

Колебания круглых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Рассмотрены осесимметричные поперечные колебания круглой упругой трехслойной пластины под действием локальных и импульсных поверхностных нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Аналитические решения получены с использованием системы функций Хевисайда и дельта-функции Дирака. Проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: упругость, колебания, трехслойные пластины, локальные нагрузки.

Обозначения

- ρ_k – плотность материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$)
 $q(r, t)$ – внешняя распределенная нагрузка
 q_0 – интенсивность распределенной нагрузки
 $q_n(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям
 $w(r, t)$ – прогиб пластины
 $\psi(r, t)$ – относительный сдвиг в заполнителе
 $u(r, t)$ – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя
 G_k, K_k – модули сдвига и объемной деформации
 r_0 – радиус пластины
 v_n – фундаментальная ортонормированная система собственных функций
 d_n – нормировочный коэффициент
 $T_n(t)$ – функция времени в разложении в ряд по системе собственных функций
 J_0, J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно
 I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно
 β_n – собственные числа
 ω_n – частоты собственных колебаний
 A_n, B_n – константы интегрирования
 $H_n(x)$ – система функций Хевисайда
 $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака
 h_k – толщины слоев

Введение. Трехслойные элементы конструкций типа пластин и оболочек широко применяются в инженерной практике, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Колебания круглых трехслойных пластин, в том числе и линейно-вязкоупругих, геометрия и движение которых описываются с помощью тех или иных гипотез, исследовались в [1–4].

В данной работе рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины круглой формы, возбужденные локальными и импульсными поверхностными распределенными нагрузками.

Постановка задачи. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z . Заполнитель считаем легким, т.е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , т.е. $w(r, t)$, $\psi(r, t)$, $u(r, t)$. Далее эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона [3]:

$$\begin{cases} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0; \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = -q, \end{cases} \quad (1)$$

где $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k; \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Задача определения функций $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий

$$\dot{w}(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластины, следует из (1) при $q = 0$. Ее решение рассмотрено в [3]. В результате построена система собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n, r)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n(\beta_n, r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (3)$$

где коэффициенты d_n определяются из требования нормировки системы (3):

$$d_n^2 = \int_0^1 \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)] - \\ - \frac{J_0(\beta_n)}{\beta_n I_0(\beta_n)} [J_1(\beta_n) I_0(\beta_n) + J_0(\beta_n) I_1(\beta_n)] + \frac{J_0^2(\beta_n)}{2I_0^2(\beta_n)} [I_0^2(\beta_n) - I_1^2(\beta_n)].$$

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \\ u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad (4)$$

где

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r)) \right]; \\ b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел β_n следуют из граничных условий. При заделке или шарнирном опирании контура пластины при $r = 1$ должны выполняться такие требования:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{или} \quad u = \psi = w = M_r = 0.$$

Первые три равенства выполняются тождественно в каждом случае, а последние приводят к следующим трансцендентным уравнениям:

$$\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} = -\frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)};$$

$$\frac{J_0(\beta)}{a_7(\beta J_0(\beta) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta)} = -\frac{I_0(\beta)}{a_7(\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)) + a_8 I_1(\beta)}. \quad (5)$$

После вычисления собственных чисел частоты колебаний ω_n определяются так:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad (6)$$

где

$$a_{60} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-;$$

$$K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k; \quad a_7 = a_6 - a_2 b_1 - a_5 b_2; \quad a_8 = a_{60} + a_2 b_1 + a_5 b_2;$$

$$M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В качестве примера численно исследовано первое из уравнений (5), которое соответствует заделке контура пластины. Полученные первые 15 корней вычислены с точностью до 0,001 и приведены ниже:

Номер n	0	1	2	3	4	5	6	7
Собственное число β_n	3,196	6,306	9,439	12,577	15,716	18,856	21,997	25,138
Номер n	8	9	10	11	12	13	14	
Собственное число β_n	28,279	31,420	34,561	37,702	40,844	43,985	47,126	

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений (4) на v_n и проинтегрировав его по площади пластины. В силу ортонормированности системы собственных функций v_n получим

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r,t) v_n r dr. \quad (7)$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (4) и использования линейной связи функций v_n, φ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) имеет следующий вид:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий (2):

$$A_n = \int_0^1 f(r) v_n r dr; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 g(r) v_n r dr. \quad (10)$$

Результаты расчетов. Рассмотрим несколько примеров локального и импульсного внешнего осесимметричного силового воздействия на пластину. Для удобства аналитической записи нагрузки воспользуемся классом функций Хевисайда $H_n(x)$, в котором каждая последующая функция является интегралом от предыдущей:

$$H_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Здесь функция $H_{-1}(t)$ совпадает с известной дельта-функцией Дирака $\delta(t)$, интеграл от которой формально можно рассматривать как ступенчатую функцию Хевисайда $H_0(t)$ нулевого порядка. Функция $\delta(t)$ в нуле равна бесконечности, оставаясь нулевой на остальной числовой оси, и для нее справедливо интегральное соотношение

$$\int_a^b f(\tau) \delta(\tau - x) d\tau = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases} \quad (12)$$

Задача, как правило, сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$.

Численный расчет проводился для заземленной по контуру пластины единичного радиуса, слои которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3]. Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись по формуле (6) с использованием приведенных выше собственных чисел и геометрических параметров слоев $h_1 = h_2 = 0,01, h_3 = 2c = 0,05$. Начальные условия (2) предполагались однородными

$$w(r,0) \equiv \dot{w}(r,0) \equiv 0,$$

что в соответствии с (10) позволяет получить нулевые константы интегрирования $A_n = 0, B_n = 0$.

1. На рассматриваемую пластину действует динамическая поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кругу относительного радиуса $b \leq 1$. В таком случае ее можно представить с помощью функции Хевисайда (11) нулевого порядка:

$$q(r, t) = q_0(t)H_0(b - r). \quad (13)$$

Подставляя нагрузку (13) в формулу (7), получаем интегральное выражение для вычисления параметров $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n} \int_0^1 r H_0(b - r) \left(J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right) dr.$$

Входящие в него интегралы от произведения функций Хевисайда и Бесселя равны:

$$\int_0^1 r H_0(b - r) J_0(\beta_n r) dr = \frac{b J_1(\beta_n b)}{\beta_n}; \quad \int_0^1 r H_0(b - r) I_0(\beta_n r) dr = \frac{b I_1(\beta_n b)}{\beta_n}.$$

В результате получим

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right).$$

После этого решение задачи о вынужденных колебаниях пластины определяется соотношениями (4), а функция $T_n(t)$ – по формуле (9). Для стационарной внешней нагрузки $q_0 = \text{const}$ получаем

$$T_n(t) = \frac{q_0 b}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right) (1 - \cos(\omega_n t)). \quad (14)$$

При $b = 1$ нагрузка распределена по всей поверхности пластины.

На рис. 1 показаны прогиб пластины w и относительный сдвиг в заполнителе ψ , вычисленные в момент времени $t_0 = \pi/\omega_0 = 0,0333$ с, для максимального значения функции (14) при основной собственной частоте ω_0 . Кривые 1 соответствуют случаю распределения поверхностной нагрузки ($q_0 = 7000$ Па) по кругу радиуса $b = 0,5$, кривые 2 – при $b = 1$, т.е. когда равномерно нагружена вся поверхность внешнего несущего слоя пластины.

При расчете прогиба и сдвига по формулам (4) суммировались первые восемь членов ряда. Суммирование 100 членов изменяло результаты менее чем на 0,1%. В дальнейших числовых расчетах ограничение длины суммируемого ряда исследовалось в каждом случае отдельно. Здесь приводится лишь конечный числовой результат, в том числе и на рис. 2, который иллюстрирует влияние величины радиуса пятна поверхностной нагрузки

($q_0 = 7000$ Па) на изменение во времени максимального прогиба в центре пластины. Наблюдаем отнулевой циклический процесс, так как минимальное значение прогиба в центре пластины $w_{\min} = 0$.

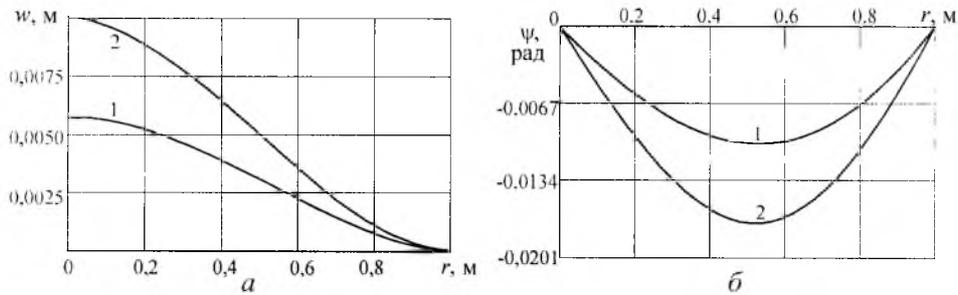


Рис. 1. Изменение прогиба (а) и сдвига (б) в заполнителе по радиусу пластины.

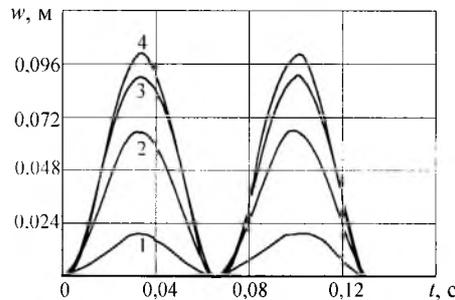


Рис. 2. Изменение максимального прогиба пластины во времени: 1 – $b = 0,25$; 2 – $b = 0,5$; 3 – $b = 0,75$; 4 – $b = 1$.

2. Рассмотрим случай внешней нагрузки, при которой в начальный момент времени ($t = 0$) на поверхность пластины, ограниченную окружностью радиуса $b \leq 1$, воздействует мгновенный равномерно распределенный импульс

$$q(r, t) = q_1 \delta(t) H_0(b - r). \quad (15)$$

Тогда

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t) b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right)$$

и

$$T_n(t) = \frac{q_1 b \sin \omega_n t}{M_0 d_n \beta_n \omega_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right), \quad (16)$$

откуда в частном случае $b = 1$ получим решение для импульсного воздействия на всю внешнюю поверхность круглой трехслойной пластины.

На рис. 3 показано изменение во времени динамического прогиба w в центре ($r = 0$) круглой трехслойной пластины при различных условиях нагружения. Внешняя нагрузка распределена по кругу радиуса $b = 0,5$. Кривая 1 рассчитывалась по формуле (17) при воздействии импульса интенсивностью

$q_1 = 700 \text{ Па} \cdot \text{с}$, кривая 2 соответствует постоянной распределенной динамической нагрузке интенсивностью $q_0 = 7000 \text{ Па}$. Здесь максимальный прогиб от импульса больше примерно в 4,7 раза.

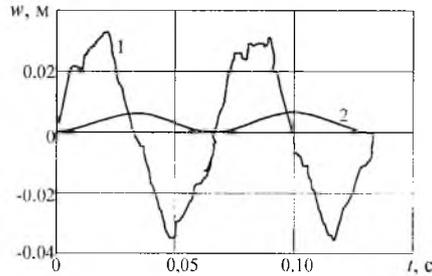


Рис. 3. Изменение прогиба пластины при импульсном (1) и постоянном (2) воздействии.

Как правило, динамическое силовое воздействие считают импульсным, если оно продолжалось не более четверти периода собственных колебаний, т.е. в нашем случае $t_1 \leq \pi/(2\omega_0) = 0,016 \text{ с}$. Чтобы достичь величины импульса q_1 за время t_1 , интенсивность распределенной нагрузки должна быть не менее $q'_0 = q_1/t_1 = 437500 \text{ Па}$, т.е. в 62,5 раза больше q_0 . Прогиб при аналогичной нагрузке будет во столько же раз больше, чем при q_0 . Следовательно, приложенная постоянно поверхностная динамическая нагрузка приводит к образованию в пластине перемещений, которые примерно в 13,3 раза больше, чем при ее импульсном воздействии.

3. На исследуемую круглую трехслойную пластину действует динамическая поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу, относительный радиус которого изменяется в пределах $a \leq r \leq b$. Тогда внешнюю нагрузку можно записать как разность двух нагрузок (13):

$$q(r, t) = q_0(t)(H_0(b - r) - H_0(r - a)).$$

Решение задачи получаем в виде разности двух решений (14). Коэффициенты разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций будут

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n \beta_n} \left(bJ_1(\beta_n b) - aJ_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (bI_1(\beta_n b) - aI_1(\beta_n a)) \right),$$

после чего для стационарной внешней нагрузки $q_0 = \text{const}$ получим

$$T_n(t) = \frac{q_0(1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \times \left(bJ_1(\beta_n b) - aJ_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (bI_1(\beta_n b) - aI_1(\beta_n a)) \right). \quad (17)$$

При $a = 0$ из (17) следует решение (14).

На рис. 4 показано изменение формы и величины прогиба пластины по мере продвижения кольцевого пятна нагрузки к контуру. Толщина кольца принята $R = b - a = 0,25$, интенсивность нагрузки $q_0 = 7000$ Па, момент времени $t = \pi / \omega_0$ соответствует максимальному значению функции (17) при основной собственной частоте ω_0 . Наименьший прогиб возникает при нагрузке с минимальной равнодействующей. В случае если нагрузка сосредоточена у контура пластины, то прогиб в ее центре несколько больше, при этом существенно изменяется его форма.

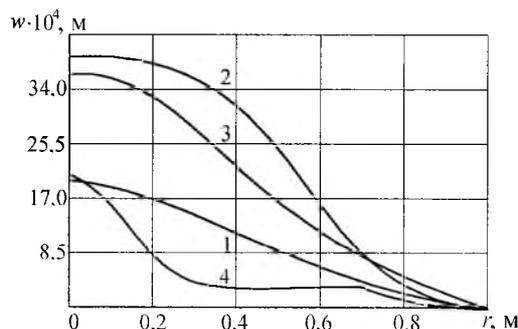


Рис. 4. Прогиб пластины при распределении нагрузки по кольцу: 1 – $a = 0$; 2 – $a = 0,25$; 3 – $a = 0,5$; 4 – $a = 0,75$.

4. Мгновенный равномерно распределенный импульс поверхностной нагрузки воздействует на кольцевую поверхность пластинки, определяемую относительным радиусом $a \leq r \leq b$. Соответствующую интенсивность нагрузки можно записать в виде разности двух нагрузок (15):

$$q(r, t) = q_1 \delta(t) (H_0(b - r) - H_0(r - a)),$$

откуда

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t)}{M_0 d_n \beta_n} \left(b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right),$$

после чего получим следующую искомую функцию времени

$$T_n(t) = \frac{q_1 \sin \omega_n t}{M_0 d_n \beta_n \omega_n} \left(b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right). \quad (18)$$

В частном случае при $a = 0$ из (18) следует решение (17).

На рис. 5 показано изменение величины прогиба пластины в зависимости от продвижения кольцевого пятна импульсной нагрузки к контуру. Толщина пятна принята $R = b - a = 0,25$, интенсивность нагрузки $q_1 = 700$ Па · с, момент времени $t = \pi / \omega_0$ соответствует максимальному значению функции (18) при основной собственной частоте ω_0 . При сохраняющейся толщине кольца нагрузки наименьший прогиб в центре пластины

наблюдается при импульсе, примыкающем к ее контуру. По мере приближения пятна к центру величина максимального прогиба сначала увеличивается, достигая экстремума примерно при $a = 0,34$, затем идет на спад.

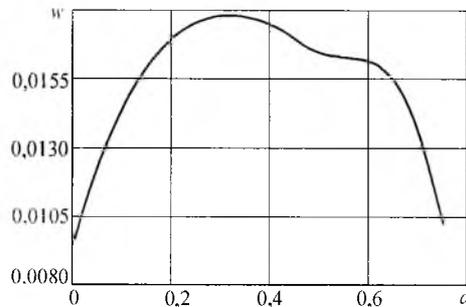


Рис. 5. Зависимость максимального прогиба пластины от места приложения импульсной кольцевой нагрузки.

Заключение. Рассмотрена методика исследования вынужденных колебаний круглых трехслойных пластин, находящихся под действием локальных поверхностных осесимметричных нагрузок, включая импульсные. Получены аналитические и численные решения ряда начально-краевых задач для пластин с легким заполнителем

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Резюме

Розглянуто вісесиметричні поперечні коливання круглої пружної тришарової пластини під дією локального й імпульсного поверхневого навантаження. Для опису кінематики несиметричного по товщині пакета прийнято гіпотези ломаної нормалі. Заповнювач – легкий. Аналітичний розв’язок отримано з використанням системи функцій Хевісайда і дельта-функції Дірака. Проведено числовий аналіз отриманих розв’язків.

1. *Mirsa S. and Singh A. V.* Axisymmetric vibration of circular sandwich plates // *AIAA Journal*. – 1974. – **12**, No. 10. – P. 1418 – 1420.
2. *Григолюк Э. И., Кассихин В. Н.* Малые поперечные колебания слоистых круговых пластин // *Пробл. прочности*. – 1982. – № 10. – С. 65 – 68.
3. *Старовойтов Э. И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: Бел. госуниверситет транспорта, 2001. – 344 с.
4. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки // *Пробл. прочности*. – 2001. – № 3. – С. 100 – 107.

Поступила 04. 09. 2001