

УДК 532.526

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ ВИХРЕВЫМ КОЛЬЦОМ ЗА СФЕРОЙ В НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. ГУРЖИЙ*, В. В. МЕЛЕШКО**

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,

** Национальный университет им.Т.Г.Шевченко, Киев

Получено 19.07.2006

Рассматривается осесимметричное взаимодействие тонкого одиночного вихревого кольца со сферой в набегающем потоке идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что вихревое кольцо (модель Дайсона, 1893) имеет стационарный режим в течении жидкости за сферой, который является условно устойчивым. Однако существует область параметров вихревого кольца, для которой стационарное взаимодействие вихревого кольца со сферической поверхностью отсутствует. Анализ задачи адвекции пассивной жидкости в поле скорости одиночного вихревого кольца в течении за сферой поверхности показывает, что при различных режимах движения (стационарное, периодическое взаимодействие) процесс перемешивания не протекает при интенсивных режимах. В большинстве случаев пассивная жидкость обтекает сферическую поверхность совместно с близлежащей к вихрю областью жидкости, которая совершает вращательное движение вокруг вихревого ядра в поперечном сечении кольца. Форма этой области (атмосферы вихря) существенно зависит от относительной толщины ядра вихревого кольца. Исследования показывают, что объем атмосферы вихревого кольца зависит главным образом от расстояния между вихревым кольцом и твердой поверхностью.

Розглядається осесимметрична взаємодія тонкого поодинокого вихревого кільця зі сферою в потоці ідеальної нестисливої рідини, що набігає. Показано, що вихреве кільце (модель Дайсона, 1893) має стаціонарний режим у течії рідини за сферою, який є умовно стійким. Однак існує область параметрів вихревого кільця, для якої стаціонарна взаємодія вихревого кільця зі сферичною поверхнею відсутня. Аналіз задачі адвекції пасивної рідини в полі швидкості поодинокого вихревого кільця в плинні за сферою поверхні показує, що при різних режимах руху (стаціонарна, періодична взаємодія) процес перемішування не протікає при інтенсивних режимах. У більшості випадків пасивна рідина обтікає сферичну поверхню разом із прилеглою до вихору областю рідини, що здійснює обертальний рух навколо вихревого ядра в поперечному перерізі кільця. Форма цієї області (атмосфери вихря) істотно залежить від відносної товщини ядра вихревого кільця. Дослідження показують, що об'єм атмосфери вихревого кільця залежить головним чином від відстані між вихровим кільцем і твердою поверхнею.

An axisymmetrical interaction of a single thin vortex ring with a sphere in oncoming flow of an ideal incompressible fluid is considered. It is shown, that a vortex ring (Dyson's model, 1893) has a stationary mode of motion in the fluid flow behind the sphere, which is conditionally steady. However, there is a region of parameters of the vortex ring for which the stationary interaction of the vortex ring with a spherical surface is absent. The analysis of an advection problem of a passive fluid in a velocity field of a single vortex ring in the flow behind a spherical surface shows that a mixing process does not proceed at intensive regimes at various modes of vortex movement (stationary, periodic interactions). For most cases the passive fluid flows around the spherical surface with a fluid region positioned nearby to the vortex, which rotates around a vortex core in a cross section of the ring. The shape of this region (a vortex atmosphere) essentially depends on relative thickness of the vortex ring core. Researches show that the volume of the vortex ring atmosphere depends mainly on a distance between the vortex ring and a solid surface.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в современной литературе появилось много исследований, посвященных сравнительному анализу особенностей движения плоских и осесимметричных когерентных вихревых структур [1, 2]. Повышенный интерес к этой тематике можно объяснить стремлением многих исследователей к более глубокому осознанию природы различных гидродинамических явлений на основе более общих законов и закономерностей, обусловленных внутренними процессами в сплошной среде.

С этих позиций сравнительный анализ процесса перемешивания жидкости вихревой парой в на-

бегающем на круговую область потоке идеальной жидкости и осесимметричным вихревым кольцом, взаимодействующим со сферической поверхностью во внешнем встречном течении, представляет определенный научный и практический интерес. Недавние исследования [3] показывают, что параллельная пара вихревых нитей (вихревая пара на плоскости) может стационарно взаимодействовать с круговым цилиндром при поперечном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью. Характерным является то, что стационарный режим движения имеет место при произвольной скорости набегающего потока и расстояниях от вихрей до твердой поверхности.

Исследования [4-6] показывают, что при определенных условиях локализованные вихревые струк-

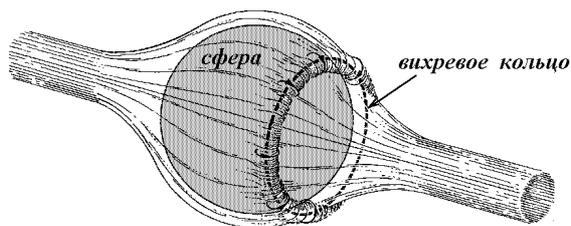


Рис. 1. Схема образования кольцевого вихря в течения за сферой



Рис. 2. Обтекание шара при $Re=110$, [9]

туры могут приводить к интенсификации режимов перемешивания пассивной жидкости. В современной литературе [2, 4] это явление часто называют *хаотическим перемешиванием*. В целом задача о перемешивании жидкостей представляет собой сложную научную проблему [7, 8], она затрагивает явление, в котором наиболее важными оказываются диффузионный и конвективный механизмы перемешивания. Однако, в некоторых частных случаях, на определенных геометрических и временных масштабах, диффузионными эффектами можно пренебречь и задача о перемешивании жидкости сводится к анализу смещения границ выделенной области пассивной жидкости в рассматриваемом поле скорости. Часто эту задачу механики сплошной среды называют *задачей адвекции*.

Известно [9–11], что в течения за сферой, обтекаемой невозмущенным потоком жидкости, формируются осесимметричные вихревые структуры (рис. 1). Такая локализованная вихревая структура является осесимметричной и при определенных условиях обладает стабильностью при взаимодействии со сферической поверхностью. Поле скорости, наведенное вихревым кольцом, приводит во вращательное движение часть близлежащей к нему жидкости, формируя так называемое *вихревое облако* (или атмосферу вихря), которая не покидает вихрь с течением времени. Наблюдения показывают, что чаще всего вихри образуются в тыловой части сферической поверхности по отношению к набегающему потоку.

Экспериментальные исследования демонстрируют, что при осесимметричном обтекании сферической поверхности при малых и умеренных числах Рейнольдса в течения за сферой возникает устойчивая осесимметричная вихревая структура (рис. 2). При малых числах Рейнольдса вихри могут достаточно устойчиво следовать за сфериче-

ской поверхностью. При умеренных числах Рейнольдса вихри периодически отрываются от поверхности, образуя характерную вихревую решетку. Очевидно, что движение вихревого кольца за сферой может быть как стационарным, так и периодическим по замкнутым траекториям, сформированным около положения равновесия. Некоторые подробности движения вихрей около сферической поверхности можно найти, например, в [10, 12].

При каких условиях и параметрах течения возникают осесимметричные вихревые структуры за сферической поверхностью в набегающем потоке невозмущенной жидкости, существуют ли ограничения на условия стационарного движения локализованных вихрей, является ли это взаимодействие устойчивым к внешним воздействиям, каковы особенности и сценарий протекания процесса перемешивания пассивной жидкости в поле скорости вихревого кольца в течения за сферой – вот перечень вопросов, которые до настоящего времени изучены недостаточно полно, несмотря на существующий обширный библиографический материал (см. [1, 10–12] и ссылки в них). Понять, насколько влияет на процесс перемешивания присутствие вихревого кольца в близлежащем к сферической поверхности течения в приближении идеальной несжимаемой жидкости, представляет основную цель настоящей работы.

В первом разделе статьи приводятся выражения для компонент поля скорости, наведенного системой осесимметричных вихревых колец, взаимодействующих со сферической поверхностью в набегающем невозмущенном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Во втором разделе получены выражения, связывающие параметры вихревого кольца со скоростью набегающего потока для стационарного взаимодействия одиночного вихревого кольца со сферой, проводится ана-

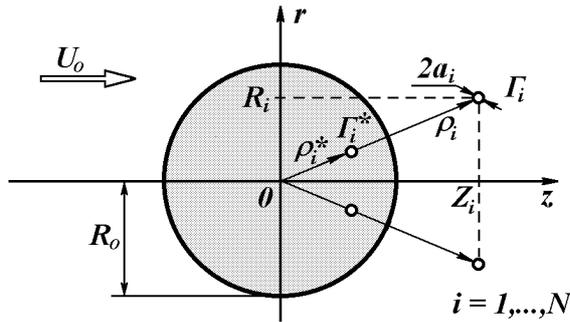


Рис. 3. Геометрия задачи

лиз устойчивости этого решения к малым возмущениям. Исследование особенностей процесса перемешивания пассивной жидкости в рассматриваемом течении представлен в третьем разделе статьи. Последний раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕЙ

Рассмотрим осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости около сферической поверхности радиуса R_0 (рис. 3). Пусть в поле скорости набегающего течения со скоростью U_0 на бесконечности имеется система N тонких осесимметричных вихревых колец интенсивности Γ_i ($i = 1, \dots, N$), радиуса R_i с осевым положением Z_i в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . Каждое вихревое кольцо в плоскости $\phi = \text{const}$ имеет круговое поперечное сечение радиуса a_i (вихревое ядро), малое по сравнению с радиусом кольца, $n_i = a_i/R_i \ll 1$. Полагаем, что течение жидкости всюду является потенциальным за исключением поперечного сечения вихревого кольца, в котором поле скорости вихревое.

Функцию тока $\Psi(r, z)$ в поперечном сечении рассматриваемого течения можно представить в виде суперпозиции функции тока $\Psi_i^{(1)}$, наведенной i -м тонким вихревым кольцом при взаимодействии со сферической поверхностью в спокойной на бесконечности жидкости, и функции тока $\Psi^{(2)}$ течения идеальной жидкости при потенциальном обтекании сферы:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(1)} + \Psi^{(2)}. \quad (1)$$

Полагаем, что вихревое кольцо в процессе своего движения остается тонким. Другими словами, размер вихревого ядра в процессе движения

остается намного меньшим по сравнению с радиусом кольца, или с расстоянием между вихревыми кольцами, или с расстоянием между кольцом и твердой поверхностью. В этом случае можно предположить, что с течением времени поперечное сечение вихревого кольца остается в первом приближении круговым. Если начальное распределение завихренности вихревого кольца подчиняется распределению

$$\omega/r = \text{const}, \quad (2)$$

то можно показать [12–14], что вихревое кольцо в процессе взаимодействия будет обладать неизменным распределением поля завихренности (2) с учетом постоянства объема вихревого кольца¹.

Приведенные выше допущения соответствуют так называемой Дайсоновской модели тонкого осесимметричного вихревого кольца [13]. При этом функция тока, наведенная таким кольцом во внешнем потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости, для безграничного течения может быть представлена выражением

$$\begin{aligned} \Psi_i^{(1)}(r, z) &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \sqrt{R_i r} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k^2} \mathbf{E}(k) \right], \quad (3) \\ k^2 &= \frac{4R_i r}{(R_i + r)^2 + (Z_i - z)^2}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Распределение функции тока внутри вихревого ядра определяется после решения уравнения Пуассона для завихренности для тороидальной области в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_i^{(1)}}{\partial z^2} = -\omega r. \quad (4)$$

Используя в дальнейшем связь между функцией тока и компонентами поля скорости, можно получить выражения для радиальной и осевой скоростей поля течения, наведенного системой осесимметричных вихревых колец в точке с координатами (r, z) :

$$U_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad U_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (5)$$

¹Приведенное распределение завихренности точно удовлетворяет уравнению переноса завихренности (уравнения Гельмгольца для завихренности) в тороидальной области, записанного для цилиндрической системы координат. Из уравнения непосредственно следует, что полная производная $D(\omega/r)/Dt = 0$. Отсюда получаем решение (2).

Для определения уравнения движения системы осесимметричных вихревых колец необходимо проинтегрировать уравнение (4) по полю завихренности, занятому вихревым кольцом. Подробности интегрирования и проведения процедуры сращения решений для потенциального и вихревого течений можно найти в [12, 13]. В результате процесс движения системы осесимметричных вихревых колец в безграничной жидкости сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dR_i}{dt} &= -\frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \\ \frac{dZ_i}{dt} &= \frac{\Gamma_i}{4\pi} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \\ a_i^2 R_i &= \text{const} \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{4\pi} \sqrt{R_i R_j} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{k_{ij}^2} - 1 \right) \mathbf{K}(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}^2} \mathbf{E}(k_{ij}) \right], \\ k_{ij}^2 &= \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}. \end{aligned}$$

Здесь штрих под знаком суммы означает исключение из суммирования сингулярного слагаемого $i = j$. Первое уравнение в системе (6) определяет радиальную скорость осесимметричного кольца, которая состоит только из наведенных компонент скорости со стороны других вихревых колец на рассматриваемое i -ое вихревое кольцо. Второе уравнение описывает закон изменения осевой скорости кольца. Эта составляющая скорости состоит из самоиндуцированной скорости (первое слагаемое) и наведенной скорости (второе слагаемое) со стороны остальных колец. Последнее уравнение в системе (6) определяет постоянство объема каждого вихревого кольца. Заметим, что одиночное вихревое кольцо имеет только самоиндуцированную осевую компоненту скорости, которая зависит от относительной толщины вихревого ядра. Другими словами, одиночное вихревое кольцо в безграничном пространстве движется с постоянной осевой скоростью.

Если в рассматриваемое течение вносится твердая сферическая поверхность, то на ее границе должно выполняться условие непротекания жидкости, которое можно сформулировать либо в терминах функции тока, либо в терминах нормальной

к поверхности компоненты скорости. Эти условия в полярной системе координат (ρ, Θ) , связанной с центром сферической поверхности и с осью $\Theta = 0$, совпадающей с осью oz (рис. 3), имеют вид

$$\Psi(R_0, \Theta) = \text{const}, \quad U_\rho(R_0, \Theta) = 0. \quad (7)$$

Эти условия можно выполнить, если ввести для каждого действительного вихревого кольца дополнительное мнимое вихревое кольцо, находящееся внутри сферической поверхности [10, 12]. Параметры действительных и мнимых вихревых колец должны быть связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \Gamma_i \sqrt{\rho_i} &= \Gamma_i^* \sqrt{\rho_i^*}, \\ \rho_i \rho_i^* &= R_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее параметры мнимых вихревых колец будем отмечать звездочкой.

Таким образом, уравнения, описывающие осесимметричное взаимодействие системы тонких коаксиальных вихревых колец со сферической поверхностью в идеальной несжимаемой жидкости, спокойной на бесконечности, представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6) с функцией U , имеющей более сложную структуру:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{4\pi} \sqrt{R_i R_j} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{k_{ij}^2} - 1 \right) \mathbf{K}(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}^2} \mathbf{E}(k_{ij}) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j^*}{4\pi} \sqrt{R_i R_j^*} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{(k_{ij}^*)^2} - 1 \right) \mathbf{K}(k_{ij}^*) - \frac{2}{(k_{ij}^*)^2} \mathbf{E}(k_{ij}^*) \right], \\ (k_{ij}^*)^2 &= \frac{4R_i R_j^*}{(R_i + R_j^*)^2 + (Z_i - Z_j^*)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (6) необходимо дополнить начальными условиями

$$R_i(0) = R_i^0, \quad Z_i(0) = Z_i^0, \quad n_i(0) = a_i^0 / R_i^0. \quad (10)$$

Функция тока течения при безциркуляционном обтекании сферической поверхности в набегающем потоке идеальной несжимаемой жидкости имеет вид [10]:

$$\Psi^{(2)}(r, z) = -\frac{U_0 r^2}{2} \left[1 - \frac{R_0^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right], \quad (11)$$

где U_0 – скорость жидкости на бесконечном удалении от сферы.

В этом случае радиальную и осевую компоненты скорости можно представить в виде

$$U_r = -\frac{3U_0 R_0^3 r z}{2(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (12)$$

$$U_z = U_0 \left[1 - \frac{R_0^3 (2z^2 - r^2)}{2(r^2 + z^2)^{5/2}} \right]. \quad (13)$$

Выражение для функции тока (3), приведенной одиночным вихревым кольцом в безграничном пространстве, позволяет найти форму вихревого облака, т. е. той части близлежащей жидкости, которая сопровождает стационарное поступательное движение вихревого кольца. Для этого на одиночное вихревое кольцо накладывається встречное течение с постоянной скоростью, равной самоиндуцированной скорости кольца и определяется область замкнутых линий функции тока:

$$\Psi(r, z) = \Psi_i^{(1)} - \frac{\Gamma r^2}{8\pi R} \left(\ln \frac{8a}{R} - \frac{1}{4} \right) \quad (14)$$

Рис. 4 иллюстрирует зависимость формы вихревого облака от относительной толщины вихревого кольца $n = a/R$ для $\Gamma = 1.0$ и $R = 1.0$. Видно, что для толстых вихревых колец форма облака представляет собой эллипсоид, сплюснутый в направлении движения. По мере уменьшения относительной толщины n вихревого кольца форма облака постепенно превращается в торообразную область, охватывающую вихревое ядро. Предельный случай, при котором атмосфера вихревого кольца еще касается оси симметрии, соответствует значению $n = 8 \exp(-2\pi + 1/4) \approx 0.0116$. Для сравнения, вихревое облако, соответствующее вихревому кольцу с $n = 0.01$, на рисунке заштриховано.

2. СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

Рассмотрим случай взаимодействия одиночного осесимметричного вихревого кольца со сферической поверхностью в набегающем невозмущенном потоке идеальной жидкости. Одним из интересных с теоретической и практической точек зрения является вопрос о существовании стационарного взаимодействия вихря с твердой поверхностью и вопрос об устойчивости такого движения.

Пусть сферическая поверхность радиуса R_0 обтекается невозмущенным потоком жидкости со

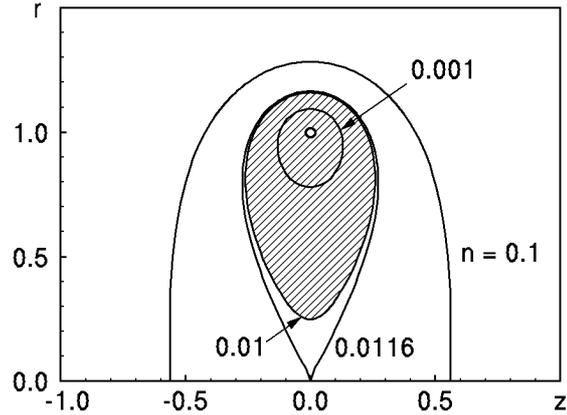


Рис. 4. Поперечное сечением атмосферы вихревого кольца для разных относительных толщин $n = a/R$ вихревого ядра

скоростью U_0 на бесконечности. За сферой поместим осесимметричное вихревое кольцо интенсивности Γ , радиуса R с осевым положением Z и относительным радиусом поперечного сечения $n = a/R$. В принятых ранее обозначениях компоненты радиальной и осевой скоростей вихревого кольца имеют вид

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\Gamma^*(Z^* - Z)}{2\pi R R_{max}} \left[F(k) - \frac{2R_0^2}{R_{min}^2} E(k) \right] - \frac{3U_0 R_0^3 R Z}{2(R^2 + Z^2)^{5/2}}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = & \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8}{n} - \frac{1}{4} \right) + \\ & + \frac{\Gamma^*}{2\pi R_{max}} \left[F(k) + \frac{2R^*(R^* - R)}{R_{min}^2} E(k) \right] + \\ & + U_0 \left[1 - \frac{R_0^3 (2Z^2 - R^2)}{2(R^2 + Z^2)^{5/2}} \right], \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$R^* = \frac{R_0^2 R}{R^2 + Z^2}, \quad Z^* = \frac{R_0^2 Z}{R^2 + Z^2},$$

$$\Gamma^* = -\Gamma \sqrt{\frac{R}{R^*}}, \quad k^2 = \frac{4RR^*}{R_{max}^2},$$

$$R_{max}^2 = (R + R^*)^2 + (Z - Z^*)^2,$$

$$R_{min}^2 = (R - R^*)^2 + (Z - Z^*)^2,$$

$$F(k) = K(k) - E(k).$$

В дальнейшем все геометрические параметры

задачи удобно пронормировать на радиус сферической поверхности R_0 , а скорости отнести к величине скорости набегающего потока U_0 . Интенсивность вихря и время будут далее пронормированы на $R_0 U_0$ и R_0/U_0 соответственно. Таким образом, в анализе результатов, представленных ниже, принимаем $R_0 = 1.0$ и $U_0 = 1.0$.

Система нелинейных уравнений (15, 16) решалась численно методом Ньютона-Рафсона [15, 16] для различных начальных приближений в достаточно широком диапазоне радиусов R и осевых положений Z вихревого кольца. Результаты вычислений для различных относительных толщин вихревого кольца показаны на рис. 5. Все кривые стационарного положения начинаются из кормовой точки на поверхности сферы. С увеличением радиуса вихревого кольца и при неизменной относительной толщине вихревого ядра стационарное осевое положение вихря смещается вдоль по потоку. Эта характерная особенность отчетливо проявляется для вихревых колец с относительной толщиной поперечного сечения $n > 0.1$. Для тонких вихревых ядер с радиусами колец, соизмеримых с радиусом сферической поверхности, кривая стационарных положений проходит в непосредственной близости к твердой поверхности. Интересно заметить, что для тонких вихревых колец, $n < 0.02$, стационарное положение существует только в непосредственной близости к сферической поверхности. Кривая для $n = 0.01$ показана на рис. 5 стрелкой.

Зависимость безразмерной интенсивности вихревых колец в стационарных положениях от радиуса вихря в набегающем на сферу осесимметричном потоке идеальной жидкости показана на рис. 6 для начальных параметров, рассмотренных ранее. Видно, что с увеличением радиуса вихревого кольца его интенсивность (по модулю) в стационарном положении увеличивается. Причем чем толще вихревое ядро кольца, тем кольцо является более интенсивным в стационарном положении при прочих равных условиях. Интересно отметить, что для тонких вихревых колец решение существует только для радиусов колец, соизмеримых с радиусом сферической поверхности. Область параметров вихревого кольца, в которой стационарное движение отсутствует, на рисунке заштрихована и обозначена буквой А.

Если в пространственное положение вихревого кольца с координатами (R, Z) внести малые возмущения (ξ, η) по соответствующим координатам, то уравнения, описывающие развитие этих возмуще-

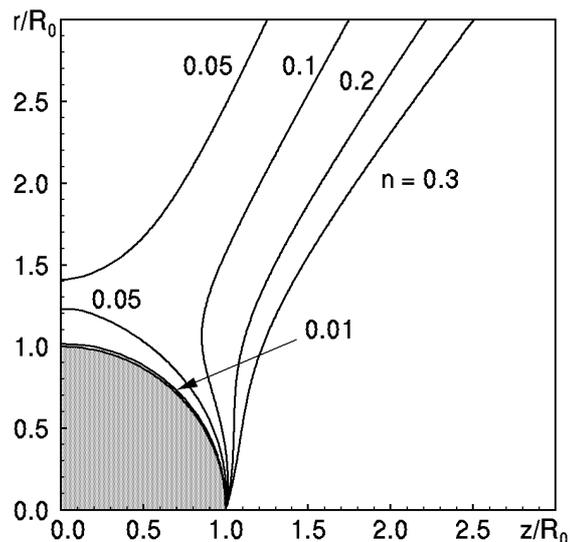


Рис. 5. Пространственное положение стационарных вихревых колец в течении за сферической поверхностью

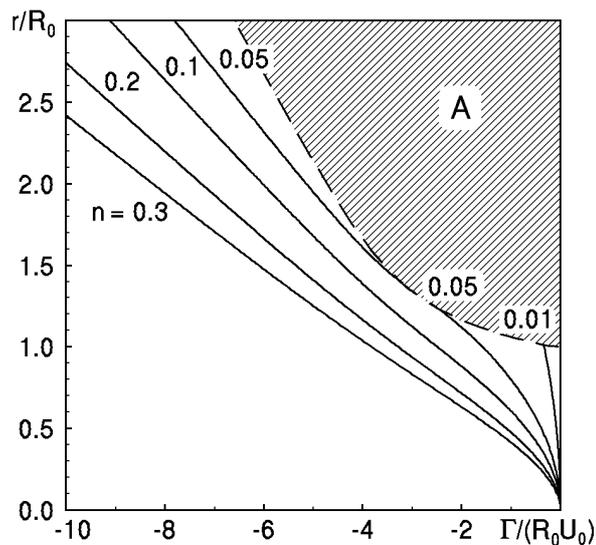


Рис. 6. Зависимость интенсивности вихревых колец от радиуса в стационарных положениях

ний во времени, можно представить в виде [11]

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A\xi + B\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= C\xi + D\eta, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$A = \frac{\partial \dot{R}}{\partial R}, \quad B = \frac{\partial \dot{R}}{\partial Z},$$

$$C = \frac{\partial \dot{Z}}{\partial R}, \quad D = \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z}.$$

В приведенных выражениях точка над переменной означает дифференцирование по времени.

Анализ устойчивости движения вихревого кольца сводится к определению корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

которое решается для значений (R, Z) , соответствующих стационарному движению вихревого кольца. Корни квадратного уравнения показаны на рис. 7.

Анализ результатов показывает, что для любого стационарного положения вихревого кольца корни характеристического уравнения являются комплексно сопряженными с нулевой действительной частью. Следовательно, стационарно двигающееся вихревое кольцо в течении за сферой в набегающем потоке идеальной жидкости находится в условно устойчивом положении (эллиптические точки равновесия). Другими словами, любые малые смещения относительно стационарного положения приведут к образованию замкнутых траекторий относительно положения этой точки. Заметим, что с увеличением радиуса вихревых колец абсолютные значения корней характеристического уравнения уменьшаются. Следовательно, можно сделать вывод о том, что большие вихревые кольца в течении за сферой являются менее устойчивыми по сравнению с кольцами меньшего радиуса.

3. АДВЕКЦИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Наличие осевой симметрии задачи позволяет упростить анализ процессов перемешивания пассивной примеси при взаимодействии вихревого кольца со сферической поверхностью. Выделим в начальный момент времени некоторый объем пассивной жидкости и рассмотрим его деформацию с течением времени. В поперечном сечении $\phi = \text{const}$ этот объем представляет собой замкнутую кривую. В дальнейшем ее пространственное положение удобно задавать параметрически: $f(l)$, где l – длина контура в поперечном сечении от не-

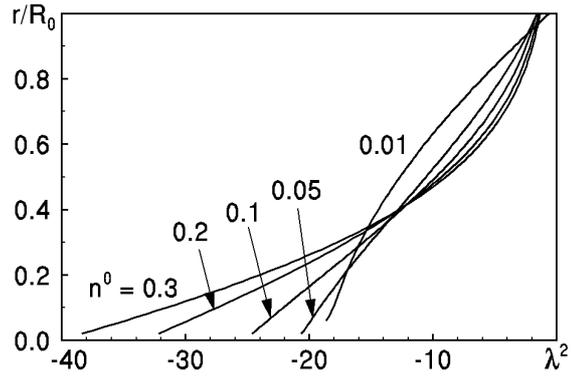


Рис. 7. Зависимость корней характеристического уравнения при анализе устойчивости движения вихревого кольца за сферой

которой, произвольно выбранной начальной точки. В процессе перемешивания площадь поверхности выделенной области меняется. Ее изменение во времени, как один из параметров процесса перемешивания, можно определить интегрированием [17]:

$$S(t) = 2\pi \int_0^L f(l) r dl, \quad (19)$$

где r – расстояние до оси симметрии до текущей точки поверхности; L – длина образующей поверхности в поперечном сечении. Другими словами, анализ изменения площади поверхности выделенной области пассивной примеси сводится к изучению изменения длины контура в поперечном сечении. Пространственное положение контура можно представить в виде системы бесконечно тонких вихревых колец с нулевой интенсивностью (системы пассивных маркеров) [12]. Каждый маркер движется по собственной траектории. Последовательное соединение маркеров позволяет сформировать пространственное положение поверхности выделенной области для текущего момента времени.

Понятно, что контур, формирующий образующую рассматриваемого объема пассивной примеси, будет претерпевать определенное растяжение в поле скорости вихревых колец, взаимодействующих с твердой поверхностью в набегающем потоке идеальной несжимаемой жидкости. Применение метода кусочной сплайн-интерполяции [18] позволяет на каждом шаге интегрирования задачи осуществлять добавление маркеров так, чтобы рас-

стояние между ними оставалось в пределах порядка некоторой заданной величины Δ с учетом возможного образования изломов поверхности. Подробности метода кусочной сплайн-интерполяции контуров в двухмерном поле скорости можно найти в [18].

Уравнения, описывающие движение пассивных маркеров в поле скорости N вихревых колец со сферической поверхностью в набегающем потоке идеальной несжимаемой жидкости, следуют непосредственно из выражения (15):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = & \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(Z_i - z)}{2\pi r R_{max}} \left[\mathbf{F}(k) - \frac{2rR_i}{R_{min}^2} \mathbf{E}(k) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i^*(Z_i^* - z)}{2\pi r R_{max}^*} \left[\mathbf{F}(k^*) - \frac{2rR_i^*}{(R_{min}^*)^2} \mathbf{E}(k^*) \right] - \\ & - \frac{3U_0 R_0^3 r z}{2(r^2 + z^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i^*}{2\pi R_{max}} \left[\mathbf{F}(k) + \frac{2R_i(R_i - r)}{R_{min}^2} \mathbf{E}(k) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i^*}{2\pi R_{max}^*} \left[\mathbf{F}(k^*) + \frac{2R_i^*(R_i^* - r)}{(R_{min}^*)^2} \mathbf{E}(k^*) \right] + \\ & + U_0 \left[1 - \frac{R_0^3(2z^2 - r^2)}{2(r^2 + z^2)^{5/2}} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} R_i^* &= \frac{R_0^2 R_i}{R_i^2 + Z_i^2}, & Z_i^* &= \frac{R_0^2 Z_i}{R_i^2 + Z_i^2}, \\ \Gamma_i^* &= -\Gamma_i \sqrt{\frac{R_i}{R_i^*}}, & k^2 &= \frac{4rR_i}{R_{max}^2}, \\ (k^*)^2 &= \frac{4rR_i^*}{(R_{max}^*)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{max}^2 &= (r + R_i)^2 + (z - Z_i)^2, \\ R_{min}^2 &= (r - R_i)^2 + (z - Z_i)^2, \\ (R_{max}^*)^2 &= (r + R_i^*)^2 + (z - Z_i^*)^2, \\ (R_{min}^*)^2 &= (r - R_i^*)^2 + (z - Z_i^*)^2. \end{aligned}$$

Анализ процесса перемешивания пассивной примеси начнем со случая потенциального обтекания сферической поверхности при отсутствии вихревых колец. Выделим в начальный момент времени сферическую область $r_0 = 1.0$ пассивной (подкрашенной) жидкости с центром, расположенным в точке $z_0 = -4.0$. Пусть скорость

набегающего течения $U_0 = 1.0$. Начальное положение выделенной области течения и сферической поверхности показаны на рис. 8. С течением времени подкрашенная жидкость приближается к сферической поверхности, причем точки, лежащие на оси симметрии, асимптотически приближаются к носовой части поверхности. В момент времени $t = 4.0$ (рис. 8, б) выделенная область охватывает левую часть сферы и начинает постепенное обтекание твердой поверхности. Затем большая часть выделенной жидкости покидает сферическую поверхность, в то время как меньшая ее часть остается в области, близлежащей к поверхности сферы. Характерный момент, соответствующий моменту $t = 6.0$, показан на рис. 8, в.

Финальная стадия процесса перемешивания, показанная на рис. 8, г ($t = 9.0$), характеризуется образованием конической поверхности (диффузорного типа) – типичная структура при перемешивании жидкостей в осесимметричных течениях. В целом можно отметить существенное растяжение исходной поверхности выделенной области пассивной жидкости, однако ее поверхность при этом имеет вполне регулярную структуру.

Как только в течении у поверхности сферы появляется стационарно взаимодействующее с ней вихревое кольцо, структура течения претерпевает определенные изменения, которые можно проследить на распределении функции тока, показанной на рис. 9 для $R = 1.0$, $Z = 0.8576$, $\Gamma = -2.4889$ и $U_0 = 1.0$ в принятых ранее обозначениях. Видно, что в этом случае непрерывное обтекание жидкости вдоль поверхности сферы нарушается, пассивная жидкость, находящаяся в непосредственной близости к поверхности, должна обогнуть еще и атмосферу вихревого кольца, двигаясь вдоль линии тока.

Указанные выше особенности можно проследить на примере, показанном на рис. 10. Исходная выделенная область пассивной жидкости радиуса $R_0 = 1.0$ с центром в точке $Z_0 = -4.0$ помещена в потенциальное течение со скоростью $U_0 = 1.0$ на бесконечности. Как и ранее, в начале координат расположена твердая сферическая поверхность радиуса $R_0 = 1.0$, рядом с которой помещено стационарное вихревое кольцо с параметрами, соответствующими рис. 9.

Видно, что начальная стадия адвекции жидкой области практически не отличается от случая потенциального обтекания сферической поверхности при отсутствии вихревого кольца (рис. 8, б) и (рис. 10, б). Начиная с момента времени $t = 4.0$ (рис. 10, б) наступают указанные выше отличия. Близлежащая к твердой поверхности окра-

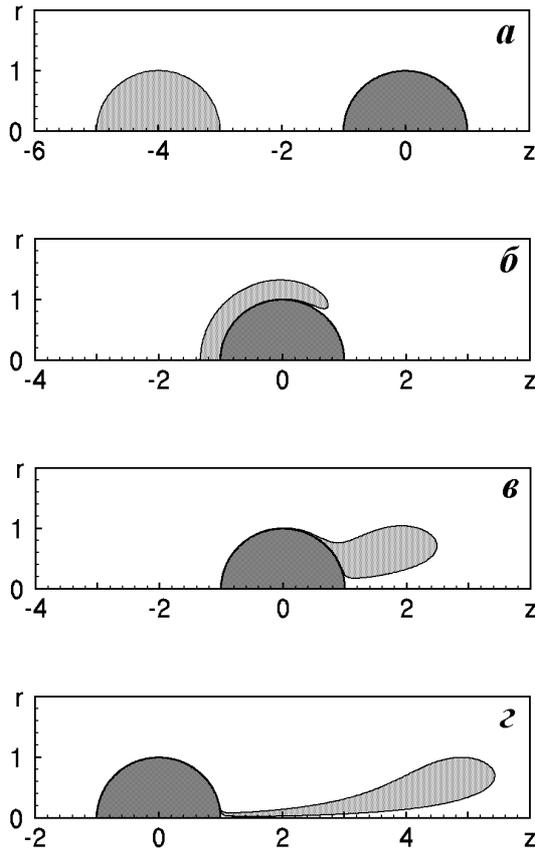


Рис. 8. Адвекция пассивной жидкой области при потенциальном обтекании сферической поверхности. Положение выделенной жидкости показано для моментов: $a - t = 0.0$, $б - t = 4.0$, $в - t = 6.0$ и $г - t = 9.0$

пленная жидкость отделяется от сферы и обтекает атмосферу вихревого кольца, форма которой хорошо прослеживается на рис. 9. Адвекция жидкости для момента времени $t = 6.0$ показана на рис. 10, в. Финальная стадия перемешивания пассивной жидкости, связанная с образованием конической поверхности, практически не отличается от случая, рассмотренного ранее.

Исследования показывают, что размер и форма вихревого облака существенным образом зависит от скорости движения вихревого кольца над твердой поверхностью. Динамику изменения вихревого облака можно проследить на примере взаимодействия со сферой одиночного вихревого кольца.

Пусть одиночное вихревое кольцо радиуса $R = 1.0$ и интенсивности $\Gamma = -1.0$ с осевым положением $Z = -4.0$ и с относительной толщиной поперечного сечения $n = 0.1$ находится в идеаль-

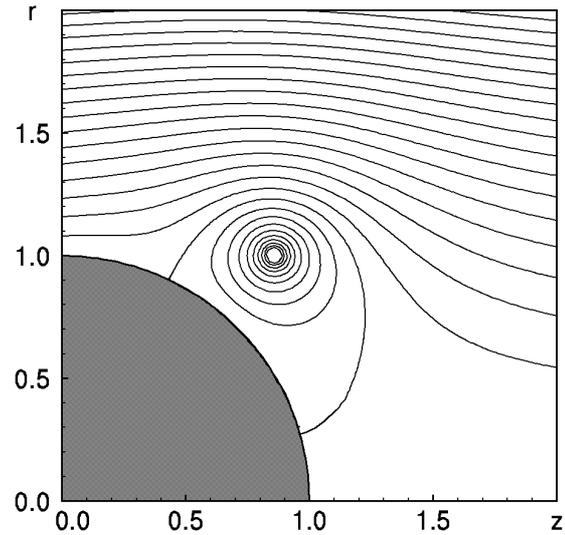


Рис. 9. Распределение функции тока $\Psi(r, z)$ для стационарного взаимодействия вихревого кольца со сферой при осесимметричном обтекании идеальной жидкостью

ной несжимаемой жидкости, спокойной на бесконечности, $U_0 = 0.0$. В начальный момент времени (рис. 11, а) выделим объем пассивной жидкости, форма которого совпадает с атмосферой вихревого кольца в соответствии с рис. 4.

Вихревое кольцо, приближаясь к сферической поверхности, уменьшает свою осевую скорость. Это приводит в незначительному увеличению объема близлежащей жидкости, которая сопровождает вихревое кольцо. На рис. 11, б, который соответствует моменту времени $t = 10.0$, вихревое кольцо достигает поверхности сферы и подкрашенная жидкость обтекает твердую поверхность. Однако наведенное вихрем поле скорости начинает вовлекать в вихревую атмосферу часть жидкости из внешнего течения. Этот характерный момент показан на рис. 11, в ($t = 15.0$). В дальнейшем вихревое кольцо снова выходит на стационарный режим движения, форма вихревого облака уменьшается и стабилизируется. В результате часть жидкости из вихревой атмосферы покидает вихревое кольцо, образуя след за удаляющимся вихревым кольцом.

Приведенные примеры показывают, что размешивание жидкости при стационарном или разовом взаимодействии вихревого кольца со сферической поверхностью не относится к интенсивному. Недавние исследования [3] показывают, что этот результат является характерным при ста-

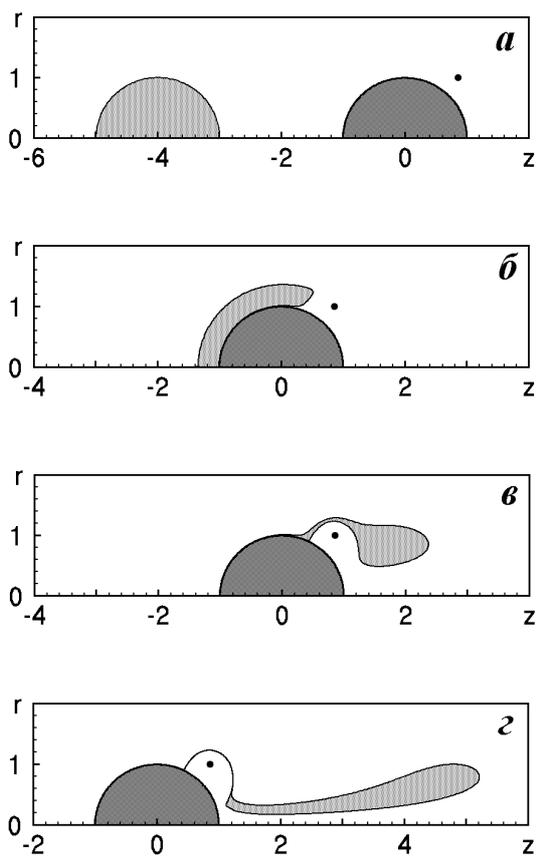


Рис. 10. Адвекция пассивного контура при стационарном взаимодействии вихревого кольца в течении за сферой для моментов: $a - t = 0.0$, $б - t = 4.0$, $в - t = 6.0$ и $г - t = 9.0$

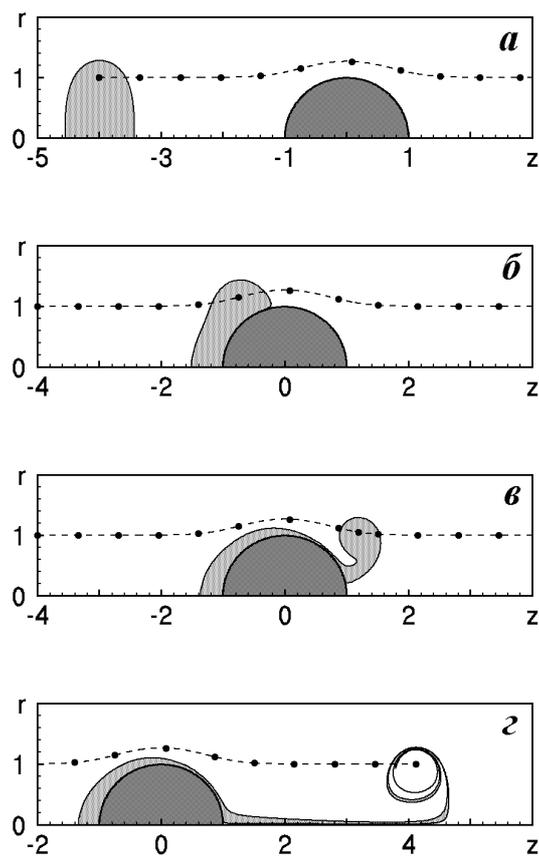


Рис. 11. Адвекция пассивного контура при взаимодействии вихревого кольца со сферой в спокойной жидкости

ционарном взаимодействии вихревых структур с твердыми поверхностями. Картина перемешивания существенно изменяется при наступлении нестационарного (или периодического) взаимодействия вихревой пары. Насколько следуют этой тенденции вихревые кольца, показывает пример, приведенный на рис. 12.

Рассмотрим осесимметричное вихревое кольцо интенсивности $\Gamma = -2.889$, радиусом $R = 1.0$, относительным радиусом поперечного сечения $n = 0.1$ и осевым положением $Z = 1.0$ во встречном течении идеальной жидкости со скоростью $U_0 = 1.0$. Вихрь находится рядом со стационарной точкой взаимодействия кольца со сферической поверхностью. Форма вихревого облака в стационарном режиме для $n = 0.1$ представлена на рис. 4. В нашем случае вихревое кольцо движется по периодической траектории, изображенной штриховой линией на рис. 12, с периодом $T \approx 17.34$. При этом

кольцо периодически удаляется и приближается к поверхности, следовательно, размер вихревого облака также претерпевает периодические изменения. По мере удаления вихревого кольца от твердой поверхности размер вихревого облака увеличивается, в то же время, по мере его приближения к сфере, количество вовлекаемой в атмосферу жидкости уменьшается.

Выделим в начальный момент времени область пассивной жидкости в виде сферы радиуса $R = 1.0$ с центром в точке $Z = -4.0$, как показано на рис. 12, а. С течением времени выделенная область под действием внешнего течения приближается к твердой поверхности. Начальная стадия процесса перемешивания практически не отличается от случаев, рассмотренных ранее. Характерный момент, соответствующий $t = 5.0$, показан на рис. 12, б. В этот момент вихрь движется навстречу внешнему течению. Наведенное вихрем поле скорости вызывает изменение в траекториях жидких ча-

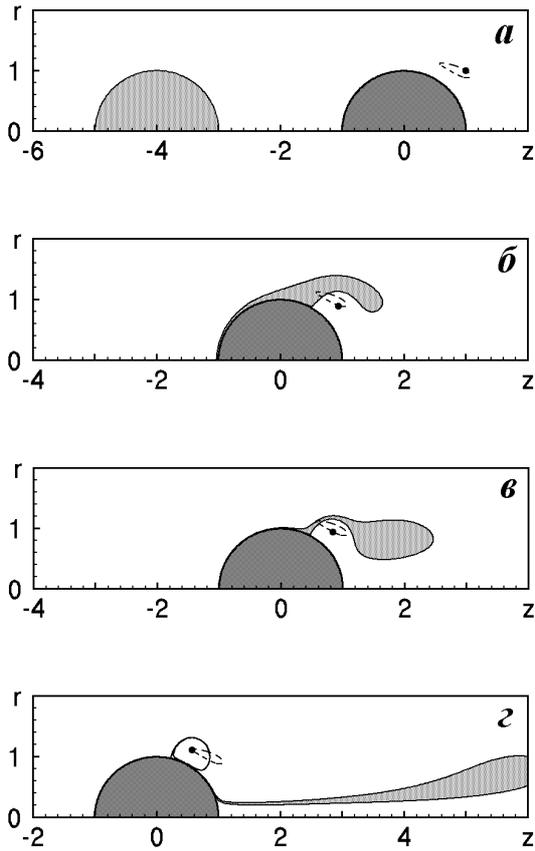


Рис. 12. Адвекция пассивного контура при нестационарном взаимодействии вихревого кольца в течении за сферой

стиц. Большая часть выделенной жидкости обтекает сферическую поверхность и вихревое кольцо. При этом расстояние между вихревым кольцом и выделенной жидкостью составляет величину порядка размера вихревого облака (рис. 12, в). Вихрь движется нестационарно, поэтому часть жидкости захватывается вихревым кольцом. Однако доля этой жидкости оказывается незначительной по сравнению с той, которая с течением времени уносится в набегающем потоке. Характерный момент представлен на рис. 12, г, который соответствует $t = 10.0$.

Анализ различных случаев взаимодействия вихревого кольца со сферической поверхностью показывает, что режимы процесса перемешивания пассивной жидкости в поле скорости одиночного вихревого кольца в большинстве случаев являются регулярными. Эти режимы адвекции сопровождаются линейным во времени увеличением площади поверхности выделенных объемов пассивной

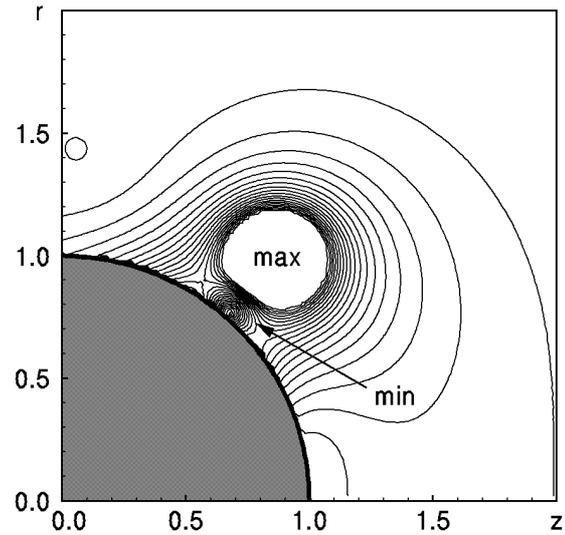


Рис. 13. Карта локальных растяжений поверхности пассивной жидкости (контур в поперечном сечении) в поле скорости вихревого кольца в течении за сферой

жидкости. Степень растяжения каждого элемента поверхности в заданном поле скорости можно оценить по картам $p(r, z)$ локальных растяжений [18], которые показывают степень относительного растяжения части контура, попавшего в область течения с координатами (r, z) для текущего момента времени t :

$$\eta(r, z, t) = \frac{L(t + \tau)}{L(t)} = \exp(p(r, z, t)\tau). \quad (22)$$

На рис. 13 изображена карта локальных растяжений $p(r, z)$ пассивного контура в поле скорости вихревого кольца, находящегося в стационарном положении. Вихревое кольцо подвергает интенсивному растяжению только те поверхности, которые находятся рядом с вихревым ядром. В этой области наведенное поле скорости со стороны вихревого кольца намного больше скорости внешнего течения. Поэтому проникнуть в эту область течения пассивной жидкости оказывается достаточно сложно.

ВЫВОДЫ

Анализ задачи об осесимметричном взаимодействии одиночного вихревого кольца со сферой в набегающем невозмущенном потоке идеальной несжимаемой жидкости показал, что вихревые кольца с относительной толщиной вихревого ядра

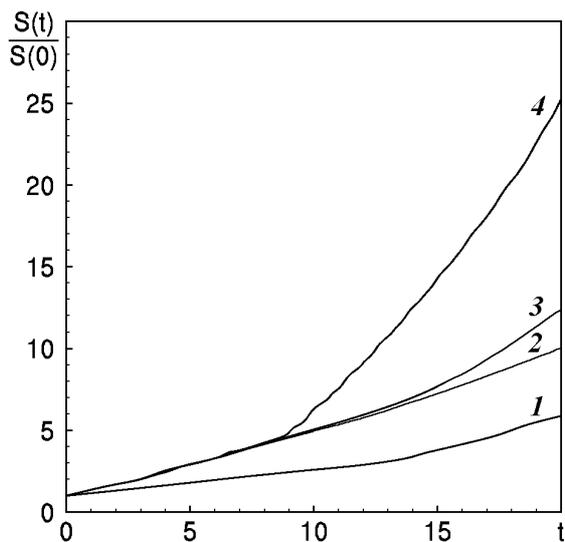


Рис. 14. Изменение площади поверхности пассивной области при различном взаимодействии вихревого кольца со сферой

$n = R/a > 0.05$ имеют стационарный режим движения для произвольных значений радиуса кольца и скорости внешнего течения. Для тонких вихревых колец $n < 0.05$ стационарное взаимодействие возможно не для всех значений радиусов вихревого кольца. Уменьшение радиуса поперечного сечения вихревого ядра приводит к уменьшению максимального значения радиуса кольца, при котором еще возможно стационарное взаимодействие кольца со сферической поверхностью во встречном потоке идеальной жидкости. Таким образом, стационарное положение для вихревого кольца в течении около сферы существует не для всех вихревых колец, в отличие от аналогичной задачи о взаимодействии вихревой пары с круговой областью [3], в которой стационарный режим имеет место для произвольной дистанции между вихрями в паре и скорости встречного невозмущенного течения.

Исследования показывают, что стационарное взаимодействие вихревого кольца в течении около сферической поверхности является условно устойчивым. Это значит, что любые малые возмущения, вносимые в пространственное положение вихря, приведут к периодическому движению вихревого кольца относительно положения динамического равновесия. Аналогичными свойствами обладает вихревая пара, находящаяся в течении около круговой области.

Анализ процесса перемешивания пассивной жидкости в поле скорости вихревого кольца показал, что имеют место существенные отличия в процессе деформации выделенной области пассивной жидкости по сравнению с плоским случаем перемешивания вихревой парой около круговой твердой поверхности. В настоящих исследованиях не обнаружено интенсивных режимов перемешивания пассивной жидкости в поле скорости вихревого кольца. На рис. 14 показана динамика относительного изменения площади поверхности выделенных пассивных областей жидкости при различном взаимодействии одиночного вихревого кольца со сферической поверхностью. Цифрой 1 отмечена эта зависимость для случая взаимодействия вихревого кольца при отсутствии встречного течения, цифрой 2 показан случай адвекции пассивной жидкости во внешнем течении при отсутствии вихря, цифра 3 соответствует случаю стационарного взаимодействия вихревого кольца со сферической поверхностью. Наконец, цифрой 4 отмечена зависимость относительного изменения площади выделенной поверхности для периодического движения одиночного вихревого кольца в набегающей на сферическую поверхность идеальной жидкости. Характерным для всех случаев оказывается то, что площадь поверхности выделенной области пассивной жидкости изменяется линейно с течением времени. Следовательно, все рассматриваемые режимы адвекции пассивной жидкости являются регулярными [4, 8] в отличие от плоского случая, в котором периодическое движение вихревой пары приводит к значительной интенсификации процесса перемешивания.

Авторы выражают признательность prof. G.J.F. van Heijst (Нидерланды) и prof. H.Aref (США) за полезные обсуждения и советы во время написания статьи. Настоящие исследования выполнены в рамках проекта INTAS #04-80-7297.

1. XXI-st International Congress of theoretical and applied mechanics / Ed. by W.Gutkowski and T.A.Kowalewski // August 15-21, 2004, Warsaw, Poland.– Warszawa: IPPT PAN, 2004.– 446 с.
2. Tubes, sheets and singularities in fluid dynamics / Proc. of the NATO ARW, Ed. by K.Bajer and H.K.Moffatt // September 2-7, 2001, Zakopane, Poland.– London: Kluwer Acad. Publ, 2002.– 384 с.
3. Гуржий А.А. Перемешивание жидкости в поле скорости двух точечных вихрей за бесконечным цилиндром в сдвиге течения идеальной жидкости // Прикладная гидромеханика.– 2005.– N.1.– С. 3–16.
4. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1990.– 333.– P. 273–288.

5. Meleshko V.V., Konstantinov M.Yu., Gurzhi A.A., Konovalyuk T.P. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices // *Phys. Fluids*.– 1992.– **A4**.– P. 2779–2797.
6. Гуржий А.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Режимы хаотического перемешивания жидкости в круге парой точечных вихрей // Под ред. Борисова А.В. и др. в кн. “Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей” // Москва, Ижевск.– АНО ИКИ.– 2002.– С. 441–467.
7. Краснопольская Т.С., Мелешко В.В. Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования // *Прикладная гидромеханика*.– 2004.– 4.– С. 45–58.
8. Ottino J.M. *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport*.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 683 p.
9. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.– М.: Мир, 1982.– 114 с.
10. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
11. Lamb H. *Hydrodynamics*.– Cambridge: Cambridge University Press, 6th ed, 1967.– 677 p.
12. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наукова думка, 1993.– 283 p.
13. Dyson F.W. The potential of an anchor ring // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*.– 1893.– **184**.– P. 43–95.
14. Hicks W.M. On the mutual threading of vortex rings // *Proc. Roy. Soc. London*.– 1922.– **A102**.– P. 111–131.
15. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
16. Özisik V.N. *Finite difference methods in heat transference*.– New York: CRC Press, 1994.– 412 p.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– Л.-М.: Наука, 1968.– 720 p.
18. Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кусковой сплайн - інтерполяції в задачі про адекватію пасивної домішки у відомому полі швидкості // *Доп. НАН України*.– 1996.– N.8.– С. 54–62.