

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.3

## Термомеханические модели необратимого конечного деформирования анизотропных тел

А. А. Маркин, М. Ю. Соколова

Тульский государственный университет, Тула, Россия

*В основе предложенных моделей необратимого конечного деформирования начально-анизотропных тел лежит гипотеза о параметрах состояния, в качестве которых выбираются универсальный параметр (температура) и составляющая деформаций, являющаяся аналогом объемных деформаций в изотропном теле и характеризующая температурные деформации несесненного (свободного от напряжений) анизотропного тела. В результате использования данной гипотезы получено разложение тензора деформаций на обратимую и необратимую составляющие. Для необратимых процессов конечного деформирования упрочняющихся материалов предложена модель деформационного типа, с помощью которой можно описывать изменение типа анизотропии начально-анизотропных материалов в процессе деформирования. Для модели типа теории течения функция предельного состояния, записанная в пространстве необратимых деформаций, позволяет отразить экспериментально наблюдаемый факт пластического течения анизотропных кристаллов под действием только гидростатического давления.*

**Ключевые слова:** термомеханика, конечные деформации, истинные напряжения, анизотропия, пластичность.

### Обозначения

$S$	– тензор истинных напряжений Коши
$K$	– тензор конечных деформаций
$\bar{\sigma}$	– вектор напряжений в пространстве Ильюшина $E_6$
$p, \bar{\tau}, \tau_\alpha$	– соответственно гидростатическое напряжение, вектор нагружения и его координаты
$\bar{k}$	– вектор деформаций в пространстве Ильюшина
$\theta, \bar{\varepsilon}, \varepsilon_\alpha$	– соответственно относительное изменение объема, вектор формоизменения и его координаты
$\bar{i}_\alpha$ ( $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ )	– базисные векторы пространства Ильюшина
$N$	– тензор четвертого ранга, характеризующий свойства материала
$n, n_\perp, c_\perp, \lambda, \Lambda$	– тензоры второго ранга в пространстве Ильюшина, характеризующие свойства анизотропного материала
$\bar{a}_0$	– направляющий вектор обратимого деформирования
$E_\perp$	– ортогональное к $\bar{a}_0$ пятимерное пространство

© А. А. МАРКИН, М. Ю. СОКОЛОВА, 2002

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2002, № 6

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5$	– базис подпространства $E_{\perp}$
$\bar{k}_0, \bar{k}_{\perp}$	– составляющие вектора деформаций
$\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_{\perp}$	– составляющие вектора напряжений
$\psi, \eta, w$	– соответственно удельные свободная энергия, энтропия и диссипация
$T, T_0$	– текущая и начальная температура тела

Существующие модели необратимого деформирования анизотропных тел основываются либо на теории пластического течения Мизеса–Хилла [1], либо на соотношениях деформационной теории пластичности [2–4]. В таких моделях деформации анизотропного материала полагаются малыми, и не проводится разделение деформаций на обратимую и необратимую составляющие.

В данной работе на базе рассмотрения образов процессов деформирования в пространстве Ильюшина [5] с учетом симметрии свойств материалов получены основные термомеханические соотношения конечного деформирования анизотропных тел. Выделение обратимой составляющей деформаций анизотропного материала, обусловленной его температурными деформациями, позволило построить простейшие модели необратимого деформирования. Ниже предложены варианты деформационной теории и теории течения, обобщенные на случай конечных деформаций.

**Основные термомеханические соотношения.** Пусть напряженное состояние в материале описывается тензором истинных напряжений  $S$ , а деформированное состояние – тензором  $K$  [6], разбиение которого на шаровую и девиаторную части соответствует объемному деформированию и формоизменению. Тензоры  $S$  и  $K$  энергетически сопряжены через выражение удельной механической работы.

Процессу деформирования анизотропного материала поставим в соответствие его образ в шестимерном пространстве Ильюшина  $E_6$  [5]. Тензору деформаций  $K$  в этом пространстве соответствует вектор  $\bar{k} = \theta \bar{i}_0 + \bar{\varepsilon}$ , где  $\theta = I \cdot K$  – первый инвариант меры  $K$  ( $I$  – единичный тензор);  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\alpha} \bar{i}_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$  – вектор формоизменения;  $\bar{i}_0, \bar{i}_{\alpha}$  – векторы базиса пространства  $E_6$ . Тензору напряжений  $S$  соответствует вектор  $\bar{\sigma} = -p \bar{i}_0 + \bar{\tau}$ , где  $p = -I \cdot S$  – гидростатическое напряжение;  $\bar{\tau} = \tau_{\alpha} \bar{i}_{\alpha}$  – вектор нагружения, соответствующий девиатору тензора напряжений.

Полусимметричному тензору четвертого ранга  $N$  ( $N_{ijkl} = N_{klij} = N_{jikl} = N_{ijlk}$ ) в пространстве Ильюшина соответствует симметричный тензор второго ранга  $n$ , причем компоненты тензоров  $N$  и  $n$  связаны соотношениями [7]:

$$\frac{3}{2} N_{ijkl} = \beta_{ij}^{\alpha} n_{\alpha\beta} \beta_{\beta}^{kl} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} n_{\alpha\beta} = \beta_{\alpha}^{ij} N_{ijkl} \beta_{kl}^{\beta},$$

где  $\beta_{\alpha}^{ij}$  и  $\beta_{ij}^{\alpha}$  – известные матрицы перехода [5].

В пространстве  $E_6$  введем единичный вектор  $\bar{a}_0$  и определим ортогональное к нему пятимерное подпространство  $E_{\perp}$  с ортонормированным

базисом  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5$ . В процессе деформирования базис  $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_5$  не изменяет свою ориентацию относительно базиса пространства  $E_6$   $\bar{i}_0, \dots, \bar{i}_6$  и связан с ним постоянной ортогональной матрицей  $L_{\alpha\beta}$ :  $\bar{a}_\alpha = L_{\alpha\beta} \bar{i}_\beta$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, 5$ ).

Разложим вектор деформаций  $\bar{k}$  и вектор напряжений  $\bar{\sigma}$  по базису  $\bar{a}_\alpha$ :

$$\bar{k} = k_0 \bar{a}_0 + k_\alpha \bar{a}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5); \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \bar{a}_0 + \sigma_\alpha \bar{a}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2)$$

и введем обозначения:  $k_0 \bar{a}_0 = \bar{k}_0$ ;  $k_\alpha \bar{a}_\alpha = \bar{k}_\perp$ ;  $\sigma_0 \bar{a}_0 = \bar{\sigma}_0$ ;  $\sigma_\alpha \bar{a}_\alpha = \bar{\sigma}_\perp$ . Тогда соотношения (1) и (2) преобразуются следующим образом:

$$\bar{k} = \bar{k}_0 + \bar{k}_\perp; \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_\perp. \quad (3)$$

Ввиду постоянства векторов  $\bar{a}_\alpha$  производные по времени любого порядка от вектора  $\bar{k}$  также могут быть представлены в виде

$$\dot{\bar{k}} = \dot{k}_0 \bar{a}_0 + \dot{k}_\alpha \bar{a}_\alpha \quad \text{или} \quad \dot{\bar{k}} = \dot{\bar{k}}_0 + \dot{\bar{k}}_\perp. \quad (4)$$

Запишем основное термодинамическое соотношение [5] так:

$$\dot{\psi} + \eta \dot{T} = \frac{1}{\rho_0} \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{k}} - \dot{w}, \quad (5)$$

где  $\psi, \eta$  – отнесенные к единице массы свободная энергия и энтропия;  $\frac{1}{\rho_0} \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{k}}$  – удельная мощность напряжений;  $\dot{w}$  – скорость производства диссипации в единице массы;  $T$  – абсолютная температура.

На основе соотношений (2)–(4) и с учетом ортогональности векторов  $\bar{a}_\alpha$  выражение для мощности запишем в виде

$$\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{k}} = \bar{\sigma}_0 \cdot \dot{\bar{k}}_0 + \bar{\sigma}_\perp \cdot \dot{\bar{k}}_\perp = \sigma_0 \dot{k}_0 + \bar{\sigma}_\perp \cdot \dot{\bar{k}}_\perp. \quad (6)$$

Выражение (6) аналогично представлению мощности напряжений в изотропном материале  $\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{k}} = -p\dot{\theta} + \bar{\tau} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}$ , соответствующему разложению тензоров напряжений и деформаций на шаровую и девиаторную составляющие.

С учетом (6) соотношение (5) преобразуется таким образом:

$$\dot{\psi} + \eta \dot{T} = \frac{1}{\rho_0} (\bar{\sigma}_0 \cdot \dot{\bar{k}}_0 + \bar{\sigma}_\perp \cdot \dot{\bar{k}}_\perp) - \dot{w}. \quad (7)$$

Представим свободную энергию в виде суммы двух функций:  $\psi = \psi_0(\bar{k}_0, T) + \psi_\perp(\bar{k}_\perp)$ , причем составляющая свободной энергии  $\psi_0$  является функцией только составляющей деформаций  $\bar{k}_0$  и температуры  $T$ , т.е.  $\psi_0 = \psi_0(\bar{k}_0, T)$ , а функция  $\psi_\perp$  зависит только от деформаций  $\bar{k}_\perp$ . Тогда составляющую вектора деформаций  $\bar{k}_0$  будем понимать как обратимую составляющую деформаций анизотропного материала, являющуюся аналогом объемной деформации в изотропном материале. В простейшем случае выражение для составляющей свободной энергии  $\psi_0$  запишем в виде

$$\psi_0 = \frac{1}{2}C_0\bar{k}_0 \cdot \bar{k}_0 - C_1\bar{k}_0 \cdot \bar{a}_0(T - T_0) + \frac{1}{2}C_2(T - T_0)^2, \quad (8)$$

где  $C_0, C_1, C_2$  – константы материала;  $T_0$  – начальная температура.

Из соотношения (7) следует, что  $\dot{\psi}_0 = \frac{1}{\rho_0}\bar{\sigma}_0 \cdot \dot{\bar{k}}_0 - \eta\dot{T}$ , откуда получим выражения для составляющей напряжений  $\bar{\sigma}_0$ :

$$\bar{\sigma}_0 = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{k}_0} = C_0\bar{k}_0 - C_1\bar{a}_0(T - T_0) \quad (9)$$

и энтропии –

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = C_1\bar{k}_0 \cdot \bar{a}_0 - C_2(T - T_0).$$

При  $\bar{\sigma}_0 = \bar{0}$  из соотношения (9) получим выражение  $C_0\bar{k}_0|_{\bar{\sigma}_0=\bar{0}} = C_1\bar{a}_0(T - T_0)$ , которое позволяет определять температуру в анизотропном теле и показывает, что изменение температуры нестесненного анизотропного тела вызывает изменение не только его объема, но и формы. При этом вектор  $\bar{a}_0$  определяется из условия  $\bar{a}_0 = \bar{k}_0|_{\bar{\sigma}_0=\bar{0}} / \|\bar{k}_0|_{\bar{\sigma}_0=\bar{0}}\|$ , тогда вектор  $\bar{k}_0$  является вектором температурной деформации, а вектор  $\bar{a}_0$  – его орт. Следовательно, для построения вектора  $\bar{a}_0$  необходимо экспериментально определить вектор температурной деформации и нормировать его. С этой целью можно использовать данные о коэффициентах температурного расширения анизотропных материалов. Для кристаллов такие данные приведены в справочнике [8]. В частности, для изотропного материала вектор  $\bar{a}_0$  совпадает с вектором  $\bar{i}_0$ , а подпространство  $E_\perp$  – с девiatorным пространством Ильюшина.

Таким образом, в анизотропном материале выделяется составляющая деформаций  $\bar{k}_0$ , направление которой в пространстве Ильюшина в течение всего процесса деформирования совпадает с направлением температурной деформации в нестесненном анизотропном теле. В изотропном теле такая составляющая связана с изменением объема, происходящим упруго в течение всего процесса необратимого деформирования.

Определяющие соотношения, позволяющие описать конечные пластические деформации анизотропного материала, приведены в работах [9, 10]. Записывая соотношения в скоростной форме, авторы исключали из рассмотрения жесткое вращение материала, сопровождающее конечные деформации, путем использования объективных производных. Однако выделение обратимой составляющей деформаций основано на аддитивном разложении тензора деформаций Грина [9] либо тензора деформации скорости [10] и не имеет термомеханического обоснования.

**Деформационная теория пластичности.** Рассмотрим жесткопластический материал, полагая, что мощность напряжений  $\vec{\sigma}_\perp$  полностью рассеивается, т.е.  $\frac{1}{\rho_0} \vec{\sigma}_\perp \cdot \dot{\vec{k}}_\perp = \dot{w}$ . Для упрочняющегося жесткопластического материала связь между векторами напряжений  $\vec{\sigma}_\perp$  и деформаций  $\vec{k}_\perp$  представим в виде

$$\dot{\vec{\sigma}}_\perp = n_\perp(\vec{k}_\perp) \cdot \dot{\vec{k}}_\perp, \quad (10)$$

где тензор  $n_\perp$  зависит от вектора пластической деформации  $\vec{k}_\perp$ , достигнутого в данный момент.

Пусть тензор  $n_\perp$  зависит от вектора деформаций  $\vec{k}_\perp$  линейно:

$$n_\perp = c_\perp + \sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (\vec{a}_\alpha \vec{k}_\perp + \vec{k}_\perp \vec{a}_\alpha), \quad (11)$$

где  $c_\perp = c_{\beta\delta} \vec{a}_\beta \vec{a}_\delta$  ( $\beta, \delta = 1, 2, 3, 4, 5$ ) – постоянный тензор свойств материала;  $c_\alpha$  – константы материала;  $m$  и  $\vec{a}_\alpha$  – размерность и базис инвариантного подпространства, характеризующего симметрию свойств исследуемого типа материала [11].

В выражении (11) тензоры второго ранга  $\vec{a}_\alpha \vec{k}_\perp + \vec{k}_\perp \vec{a}_\alpha$  образованы диадными произведениями вектора  $\vec{k}_\perp$ , характеризующего процесс деформирования, и базисных тензоров  $\vec{a}_\alpha$ , характеризующих начальную анизотропию материала, и обладают теми же свойствами симметрии, что и постоянный тензор  $c_\perp$ .

Рассмотрим процесс простого деформирования, которому в шестимерном пространстве меры  $K$  соответствует лучевая траектория  $\vec{k}_\perp = s_\perp \vec{e}$ , где  $\vec{e}$  – постоянный единичный вектор. Если в качестве “времени” использовать монотонно изменяющийся параметр – длину дуги траектории деформирования, то можно определить  $\dot{\vec{k}}_\perp = \vec{e}$ . Тогда соотношение (10) можно записать следующим образом:

$$\vec{\sigma}_\perp = \left[ c_\perp + \sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (\vec{a}_\alpha \vec{k}_\perp + \vec{k}_\perp \vec{a}_\alpha) \right] \cdot \vec{k}_\perp. \quad (12)$$

Дополняя (12) соотношениями (9), для вектора напряжений  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 + \vec{\sigma}_\perp$  получаем выражение

$$\vec{\sigma} = C_0 \vec{k}_0 - C_1 \vec{a}_0 (T - T_0) + \left[ c_\perp + \sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (\vec{a}_\alpha \vec{k}_\perp + \vec{k}_\perp \vec{a}_\alpha) \right] \cdot \vec{k}_\perp, \quad (13)$$

которое после преобразований для изотермического процесса принимает вид

$$\vec{\sigma} = \left[ c + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c'_\alpha (\vec{i}_\alpha \vec{k} + \vec{k} \vec{i}_\alpha - k_0 (\vec{i}_\alpha \vec{a}_0 + \vec{a}_0 \vec{i}_\alpha)) \right] \cdot \vec{k}, \quad (14)$$

где  $c = c_\perp (\vec{k}_\perp) + C_0 \vec{a}_0 \vec{a}_0$ ; коэффициенты  $c'_\alpha$  связаны с коэффициентами  $c_\alpha$  соотношения (11) линейно:  $c'_\alpha = c_\beta L_{\beta\alpha}$ .

Константы, являющиеся компонентами постоянного тензора  $c$ , определяются по начальным участкам диаграмм деформирования  $\sigma_\perp = (s_\perp)$  при  $s_\perp \rightarrow 0$ . Их число и, следовательно, количество необходимых экспериментов различается для материалов разных типов и определяется присущей материалу симметрией свойств. Дополнительные константы  $c_\alpha$  могут быть найдены по данным испытаний на растяжение вдоль осей анизотропии материала. Получаемые диаграммы деформирования  $\sigma_\perp = (s_\perp)$  аппроксимируются параболами, через коэффициенты которых и вычисляются значения  $c_\alpha$ . Для трансверсально-изотропного материала требуется провести один эксперимент на растяжение вдоль оси трансверсальной изотропии, для ортотропного материала – два таких эксперимента.

В процессе разгрузки материала составляющая деформаций  $\vec{k}_\perp$  не изменяется, а тензор  $c^* = c + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c'_\alpha (\vec{i}_\alpha \vec{k} + \vec{k} \vec{i}_\alpha - k_0 (\vec{i}_\alpha \vec{a}_0 + \vec{a}_0 \vec{i}_\alpha))$ , входящий

в (14), характеризует изменение в процессе пластического деформирования свойств материала, в том числе и изменение типа начальной анизотропии материала.

Рассмотрим в качестве примера трансверсально-изотропный материал. Для такого материала размерность инвариантного подпространства  $m = 2$ , его базис  $\vec{i}_0, \vec{i}_1$ , тензор  $c = c_{00} \vec{i}_0 \vec{i}_0 + c_{01} (\vec{i}_0 \vec{i}_1 + \vec{i}_1 \vec{i}_0) + c_{11} \vec{i}_1 \vec{i}_1 + c_{22} (\vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3) + c_{44} (\vec{i}_4 \vec{i}_4 + \vec{i}_5 \vec{i}_5)$  [9].

Реализовав в плоскости, перпендикулярной оси трансверсальной изотропии, растяжение–сжатие в двух взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми интенсивностями, получим вектор деформаций  $\vec{k} = \varepsilon_2 \vec{i}_2$ . В этом случае тензор приобретенной анизотропии имеет вид, соответствующий каноническому представлению тензора свойств ортотропного материала  $c^* = c + \varepsilon_2 (c'_0 (\vec{i}_0 \vec{i}_2 + \vec{i}_2 \vec{i}_0) + c'_1 (\vec{i}_1 \vec{i}_2 + \vec{i}_2 \vec{i}_1))$ , т.е. рассматриваемый процесс деформирования приводит к изменению типа анизотропии материала.

**Вариант теории течения.** Для жесткопластического материала модель типа теории течения имеет вид

$$\bar{\sigma}_{\perp} = \lambda \cdot \dot{k}_{\perp}, \quad (15)$$

где  $\lambda = \lambda_{\alpha\beta} \bar{a}_{\alpha} \bar{a}_{\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5$ ) – тензор, связанный с пластической анизотропией и определяемый в подпространстве  $E_{\perp}$ .

Из второго закона термодинамики ( $\dot{w} > 0$  для необратимых процессов) получим условие, накладываемое на тензор пластической анизотропии:

$$\dot{k}_{\perp} \cdot \lambda \cdot \dot{k}_{\perp} = \frac{dw}{ds_{\perp}} > 0,$$

т.е. тензор  $\lambda$  образует положительно определенную форму, а матрица его компонент удовлетворяет критерию Сильвестра.

Обратим соотношение (15)  $\dot{k}_{\perp} = \lambda^{-1} \cdot \bar{\sigma}_{\perp} = \bar{\sigma}_{\perp} \cdot (\lambda^{-1})^T$  и, учитывая, что  $\dot{k}_{\perp} \cdot \dot{k}_{\perp} = 1$ , запишем условие пластического течения в виде

$$\bar{\sigma}_{\perp} \cdot \Lambda \cdot \bar{\sigma}_{\perp} = 1, \quad (16)$$

где  $\Lambda = (\lambda^{-1})^T \cdot \lambda^{-1}$  имеет разложение по базису подпространства  $E_{\perp}$ :

$$\Lambda = \Lambda_{\alpha\beta} \bar{a}_{\alpha} \bar{a}_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (17)$$

В соотношении (16) используем определение составляющей вектора напряжений  $\bar{\sigma}_{\perp} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0$ :

$$\bar{\sigma} \cdot \Lambda \cdot \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0 \cdot \Lambda \cdot \bar{\sigma} - \bar{\sigma} \cdot \Lambda \cdot \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_0 \cdot \Lambda \cdot \bar{\sigma}_0 = 1,$$

причем  $\bar{\sigma}_0 \cdot \Lambda = \Lambda \cdot \bar{\sigma}_0 = 0$ , так как вектор  $\bar{\sigma}_0$  ортогонален подпространству  $E_{\perp}$ , в котором определен тензор  $\Lambda$  (17). Тогда условие (16) сводится к условию пластичности Мизеса–Хилла [1]:

$$\bar{\sigma} \cdot \Lambda \cdot \bar{\sigma} = 1,$$

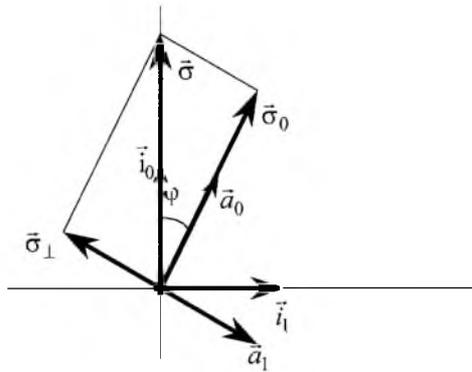
а для изотропного материала при  $\bar{a}_0 = \bar{i}_0$ ,  $\bar{\sigma}_{\perp} = \bar{\tau}$  – к условию Мизеса:

$$\bar{\tau} \cdot \Lambda_{\text{из}} \cdot \bar{\tau} = 1.$$

Условие пластичности (16) позволяет описать экспериментально наблюдаемое явление пластического течения анизотропных кристаллов под действием только гидростатического давления. При действии на кристалл гидростатического давления тензору напряжений  $S = -pI$  в пространстве Ильюшина соответствует вектор  $\bar{\sigma} = -p\bar{i}_0$ . Если кристалл обладает трансверсальной изотропией, то для него  $\bar{a}_0 = \bar{i}_0 \cos \varphi + \bar{i}_1 \sin \varphi$ ,  $\bar{a}_1 = -\bar{i}_0 \sin \varphi + \bar{i}_1 \cos \varphi$ ,

$\vec{a}_\beta = \vec{i}_\beta$ ,  $\beta = 2, 3, 4, 5$  (рисунок). Составляющие вектора напряжений равны  $\vec{\sigma}_0 = -p\vec{a}_0 \cos \varphi$ ,  $\vec{\sigma}_\perp = p\vec{a}_1 \sin \varphi$ . Пусть пластическое течение начинается при напряжении  $\sigma_s$ , которое достигается при давлении  $p = \frac{\sigma_s}{\sin \varphi}$ . Для

большинства металлов угол  $\varphi$  мал, например для магния  $\varphi \approx 2,2^\circ$ , для титана  $\varphi \approx -12,5^\circ$ , хотя для кадмия  $\varphi \approx 27,6^\circ$ , для цинка  $\varphi \approx 38,2^\circ$  (углы найдены по справочным данным [8] при нормальной температуре), поэтому рассматриваемое явление наблюдается при высоких давлениях. В изотропных материалах  $\varphi = 0^\circ$ , тогда  $p \rightarrow \infty$ , и явление пластического течения не может быть вызвано действием гидростатического давления.



Разложение напряжений по базису  $\vec{a}_\alpha$  для трансверсально-изотропного материала:  $\vec{\sigma}$  – вектор напряжений;  $\vec{\sigma}_0, \vec{\sigma}_\perp$  – составляющие вектора напряжений;  $\vec{i}_0, \vec{i}_1$  – векторы базиса пространства Ильюшина;  $\vec{a}_0, \vec{a}_1$  – направляющий вектор обратимого деформирования и его ортогональное дополнение.

Построенные модели необратимого деформирования жесткопластических материалов основаны на выделении обратимой и необратимой составляющих деформаций в произвольном анизотропном теле. Квазилинейные соотношения модели деформационного типа (14) описывают изменение типа анизотропии в процессе деформирования и, как следствие, изменение ориентации главных осей анизотропии. Для варианта теории течения сформулировано условие пластичности (16), которое позволяет описать экспериментально наблюдаемое явление пластического течения анизотропных кристаллов под действием гидростатического давления.

## Резюме

Запропоновані моделі необоротного кінцевого деформування початково-анізотропних тіл базуються на гіпотезі про параметри стану, за які приймають універсальний параметр – температуру і складову деформації, що є аналогом об'ємних деформацій в ізотропному тілі і характеризує температурні деформації вільного від напруги анизотропного тіла. Використання даної гіпотези дозволило отримати розкладання тензора деформацій на оборотну і необоротну складові. Для необоротних процесів кінцевого де-

формування зміцнених матеріалів запропоновано модель деформаційного типу, за допомогою якої можна описати зміну типу анізотропії початково-анізотропних матеріалів у процесі деформування. Для моделі типу теорії течії функція граничного стану, що записана у просторі необоротних деформацій, дозволяє відобразити факт пластичної течії анізотропних кристалів під дією тільки гідростатичного тиску, що має місце при проведенні експерименту.

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
2. Победря Б. Е. Деформационная теория пластичности анизотропных сред // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, вып. 1. – С. 29 – 37.
3. Победря Б. Е. Сложное нагружение слоистых композитов // Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 21 – 30.
4. Гольденблат И. И. К теории малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред // Докл. АН СССР. – 1955. – **101**, № 4. – С. 619 – 622.
5. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. – 310 с.
6. Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения.: Тр. Всесоюз. межвуз. сб. – Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. – С. 32 – 37.
7. Соколова М. Ю. Построение образа процесса нагружения в начально-анизотропной среде // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 1995. – **1**, вып. 2. – С. 144 – 150.
8. Новикова С. И. Тепловое расширение твердых тел. – М.: Наука, 1974. – 294 с.
9. Dafalias Y. F. Lagrangian and Eulerian description of plastic anisotropy at large strains. Case study: Orthotropy and isotropy. Plastic behavior anisotropy solids (Proc. CNRS Int. Colloq. 319. Villard-de-Lans, June 16–19 1981), Paris. – P. 357 – 374.
10. Dafalias Y. F. and Rashid M. M. The effect of plastic spin on anisotropic material behavior // Int. J. Plasticity. – 1989. – **5**. – P. 227 – 246.
11. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Анализ вращения главных осей анизотропии при конечном деформировании // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: Тр. V Междунар. симп. – Тверь, 2001. – С. 35 – 39.

Поступила 25. 01. 2001