современной механике обработки металлов давлением (ОМД) развиты приближенные аналитические и численные методы анализа напряженно-деформированного состояния, деформационной поврежденности заготовки в технологических операциях для случаев простого или близкого к нему нагружений, монотонной деформации и постоянной скорости деформации [1]. На основе этих методов разработаны и представлены на мировом рынке программные пакеты для численного моделирования на ПЭВМ формообразующих операций и процессов ОМД [2].

Основной проблемой дальнейшего развития теоретических основ ОМД с точки зрения повышения точности расчетных методов, с одной стороны, и обеспечения возможности расчета многопереходных процессов, с другой – является учет истории нагружения (деформирования) элементарных частиц заготовки при теоретическом описании процессов пластической деформации [1, 3, 4]. История нагружения в общем случае характеризуется зависимостью скорости деформации и, следовательно, деформации от времени, а также зависимостями (явными или неявными) тензоров напряжений от времени, т.е. характером траекторий нагружения материальных частиц. Физическая природа фактора “история нагружения” состоит в том, что указанные зависимости оказывают влияние на закономерности изменения структуры, которая определяет свойства металлов и их пластическое поведение.

Анализ отмеченной проблемы позволяет разложить ее на следующие задачи: 1) переход от широко используемого описания движения частиц материала при деформации по Эйлеру к описанию по Лагранжу; 2) разработка новых или уточнение известных зависимостей между тензорами напряжений и деформаций, которые должны учитывать историю нагружения, связанную с траекториями векторов напряжений; 3) разработка новых скалярных зависимостей в определяющих соотношениях между интенсивностями напряжений, деформаций и скоростей деформаций при различных температурах (видах деформации: холодная, теплая, горячая), которые должны учитывать историю нагружения, зависящую от изменения деформации и скорости деформации от времени; 4) разработка программного продукта на развитой теоретической основе для моделирования операций и процессов ОМД на ПЭВМ.

Изучению скалярной зависимости сопротивления деформации от термомеханических параметров посвящено большое количество работ, и, начиная с Людвика и Холломона, имеется обширная библиография. В качестве иллюстраций различных подходов к решению задачи отметим: эмпирический подход [5], феноменологический [6] (функционал сопротивления деформации наследственного типа), физический [7] и физико-феноменологический [8].

Общим недостатком многочисленных моделей является неучет влияния на сопротивление деформации зависимости $\dot{\varepsilon}_i(t)$.

В настоящей работе предпринята попытка построения модели сопротивления металлов пластической деформации, лишенной этого недостатка, т.е. она посвящена решению третьей из вышеперечисленных задач. Данная модель представлена в форме оператора, который ставит в соответствие функциям $\rho_s(\varepsilon_i)$, $\dot{\varepsilon}_i(\varepsilon_i)$ функцию $\sigma_i(\varepsilon_i)$, где ρ_s – скалярная плотность неподвижных дислокаций; ε_i, $\dot{\varepsilon}_i$ и σ_i – интенсивности деформаций, скоростей деформаций и напряжений соответственно.

Вывод общего уравнения. Известно, что физические модели сложных по своей природе процессов являются громоздкими, содержат параметры (коэффициенты), которые зачастую не имеют размерности и не поддаются точному определению [7]. Поэтому использовать их в технологических расчетах практически невозможно [9]. Феноменологические модели обладают большой общностью, однако их применение для описания конкретного физического процесса обусловлено проведением трудоемкого, требующего, как правило, специального оборудования, эксперимента для определения многочисленных материальных констант и функций.

Ниже реализованы физико-феноменологический подход и метод, изложенные в [8] и доказавшие свою продуктивность, в частности, при построении единой модели холодной пластической деформации и вязкого разрушения металлов [3, 4], модели сверхпластической деформации [10].

Исследуемая модель – обобщение модели холодной пластической деформации [3] с точки зрения учета температуры и возникающего при повышенных температурах влияния на интенсивность деформаций ε_i скорости деформации и ее изменения во времени. При этом на сопутствующем пластической деформации процессе накопления деформационной поврежденности и макроразрушения внимание пока не акцентируется.

Рассматривается пластическая деформация при активном нагружении в широком температурно-скоростном диапазоне, в котором основным механизмом, вносящим вклад в деформацию, является дислокационное скольжение в зернах поликристаллического агрегата. Это соответствует температурно-скоростному диапазону, в котором в промышленности осуществляется ОМД, за исключением специальных видов обработки – изотермической штамповки в условиях сверхпластичности и ползучести.

С целью получения обобщенной модели в ее основу положены общепризнанные в физике прочности и пластичности положения [11]: при пластической деформации протекают два конкурирующих процесса – упрочнение и разупрочнение. Упрочнение обусловлено торможением потока подвижных дислокаций барьерами различной природы, на которых они останавливаются и превращаются в неподвижные; основными барьерами в промышленных конструкционных металлах и сплавах являются неподвижные дислокации “леса”, межзеренные, межфазные и субзеренные границы, при этом первый тип барьеров – доминирующий. Разупрочнение связано с различными перестройками дислокационной структуры, которые приводят к уменьшению плотности неподвижных дислокаций, например, за счет их аннигиляции, в том числе в процессе полигонизации, исчезновения в подвижных границах зерен при рекристаллизации или преодоления некоторых барьеров и превращения снова в подвижные силовым способом без термической активации (за счет работы действующего напряжения) или термофлуктуационным способом (с помощью термической активации).

Систему уравнений задачи, описывающую вышеперечисленные процессы, запишем в виде

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \rho_g \nu_{gs} - \rho_s \nu_{sg}; \tag{1}$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \rho_g b v; \tag{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{U - \sigma_i V/\sqrt{3}}{kT}\right), \tag{3}$$

где ρ_s и ρ_g – усредненные по объему скалярные плотности неподвижных и подвижных дислокаций; b, v – усредненные по системам скольжения модули векторов Бюргерса и скорости скольжения дислокаций, для металлов $b = 3 \cdot 10^{-8}$ см; t – время; $\dot{\varepsilon}_0$ – не зависящий от температуры предъэкспоненциальный множитель; U – энергия активации элементарного акта механизма, контролирующего скорость деформации; V – активационный объем; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; ν_{gs}, ν_{sg} – эффективные частоты соответствующих дислокационных превращений.

Здесь, в отличие от работы [3], вместо одного из уравнений связи макроскопических характеристик пластической деформации с характеристиками дислокационной структуры $\sigma_i = \alpha \overline{m} G b \sqrt{\rho_s}$ взято уравнение (3) [11]. Этим мы полагаем, что при теплой ($0{,}4T_{пл} \geq T \geq 0{,}2T_{пл}$) и горячей ($T > 0{,}4T_{пл}$) деформации, где $T_{пл}$ – температура плавления, скорость деформации контролируется термоактивируемыми процессами полигонизации и рекристаллизации. Основанием для этого являются относительно большие пластические деформации и скорости деформации (и соответственно напряжения) в технологических операциях ОМД, которые обеспечивают необходимое $\varepsilon_i \geq \varepsilon_{кр}$ и достаточное $\sigma_i \geq \sigma_{кр}$, где $\varepsilon_{кр}$ и $\sigma_{кр}$ – критические деформация и напряжение соответственно, условие протекания указанных процессов [11]. Поэтому плотность неподвижных дислокаций ρ_s может изменяться не только за счет преодоления ими барьеров, что учитывается уравнением (1), но и за счет полигонизации и рекристаллизации, что учитывается уравнением (3).

Для последующей оценки области применимости модели сформулируем принятые при записи (1)–(3) упрощающие допущения:

1) упругие деформации ввиду их малости по сравнению с пластическими в операциях ОМД не учитываются;

2) дислокационные источники достаточно продуктивны и обеспечивают в каждый момент времени активной деформации необходимую плотность подвижных дислокаций для обеспечения задаваемой скорости деформации механизмом дислокационного скольжения и быстрой подстройки плотности неподвижных дислокаций к действующему напряжению [12]. При развитых пластических деформациях с умеренными и достаточно плавно изменяющимися скоростями деформации это допущение оправдано. Отклонения, как известно [12], наблюдаются в начале пластического течения у материалов с наличием "зуба текучести" на диаграммах деформирования. Это допущение позволяет исключить из рассмотрения мощность дислокационных источников, уравнение баланса для ρ_g и анализ совместности уравнений (1) и (3);

3) вклад в сопротивление деформации барьеров недислокационной природы (рельефа Пайерса и т.д.) в явном виде не учитывается. Полагаем, что часть этих барьеров вносят вклад в начальный предел текучести, а другие совместно с барьерами дислокационной природы определяют среднюю длину свободного пробега дислокаций и, тем самым, будут учтены в модели в неявном виде;

4) дислокации большую часть времени находятся на барьерах в ожидании тепловой флуктуации, поэтому $\nu_{gs} >> \nu_{sg}$ и $\rho_g << \rho_s$. Следовательно, примем, что общая плотность дислокаций $\rho \cong \rho_s$;

5) температурные интервалы аномального поведения сопротивления деформации у некоторых сплавов, например сине- и красноломкость у сталей, исключаются из рассмотрения. В практике ОМД при таких температурах обработка не проводится.

Принятые допущения были бы невозможны в случае построения физической модели сопротивления металлов пластической деформации, предназначенной для ее теоретического исследования. Наша задача, как уже отмечалось, получение приближенной модели, которая должна достаточно адекватно учитывать влияние на величину σ_i истории нагружения и которую можно использовать в практике технологических расчетов, а также при теоретическом анализе операций и процессов ОМД.

Решение системы (1)–(3) в линейном приближении при $\dot{\varepsilon}_i = \text{const}$ и начальных условиях $t = 0$, $\rho_s = \rho_{s0}$ (ρ_{s0} – исходная – до нагрева и деформации – плотность неподвижных дислокаций) имеет вид

$$\sigma_i = \alpha \overline{m} G(T) b \left[1 - \frac{2{,}5 kT}{G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_i} \right] \times$$

$$\times\left\{\frac{\dot{\varepsilon}_i(\nu_{sg}b\lambda)^{-1}\left[\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{\dot{\varepsilon}_i}\nu_{sg}\right)-1\right]+\rho_{s0}}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{\dot{\varepsilon}_i}\nu_{sg}\right)}\right\}^{1/2}; \tag{4}$$

$$\nu_{sg}=\nu_0\exp\left(-\frac{U-\sigma_i V/\sqrt{3}}{kT}\right), \tag{5}$$

где $dt=d\bar{\varepsilon}_i/\dot{\varepsilon}_i$; $d\bar{\varepsilon}_i$ – интенсивность приращения пластической деформации (для общего случая объемного напряженно-деформированного состояния $d\bar{\varepsilon}_i=\left(\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}\cdot d\varepsilon_{ij}\right)^{1/2}$, при одноосном напряженном состоянии $d\bar{\varepsilon}_i=$ $=|dl/l|$); $d\varepsilon_{ij}$ – приращение компонент тензора деформаций; dl и l – приращение размера и текущий размер образца соответственно; $\lambda=v/\nu_{gs}$ – средняя длина свободного пробега дислокаций; α – параметр междислокационного взаимодействия; $\overline{m}=3{,}1$ – фактор Тейлора; G – модуль сдвига.

Основными механизмами преодоления дислокациями барьеров являются пересечение дислокаций леса, поперечное скольжение винтовых дислокаций и переползание краевых при повышенной T [11]. Эти же механизмы, контролируемые диффузией, ответственны за перестройку структуры при полигонизации и рекристаллизации. В связи с этим в (3) и (5) значение $U=Gb^3/2{,}5$ берется одинаковым и равным энергии активации самодиффузии [11]. При пересечении дислокаций и при выходе сегмента дислокации в иную плоскость по механизму поперечного скольжения требуется активация объема кристаллической решетки длиной, равной среднему расстоянию между дислокациями леса (средняя длина дислокационного сегмента) $1/\sqrt{\rho_s}$ и поперечником b^2. Поэтому в (3) и (5) величина активационного объема берется также одинаковой и равной $V=b^2/\sqrt{\rho_s}$.

Частоту ν_0 в (5) оценим исходя из следующих соображений. По смыслу – это частота колебаний дислокационного сегмента со средней длиной $1/\sqrt{\rho_s}$, в котором $1/\sqrt{\rho_s}\,b$ ионов. Частота колебаний иона в решетке (частота Дебая) приблизительно одинакова для всех металлов, $\nu_D\cong10^{12}$ с$^{-1}$ [11]. Известно, что частоты колебаний обратно пропорциональны колеблющимся массам. Следовательно, $\nu_0\cong\nu_D b\sqrt{\rho_s}$. В развернутом виде (5) имеет вид

$$\nu_{sg}=\nu_D b\sqrt{\rho_s}\exp\left(-\frac{G(T)b^3-1{,}443\sigma_i\, b^2/\sqrt{\rho_s}}{2{,}5kT}\right). \tag{6}$$

Уравнение (4) является моделью жесткопластического тела. Поэтому предел текучести, соответствующий $\varepsilon_i=0$, по (4) определится как

$$\sigma_{\delta} = \alpha \overline{m} G(T) b \left[1 - \frac{2{,}5 kT}{G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_i} \right] \sqrt{\rho_{s0}}. \qquad (7)$$

Поскольку величина ρ_{s0} в (4) и (7) есть исходная плотность неподвижных дислокаций в материале до его нагрева и деформации, для ее определения и значения λ в (4) необходимо по экспериментальным данным построить диаграмму деформирования материала $\sigma_i(\varepsilon_i)$ при холодной деформации, т.е. при $T = 20$°C. Простая методика определения указанных величин описана в [3].

Отметим, что (7) является альтернативой предложенной в [13] теории предела текучести металлов.

Уравнения (4) и (6) описывают сопротивление деформации в широком температурно-скоростном диапазоне, но только при $\dot{\varepsilon}_i = \mathrm{const}$. Решением системы (1)–(3), учитывающим влияние на σ_i истории нагружения, связанной с $\dot{\varepsilon}_i(t)$, будет интегральное уравнение

$$\sigma_i(t) = \alpha \overline{m} G(T) b \left[1 - \frac{2{,}5 kT}{G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_i(t)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \int_0^t \left[\frac{\dot{\varepsilon}_i(t)}{b\lambda} - \rho_s^{3/2} \nu_D b \exp\left(- \frac{G(T) b^3 - 1{,}443 \sigma_i b^2 / \sqrt{\rho_s}}{2{,}5 kT} \right) \right] dt \right\}^{1/2}. \qquad (8)$$

Интегрирование (8) возможно для каждой заранее известной функции $\dot{\varepsilon}_i(t)$. При выполнении технологической операции ОМД каждая материальная частица деформируемой заготовки имеет свой закон $\dot{\varepsilon}_i(t)$. Разрабатываемая модель сопротивления металлов пластической деформации предназначена для математической постановки краевых задач технологической пластичности с целью получения математических моделей технологических операций и процессов ОМД. В настоящее время наиболее целесообразным методом решения краевых задач является метод конечных элементов (МКЭ) [14, 15], особенность которого заключается в пошаговом алгоритме расчета. С учетом этого уравнение (8) запишем в форме, удобной для его приближенного численного решения в процессе реализации моделирования пластической деформации заготовки при ОМД методом МКЭ:

$$\sigma_{i(g)}(\varepsilon_{i(g)}) = \alpha \overline{m} G(T) b \left[1 - \frac{2{,}5 kT}{G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_{i(g)}} \right] \sqrt{\rho_{s(g)}}; \qquad (9)$$

$$\rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)};$$

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\varepsilon}_{i(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \times \right.$$

$$\times \exp\left[-\frac{G(T)b^3 - 1{,}443\sigma_{i(g-1)}\, b^2/\sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{2{,}5kT}\right)\Bigg] d\bar{\varepsilon}_{i(g)};$$

$$\dot{\varepsilon}_{i(g)} = d\bar{\varepsilon}_{i(g)}/t_{(g)}; \qquad d\bar{\varepsilon}_{i(g)} = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij(g)} d\varepsilon_{ij(g)}\right)^{1/2}; \qquad \varepsilon_{i(g)} = \varepsilon_{i(g-1)} + d\bar{\varepsilon}_{i(g)},$$

где $g = 1, 2, ..., n$ – номер шага нагружения; $t_{(g)}$ – время деформирования на шаге g, определяемое через известную на шаге скорость перемещения рабочего органа деформирующего оборудования и задаваемое приращение перемещения инструмента; $d\varepsilon_{ij(g)}$ – компоненты тензора приращений пластических деформаций на шаге g.

Из (7) определяется $\sigma_{i(0)} = \sigma_{\text{т}}$ при $g = 1$, $\rho_{s(0)} = \rho_{s0}$, $\varepsilon_{i(0)} = 0$. При этом полагаем, что на каждом шаге нагружения ввиду малости приращения $d\bar{\varepsilon}_{i(g)}$ скорость деформации $\dot{\varepsilon}_{i(g)} = \text{const}$.

Оператор (9) ставит в соответствие функциям $\rho_s(\varepsilon_i)$, $\dot{\varepsilon}_i(\varepsilon_i)$ функцию $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Он обеспечивает учет истории нагружения при расчете процессов пластической деформации, так как $d\rho_{s(g)}$ подсчитывается на каждом шаге нагружения при действительной на этом шаге $\dot{\varepsilon}_{i(g)}$ и суммируется для определения $\sigma_{i(g)}$ с накопленной на всех предыдущих шагах при различных $\dot{\varepsilon}_i$ плотностью $\rho_{s(g-1)}$. Если на шаге g скорость деформации уменьшилась по сравнению с предыдущим шагом, то, как следует из (9), может быть $d\rho_{s(g)} < 0$. Это приведет к снижению общей плотности неподвижных дислокаций $\rho_{s(g)}$ и уменьшению $\sigma_{i(g)}$ по сравнению с предыдущим шагом $(g-1)$.

Следовательно, последовательный учет истории нагружения обусловлен наличием в модели такой характеристики структуры металлов, как плотность неподвижных дислокаций. Ситуация аналогична наблюдаемой в физико-феноменологической теории вязкого разрушения [3, 4, 15], где учет истории нагружения, связанной с зависимостью показателя жесткости напряженного состояния $k = \sigma_{ii}/3\tau_i$ от времени, достигается благодаря наличию в модели структурной характеристики деформационной поврежденности – плотности микротрещин.

В разработанной модели пластической деформации есть характерное время процесса $t_x = 1/\nu_{sg}$ и время наблюдения за процессом $t = \varepsilon_i/\dot{\varepsilon}_i$. Если $t < t_x$ (очень большая $\dot{\varepsilon}_i$ или малая ε_i), то дислокации не будут успевать срываться с барьеров за время деформирования заготовки и, например, при очень малых ε_i даже при высоких T и умеренных $\dot{\varepsilon}_i$ будем иметь холодную деформацию. Процессы разупрочнения не успеют развиться.

Из условия $t = t_x$ получим $\varepsilon_i/\dot{\varepsilon}_i = 1/\nu_{sg}$, или с учетом (3) и (6) для степени деформации $d\bar{\varepsilon}_i$ –

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_0} = \frac{1}{\nu_0}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что при расчетах процессов пластической деформации с использованием (9) значение $d\bar{\varepsilon}_i$ необходимо задавать из условия

$$d\bar{\varepsilon}_i >> \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\nu_0}. \tag{11}$$

Оценка $d\bar{\varepsilon}_i$ по (11) будет возможна после определения из экспериментальных данных величины $\dot{\varepsilon}_0$. Этот вопрос, а также частные случаи (9), соответствующие принятой в теории ОМД классификации деформации на холодную, теплую и горячую, и результаты экспериментальной проверки описанной модели будут рассмотрены во втором сообщении.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ. Грант Т00-6.4-963.

Резюме

Запропоновано модель опору металів пластичній деформації в широкому температурно-швидкісному діапазоні, в якому основними механізмами деформації є дислокаційне ковзання в зернах. За рахунок конкретизації параметрів термоактивованих мікромеханізмів подолання дислокаціями бар'єрів та перебудови дислокаційної структури в процесах динамічних полігонізації і рекристалізації модель дозволяє враховувати вплив на опір деформації історії навантаження, зумовленої залежністю швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_i$ від часу.

1. *Колмогоров В. Л.* Механика обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1986. – 688 с.
2. *Стебунов С. А., Биба Н. В.* FORGE FAIR'97 – демонстрация возможностей объемной штамповки // Кузнеч.-штампов. пр-во. – 1997. – № 8. – С. 37 – 38.
3. *Грешнов В. М., Лавриненко Ю. А., Напалков А. В.* Прогнозирование разрушения металлов в процессах холодной пластической деформации. Сообщ. 1. Приближенная модель пластической деформации и разрушения металлов // Пробл. прочности. – 1999. – № 1. – С. 76 – 85.
4. *Грешнов В. М., Боткин А. В., Лавриненко Ю. А., Напалков А. В.* Прогнозирование разрушения металлов в процессах холодной пластической деформации. Сообщ. 2. Учет анизотропного упрочнения и экспериментальная проверка модели пластической деформации и разрушения // Там же. – № 2. – С. 74 – 84.
5. *Мазур В. Л., Хижняк Д. Д.* Сопротивление деформации и разупрочнение низколегированных сталей // Металлы. – 1991. – № 5. – С. 148 – 154.
6. *Поздеев А. А., Тарновский В. И., Еремеев В. И., Баакашвили В. С.* Применение теории ползучести при обработке металлов давлением. – М.: Металлургия, 1973. – 192 с.

7. *Попов Л. Е., Кобытев В. С., Ковалевская Т. А.* Пластическая деформация сплавов. – М.: Металлургия, 1984. – 183 с.

8. *Гринберг Б. А., Иванов М. А.* Доминирующие дислокационные превращения и температурная зависимость деформирующего напряжения в интерметаллидах // Физика металлов и металловедение. – 1994. – **78**, вып. 3. – С. 3 – 32.

9. *Batsoulas N. D.* Review. Mathematical description of the mechanical behavior of metallic materials under creep conditions // J. Mater. Sci. – 1997. – No. 32. – P. 2511 – 2527.

10. *Грешнов В. М., Иванов М. А.* Полуфеноменологическая модель сверхпластичности на основе учета дислокационных превращений // Металлофизика. – 1993. – **15**, № 7. – С. 3 – 12.

11. *Штремель М. А.* Прочность сплавов. Ч. II. Деформация. – М.: МИСИС, 1997. – 527 с.

12. *Иванов М. А., Гринберг Б. А., Барабаш Т. О.* Описание поведения ансамбля дислокаций с учетом их размножения // Физика металлов и металловедение. – 1998. – **86**, вып. 3. – С. 24 – 38.

13. *Колбасников Н. Г., Трифанова И. Ю.* Интегрально-вероятностная интерпретация температурной зависимости предела текучести металлов // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1995. – № 11. – С. 36 – 41.

14. *Грешнов В. М., Боткин А. В., Напалков А. В., Лавриненко Ю. А.* Математическое моделирование многопереходных процессов холодной объемной штамповки на основе физико-математической теории пластического формообразования металлов. Ч. 1. Расчет напряженно-деформированного состояния // Кузнеч.-штампов. пр-во. – 2001. – № 8. – С. 33 – 37.

15. *Грешнов В. М., Боткин А. В., Напалков А. В., Лавриненко Ю. А.* Математическое моделирование многопереходных процессов холодной объемной штамповки на основе физико-математической теории пластического формообразования металлов. Ч. 2. Расчет деформационной поврежденности и прогнозирование макроразрушения // Там же. – № 10. – С. 34 – 39.

Поступила 28. 07. 2001