

Визначення напруженого стану та крайових ефектів у тришаровому циліндрі

Ю. В. Коханенко, С. А. Цірук, Д. П. Латкін

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Розглянуто осесиметричну задачу про визначення зон концентрації напружень у тришаровому круговому циліндрі з ізотропними шарами. Циліндр знаходиться під дією рівномірного осьового навантаження. Наближений розв'язок задачі лінійної теорії пружності отримано методом сіток. Наведено приклад розв'язку і проаналізовано результати.

Ключові слова: тришаровий циліндр, напружений стан, крайові ефекти, метод сіток, базова схема.

Постановка задачі. Розглядається тришаровий круговий циліндр з ізотропними лінійно-пружними шарами. Зовнішній і внутрішній шари мають однакові механічні та геометричні характеристики. На циліндр діє рівномірне поверхневе навантаження $\mathbf{P}_z = \mathbf{P}_3 = (P_{31}, P_{33}) = (0, -P)$, $P > 0$, яке забезпечує осесиметричний напружено-деформований стан у тілі конструкції. Наявність геометричної та силової симетрії дозволяє задачу розглядати для верхньої половини циліндра у площині rOz . Циліндр (рис. 1) займає область $\bar{\Omega} = \sum_{q=1}^3 \bar{\Omega}^q$, $\bar{\Omega}^q = \{R_{q-1} \leq r \leq R_q \wedge 0 \leq z \leq Z\}$. Довжина циліндра Z

вибирається так, що крайові ефекти не досягають його серединної площини $z = 0$ (рис. 1). Позначимо через E^q, ν^q технічні сталі q -ї компоненти композита, $q = 1, 2, 3$. При цьому значення $q = 1$ і 3 відносяться відповідно до внутрішнього і зовнішнього шарів, $q = 2$ – до середнього шару циліндра (рис. 1). Індекс q змінюється від 1 до 3, інші індекси приймають значення 1; 3, якщо не обговорюється протилежно. Виконується загальноприйняте правило підсумовування індексів.

Крайові ефекти у тілі циліндра зумовлені різницею механічних характеристик його компонент і виникають у поверхневих контактних точках $\mathbf{x} = (R_1, Z)$ та $\mathbf{x} = (R_2, Z)$. При $z \rightarrow 0$ крайові ефекти зникають (рис. 1, б). Через $\mathbf{x} = (r, z)$ позначимо радіус-вектор точки в області $\bar{\Omega}$.

Розв'язок задачі визначення крайових ефектів складається з двох етапів [1]: розв'язок задачі лінійної теорії пружності кусково-однорідного середовища і оцінка зони концентрації напружень (зони крайових ефектів) у відповідності з вибраним критерієм.

Сформулюємо задачу теорії пружності. В області $\bar{\Omega}$ відшукуються векторні функції $\mathbf{u}^q = (u_1^q, u_3^q)$, які задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\frac{\partial(r\sigma_{11})^q}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{31}^q}{\partial z} - \sigma_{22}^q = 0; \quad (1a)$$

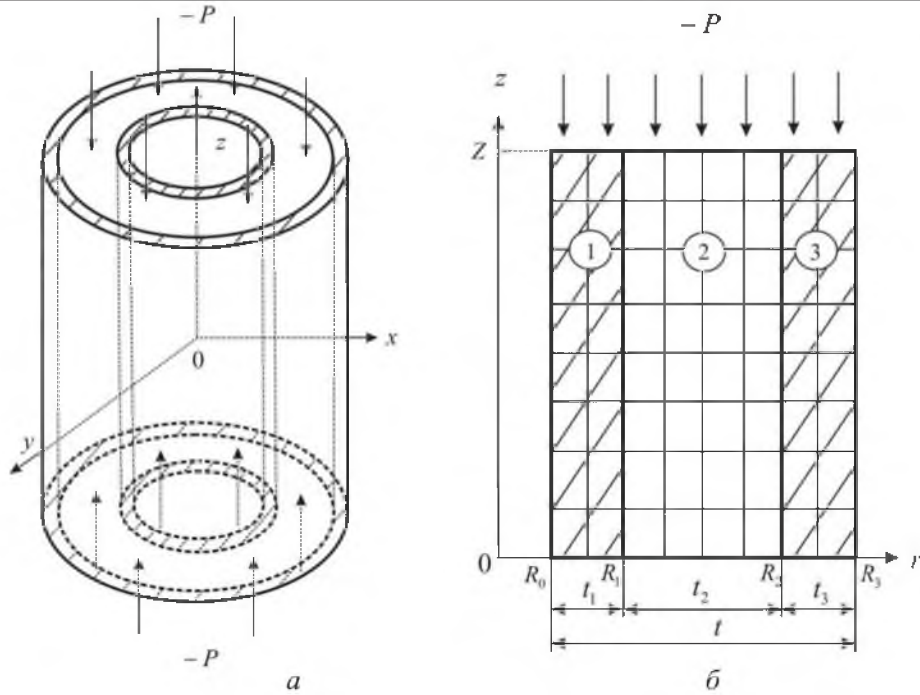


Рис. 1. Тіло циліндра (а) і його розрахункова схема (б).

$$\frac{\partial(r\sigma_{13})^q}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{33}^q}{\partial z} + \sigma_{33}^q = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^q, \quad (16)$$

граничним умовам:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^1 = 0 \wedge \sigma_{13}^1 = 0, & r = R_0 \wedge 0 \leq z \leq Z; \\ \sigma_{11}^3 = 0 \wedge \sigma_{13}^3 = 0, & r = R_3 \wedge 0 \leq z \leq Z; \\ \sigma_{31}^q = 0 \wedge \sigma_{33}^q = -P, & R_0 \leq r \leq R_3 \wedge z = Z; \\ \sigma_{31}^q = 0, & R_0 \leq r \leq R_3 \wedge z = 0, \end{cases} \quad (2)$$

умовам ідеального контакту:

$$\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{u}^j \wedge \sigma_{1i}^{j+1} = \sigma_{1i}^j; \quad r = R_j \wedge 0 \leq z \leq Z, \quad j=1, 2, \quad i=1, 3. \quad (3)$$

Закон Гука для q -ї компоненти має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^q &= A_{ik}^q \varepsilon_{kk}^q; \quad \sigma_{12}^q = 0; \quad \sigma_{23}^q = 0; \quad \sigma_{31}^q = 2G_{31}^q \varepsilon_{31}^q \quad (i, k = \overline{1, 3}); \\ \varepsilon_{11}^q &= \frac{\partial u^q}{\partial r}; \quad \varepsilon_{22}^q = \frac{u^q}{r}; \quad \varepsilon_{33}^q = \frac{\partial u^q}{\partial z}; \quad \varepsilon_{13}^q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^q}{\partial z} + \frac{\partial w^q}{\partial r} \right); \\ \varepsilon_{12}^q &= 0; \quad \varepsilon_{23}^q = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Модулі пружності A_{ij}^q визначаються через технічні сталі з виразів

$$A_{ii}^q = \frac{E^q(1-\nu^q)}{(1+\nu^q)(1-2\nu^q)}; \quad A_{12}^q = \frac{E^q\nu^q}{(1+\nu^q)(1-2\nu^q)}; \quad G^q = \frac{E^q}{2(1+\nu^q)}. \quad (5)$$

Далі розглядається питання про знаходження величин протяжності крайових ефектів. У даному випадку протяжність крайових ефектів досліджується у напрямку Oz дії поверхневої сили. Позначимо через $d_{ij}^q(Z_l)$ (далі d_{ij}^q) протяжність крайового ефекту для напруження σ_{ij}^q при фіксованому значенні $r = r_l = \text{const}$, $l = 1, 2, \dots$. У відповідності з першим критерієм [1] величина d_{ij}^q визначається з рівності (рис. 1,б)

$$d_{ij}^q = Z - Z_l, \quad (6)$$

де Z_l – точки, в яких напруження σ_{ij}^q відрізняються по модулю на ρ відсотків від усталеного напруження $P_{33}^q = -P^q$, $P^q = \text{const}^q > 0$, тобто точки, в яких виконуються рівності

$$\sigma_{33}^q = P^q(1 + 0,01\rho); \quad \sigma_{11}^q = \sigma_{22}^q = \sigma_{13}^q = P^q 0,01\rho. \quad (7)$$

Напруження P^q в (7) визначається, після розв'язку задачі (1)–(5), за формулами (4), (5).

Метод розв'язку. До наближеного розв'язку задачі (1)–(5) застосовується сітковий підхід. При цьому дискретні задачі будуються з використанням концепції базової схеми [1, 3, 4]. Сіткові рівняння розв'язуються методом Холецького та спряжених градієнтів [2]. Реалізована процедура оптимізації обчислень, яка базується на застосуванні динамічної різницевої сітки і комбінованому використанні вказаних методів розв'язку дискретних задач.

Приклад розрахунку. Розглядається тришаровий круговий циліндр товщиною $t = R_3 - R_0 = 0,8$ з наступними технічними сталими шарів: $E^1 = E^3 = 2500$, $\nu^1 = \nu^3 = 0,25$ (внутрішній і зовнішній шари); $E^2 = 280$, $\nu^2 = 0,4$ (середній шар). Геометричні характеристики шарів: $R_0 = 2$; $t_1 = R_1 - R_0 = R_3 - R_2 = 0,2$; $t_2 = R_2 - R_1 = 0,4$; $Z = 10$ (рис. 1). Модулі пружності подано в ГПа, лінійні розміри – в см, величина Z отримана за результатами обчислювального експерименту. Осьове навантаження $P = -1,0$.

У результаті розв'язку задачі (1)–(5) отримано наступні значення усталених напружень:

$$\sigma_{33}^1 = -1,79; \quad \sigma_{33}^2 = -0,22; \quad \sigma_{33}^3 = -1,77. \quad (8)$$

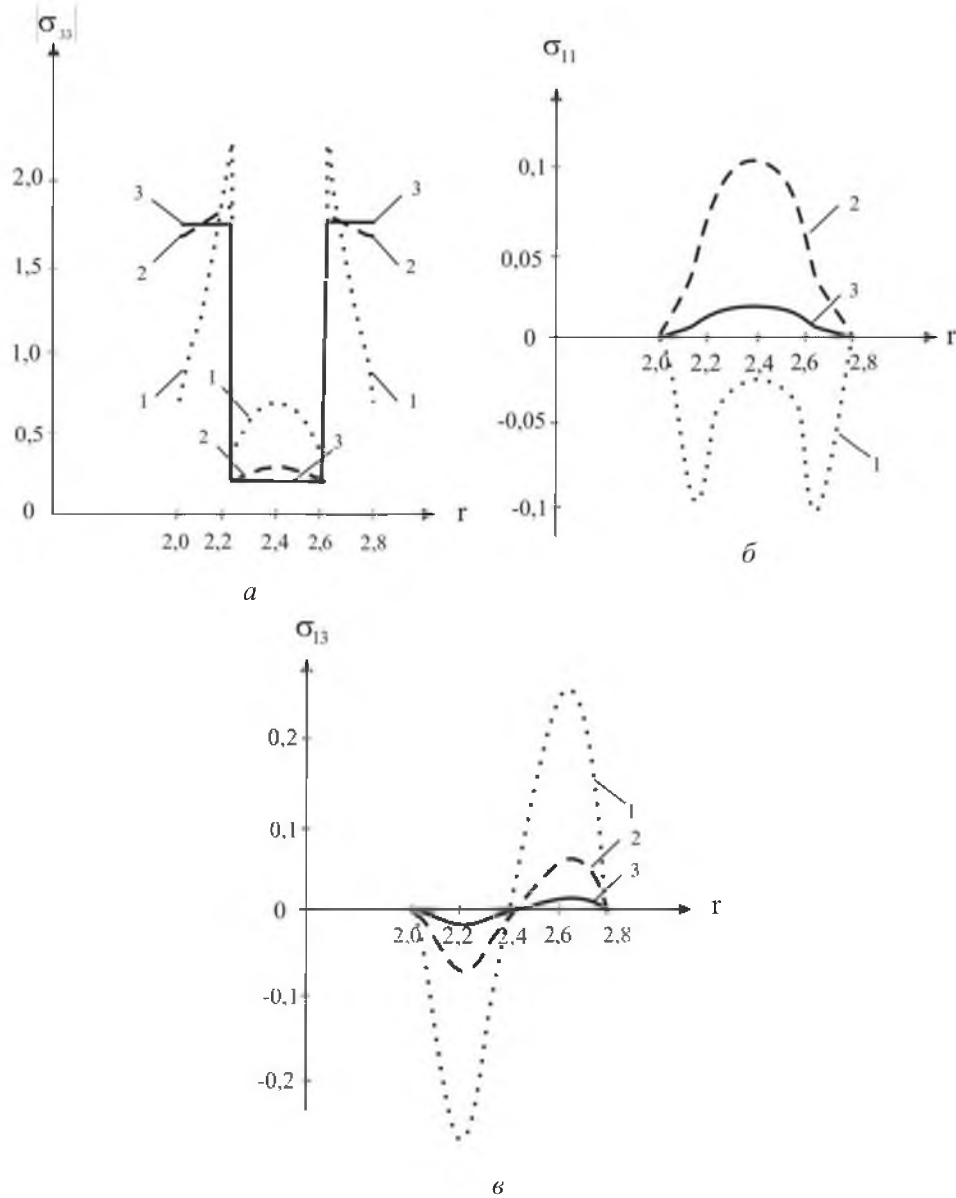


Рис. 2. Графіки напружень $\sigma_{33}(r)$ – а, $\sigma_{11}(r)$ – б і $\sigma_{13}(r)$ – в.

На рис. 2,а наведено графіки залежності напружень $\sigma_{33}(r)$ для $z \in \{Z_1, Z_2, Z_3\} \equiv \{9,8; 9,4; 1,2\}$. При цьому крива l ($l=1, 2, 3$) відповідає значенню $z = Z_l$. Для $z=1,2$ (на рис. 2,а крива 3) має місце кусково-однорідний незбурений стан, і напруження σ_{33}^q визначаються з (8). На контактних відрізках відмічається розрив напружень, при цьому величини стрибків $[\sigma_{33}] \in \{1,98; 1,69; 1,58\}$ між внутрішнім і середнім шаром та $[\sigma_{33}] \in \{1,91; 1,64; 1,56\}$ між середнім і зовнішнім відповідають значенням $z \in \{9,8; 9,4; 1,2\}$. Для $z = Z_1 \wedge z = Z_2$ (на рис. 2,а криві 1, 2) спостерігається неоднорідний (збурений) напружений стан. Максимальні значення модулів

напружень мають місце в контактних точках $r = 2,2 \wedge r = 2,6$, мінімальні – в точках $r = 2,0 \wedge r = 2,8$ внутрішньої і зовнішньої поверхонь. При цьому $\max|\sigma_{33}^q| \approx 2,30$, $\min|\sigma_{33}^q| \approx 0,69$ при $z = Z_1$ (рис. 2,а) і $\max|\sigma_{33}^q| \approx 1,870$, $\min|\sigma_{33}^q| \approx 1,64$ при $z = Z_2$. У зовнішньому і внутрішньому шарах графіки напружень σ_{33}^q представляють собою прямі лінії. У середньому шарі для $z = Z_1$ і $z = Z_2$ графіки функцій σ_{33}^q нагадують графіки парабол. Максимальні за модулем значення мають місце посередині шару ($r = 2,4$), мінімальні – в точках контакту із зовнішнім і внутрішнім шарами ($r = 2,2 \wedge r = 2,6$). При цьому екстремуми мають такі значення: $\max|\sigma_{33}^2| \approx 0,68$, $\min|\sigma_{33}^2| \approx 0,32$ при $z = Z_1$ і $\max|\sigma_{33}^2| \approx 0,28$, $\min|\sigma_{33}^2| \approx 0,17$ при $z = Z_2$.

На рис. 2,б,в наведено графіки залежності напружень $\sigma_{1i}(r)$ для $z \in \{Z_1, Z_2, Z_3\} = \{9,8; 9,4; 9,0\}$. Крива l_i відповідає значенню $z = Z_i$ ($i = 1, 2, 3$). На рис. 2,б представлено епюри напружень σ_{11} . Видно, що кривій 1 відповідає величина $\sigma_{11} \leq 0$, а кривим 2, 3 – $\sigma_{11} \geq 0$. У внутрішньому і зовнішньому шарах, тобто для $2,0 \leq r \leq 2,2 \wedge 2,6 \leq r \leq 2,8$, функція σ_{11} представляє собою відрізки прямих і змінюється від значень $\sigma_{11} = 0$ в поверхневих точках $r = 2,0 \wedge r = 2,8$ до $\sigma_{11} \approx -0,1$ в контактних точках $r = 2,2 \wedge r = 2,6$. Кривим 2, 3 відповідає додатня функція σ_{11} , яка у середині циліндра (на лінії $r = 2,4$) досягає максимальних значень $\sigma_{11}^2 \in \{0,1; 0,01\}$ для $z \in \{9,4; 9,0\}$ і нульових значень в точках $r = 2,0 \wedge r = 2,8$ внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра. Із рис. 2,б,в видно, що епюри напружень σ_{ii} симетричні відносно прямої $r = 2,4$.

Рис. 2,в ілюструє графіки функцій $\sigma_{13}(r)$ для $z = Z_l$, $l = \overline{1, 3}$. Видно, що всі епюри – антисиметричні відносно прямої $r = 2,4$, тобто $\sigma_{13}(r - 2,4) = -\sigma_{13}(2,4 - r)$. Максимальні за модулем значення мають місце в контактних точках $r = 2,2 \wedge r = 2,6$, мінімальні – в точках поверхонь $r = 2,0 \wedge r = 2,8$ і в середніх точках циліндра $r = 2,4$. При цьому на кривих 1, 2, 3 відмічаються як максимальні значення $\max \sigma_{13} \in \{2,30; 0,07; 0,01\}$ при $z \in \{9,8; 9,4; 9,0\}$.

Графіки залежності протяжності крайових ефектів d_{ij}^q у напрямку дії поверхневої сили від радіуса r наведено на рис. 3. Величини d_{ij}^q визначаються за формулами (6), (7) при $\rho = 5$. Криві 1, 2, 3 відповідають функціям d_{33}^q , d_{11}^q , d_{13}^q . Видно, що величини d_{ij}^q мають розриви на лініях контакту. При цьому у середньому шарі протяжність крайових ефектів більша, ніж у внутрішньому і зовнішньому шарах. Функція d_{33}^q у внутрішньому і зовнішньому шарах добре апроксимується прямими лініями і приймає значення $\max d_{33} \approx 1,0 \wedge \min d_{33} \approx 0,6$. У середньому шарі функція d_{33}^2 має вигляд параболи і досягає наступних екстремальних значень: $\max d_{33}^2 \approx 0,6$ у точці $r = 2,4$, $\min d_{33}^2 \approx 0,35$ у контактних точках $r = 2,2 \wedge r = 2,6$. Функція d_{11}^q (на рис. 3 крива 2), яка відповідає напруженню σ_{11}^q , у внутрішньому і зовнішньому шарах добре апроксимується кривими, що є частинами однієї пара-

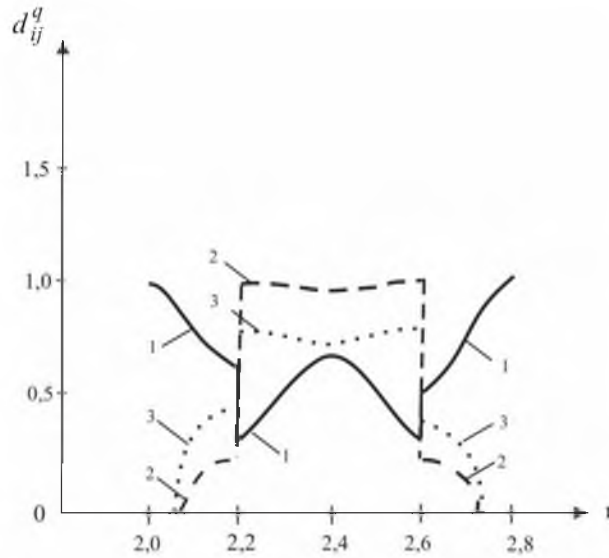


Рис. 3. Графік протяжності крайових ефектів d_{ij}^q .

боли. Екстремальні значення d_{11}^q у внутрішньому і зовнішньому шарах: $\max d_{11}^q \approx 0,25$ у контактних точках $r = 2,2 \wedge r = 2,6$, $\min d_{11}^q = 0$ у точках $r = 2,0 \wedge r = 2,8$ поверхонь циліндра. У середньому шарі $d_{11}^2 \approx \text{const} = 1,0$. Функція d_{13}^q (на рис. 3 крива 3) відповідає напруженню σ_{13}^q . Видно, що дана функція якісно поводить себе так, як і функція d_{11}^q . Максимальне значення $\max d_{13}^2 \approx \text{const} = 0,8$. Найбільшу різницю величини протяжності крайового ефекту має функція d_{11} , яка характеризує напруження σ_{11} . У цьому випадку $[d_{11}] \approx 0,8$. Мінімальне значення скачка має функція d_{33} , для якої $[d_{33}] \approx 0,25$. Для функції d_{13} величина $[d_{13}] \approx 0,3$.

Висновки

1. Розглянуто осесиметричну задачу про визначення напруженого стану і протяжності крайових ефектів у тришаровому двокомпонентному циліндрі з ізотропними лінійно-пружними шарами. Протяжність крайових ефектів визначається у напрямку Oz дії поверхневої сили. Наближений розв'язок знаходиться методом сіток.

2. Наведено приклад розрахунку реальної конструкції.

3. Отримано наступні результати для п'ятивідсоткової похибки ($\rho = 5$): величина протяжності крайових ефектів не перевищує 1,5 товщини циліндра, $d_{ij} \leq 1,5t$; максимальні значення стискових напружень досягаються в околі поверхневих контактних точок: $\max|\sigma_{11}| = 0,21$ ГПа, $\max|\sigma_{33}| = 2,3$ ГПа; $\max|\sigma_{13}| = 0,65$ ГПа; на контактних лініях для напружень σ_{33} мають місце розриви. Максимальне значення розриву дорівнює величині $|\sigma_{33}^1 - \sigma_{33}^2| = 1,45$ і досягається у точці $x = 0,98$.

Резюме

Рассмотрена осесимметричная задача определения зон концентрации напряжений в трехслойном круговом цилиндре с изотропными слоями. Цилиндр находится под действием равномерного осевого нагружения. Приближенное решение задачи теории упругости получено методом сеток. Приведен пример решения и выполнен анализ результатов.

1. *Механика композитов: В 12 т. Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 1. Статика материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 456 с.*
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.*
3. *Bystrov V. M. Analysis of the edge effects in laminated materials on the basis of a representative element // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 3. – P. 826 – 855.*
4. *Kokhanenko Yu. V. Discrete models of problems in the elastic theory of composites in circular cylindrical coordinates. Pt. 1 // Ibid. – No. 8. – P. 1067 – 1076.*

Поступила 30. 10. 2001