

УДК 531/534:57

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЛЬСОВЫХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ ЗА ПОРОГОВЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ТРАНСМУРАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

И. Т. СЕЛЕЗОВ\*, Д. В. ЛУКОМСКИЙ\*\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины,

\*\*Национальный медицинский университет им. Богомольца, Киев

Получено 23.04.2008

Исследуется устойчивость кровеносного сосуда при распространении пульсовых волн на основе уравнений потенциального движения жидкости и уравнений Кирхгофа-Лява движения цилиндрической оболочки с учетом геометрической нелинейности. Рассматриваются статическое состояние, обусловленное трансмуральным давлением, и возмущенное движение относительно этого состояния. На этой основе выведено и анализируется дисперсионное уравнение. Установлена область распространения волн с отрицательной групповой скоростью и показана возможность нового неустойчивого состояния.

Досліджується стійкість кровеносної судини при розповсюдженні пульсових хвиль на основі рівнянь потенціального руху рідини і рівнянь Кірхгофа-Лява руху циліндричної оболонки з урахуванням геометричної нелінійності. Розглядаються статичний стан, обумовлений трансмуральним тиском, і збурений рух відносно цього стану. На цій основі виведено і аналізується дисперсійне рівняння. Встановлена область розповсюдження хвиль з від'ємною груповою швидкістю і показана можливість нестійкого стану.

The stability of blood vessel is investigated under the pulse wave propagation on the basis of the equations of potential fluid motion and on the Kirchhoff-Love equations of cylindrical shell motion with taking into account the geometrical nonlinearity. The static state due to a transmural pressure and the disturbed motion with respect to this state are considered. It is discovered a region of wave propagation with a negative group velocity and it is shown the possibility of unstable state.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения волн в жидкости, находящейся в тонкой упругой цилиндрической оболочке, давно было предметом многочисленных исследований в связи с обширными приложениями в различных областях [3, 11, 12]. Это относится также и к гемодинамике в связи с физиологическим аспектом задачи о распространении пульсовых волн давления в кровеносных сосудах [2, 4, 10, 20, 21]. Вопросам устойчивости кровеносных сосудов посвящены работы [13 – 17]. В данном сообщении рассматривается система, состоящая из упругой цилиндрической оболочки, заполненной невязкой несжимаемой жидкостью и находящейся под действием постоянного давления, которое называется трансмуральным в кровеносном сосуде. Рассмотрение проводится на основе уравнений движения оболочки при конечных прогибах (геометрически нелинейная теория Кармана) и уравнений движения невязкой несжимаемой жидкости в оболочке в цилиндрической системе координат. Система линеаризуется относительно статического равновесного состояния. На этой основе установлена область распространения волн с отрицательной групповой скоростью и показана

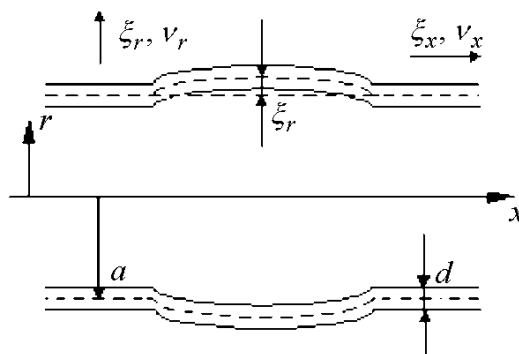


Рис. 1. Упругая изотропная цилиндрическая оболочка, заполненная жидкостью

возможность нового неустойчивого состояния.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается упругая изотропная цилиндрическая оболочка, заполненная идеальной несжимаемой жидкостью (рис. 1), что позволяет ввести потенциал скоростей  $\varphi$  по формуле  $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ , где  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $\vec{\nabla}$  – оператор градиента. Предполагается, что связь напряжения с дефор-

мацией в оболочке описывается линейным законом Гука, но учитывается геометрическая нелинейность деформации, так что радиальное перемещение (прогиб)  $\xi_r$  может превышать толщину стенки  $d$ . Движение оболочки в этом случае описывается уравнениями Кирхгофа-Лява с учетом геометрической нелинейности по Карману. Движения жидкости и оболочки полагаем осесимметричными относительно оси  $x$ .

Математическая постановка соответствующей задачи гидроупругости в цилиндрической системе координат  $r, \theta, x$  представляется уравнением Лапласа для потенциала скоростей  $\varphi(r, x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad r < 1, \quad (1)$$

и уравнениями теории гибких оболочек для продольного и радиального перемещений  $\xi_x(x, t)$  и  $\xi_r(x, t)$  [1, 6]:

$$\frac{1}{c_{||}^2} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{a} \frac{\partial \xi_r}{\partial x} + F_{NL1} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_{||}^2} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \frac{\xi_r}{a^2} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \\ & + \frac{d^2}{12} \frac{\partial^4 \xi_r}{\partial x^4} + F_{NL1} = \frac{1 - \sigma^2}{E} P |_{r=a}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $c_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho_m(1 - \sigma^2)}}$  – скорость продольных волн [9],

$$F_{NL1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right)^2,$$

$$F_{NL2} = \frac{\sigma}{2a} \left[ \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi_r^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right),$$

$\sigma$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга материала оболочки;  $\rho_m$  – плотность материала оболочки;  $d$  – толщина;  $a$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $\xi_r$  и  $\xi_x$  – радиальное и продольное перемещения оболочки от положения равновесия (рис. 1);  $P$  – давление жидкости на стенку оболочки в радиальном направлении, которое определяется формулой [5, 8]

$$\begin{aligned} P = P_0 - \frac{\rho_f u_0^2}{2} - \rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\rho_f}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] \quad \text{при } r = a. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_f$  – плотность жидкости;  $u_0$  – скорость течения.

Кинематическое условие на стенке оболочки записывается в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \xi_r}{\partial t} + \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \quad \text{при } r = a. \quad (5)$$

В дальнейшем вводятся безразмерные величины (звездочки опускаются)

$$\xi_x = a \xi_x^*, \quad \xi_r = a \xi_r^*, \quad x = a x^*, \quad r = a r^*,$$

$$t = \frac{a}{v_m} t^*, \quad k = \frac{1}{a} k^*, \quad \omega = \frac{v_m}{a} \omega^*,$$

$$P_{tr} = \rho_f v_m^2 P_{tr}^*, \quad u_0 = v_m u_0^*, \quad \varphi = a v_m \varphi^*, \quad (6)$$

где  $k$  – волновое число;  $\omega$  – частота колебаний;  $P_{tr}$  – трансмуральное давление, отвечающее начальному напряженному состоянию трубки;

$v_m = \sqrt{\frac{Ed}{2\rho_f a}}$  – скорость распространения волн в

тонкой цилиндрической трубке с жидкостью (скорость Мозса-Кортевега) [4, 10].

Сначала рассматривается статическая задача под действием внутреннего трансмурального давления  $P_{tr}$ . На фоне полученных стационарных однородных деформаций и течения со скоростью  $u_0$  вводятся малые возмущения, что позволяет линеаризовать уравнения (2), (3) и выражение для давления (4).

Решения уравнений (1)–(3) представляются в виде бегущих волн:

$$\varphi(r, x, t) = A \varphi(r) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\{\xi_r(x, t), \xi_x(x, t)\} = \{B_r, B_x\} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (7)$$

После подстановки решений (7) в уравнения (2), (3), (5) получаем условие разрешимости задачи (существования бегущих волн): нетривиальные решения существуют, если определитель однородной системы равен нулю, т. е. получаем в терминах теории волн дисперсионное уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$ .

## 2. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ ЭФФЕКТОВ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

Как было показано в [7], закон дисперсии  $\omega(k)$  при  $u_0 = 0$  для распространения волн в такой среде может быть найден в явном виде:

$$\omega = \omega_1 \sqrt{\frac{1 - \sigma^2 - \frac{1 - \sigma^2}{2} P_{tr} k^2 + \frac{\varepsilon^2}{12} k^4}{1 + \frac{G I_0(k)}{k I_1(k)}}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon = \frac{d}{a}$ ;  $G = \frac{a \rho_f}{d \rho_m}$ ;  $\omega_1^2 = \frac{2G}{1 - \sigma^2}$ ;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона.

Геометрическая нелинейность приводит к тому, что при превышении трансмуральным давлением порогового значения

$$P_{min} = \frac{2}{\sigma \sqrt{3(1 - \sigma^2)}} \varepsilon \quad (9)$$

появляется область волновых чисел  $k$  таких, что  $\text{Im } \omega(k) > 0$ . В этой области будет наблюдаться неустойчивость формы трубки, поскольку амплитуда волны  $A e^{i(kx - \omega t)}$  начинает безгранично возрастать.

Рассмотрим теперь графики  $\text{Re } \omega(k)$  при возрастании трансмурального давления с дальнейшим превышением порога (2) (рис. 2). На оси ординат отложена безразмерная величина  $\omega$ , на оси абсцисс – безразмерное волновое число  $ka$ . Очевидным является то, что, начиная с некоторого значения  $P_{tr} < P_{min}$ , одному значению частоты (например, обозначенному на рисунке штриховой горизонтальной линией) соответствуют несколько величин  $ka$ , т. е. в трубке распространяется несколько волн одной частоты, но различной длины.

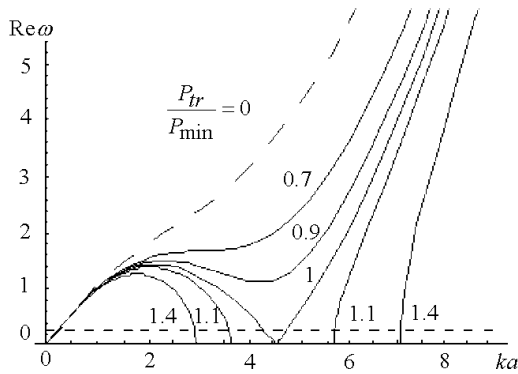


Рис. 2. Появление волны с отрицательной групповой скоростью при возрастании  $P_{tr}$  ( $G = 7$ ,  $\sigma \lesssim 0.5$ )

Асимптотический анализ при  $ka \rightarrow 0$  показывает, что первая из этих волн распространяется со скоростью Моенса-Кортевега  $\nu_m$  и это соответствует случаю распространения хорошо известных длинноволновых перистальтических возмущений [4].

Однако особый интерес представляет обнаруженная на графике вторая волна, распространяющаяся с отрицательной групповой скоростью  $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Этой волне соответствуют длины волн, сравнимые с радиусом трубки. Такие ситуации возможны в реальных системах с сильной дисперсией. Например, в работе [19] было показано, что в струе, инжектируемой в неоднородную по плотности жидкость (плотность линейно возрастает с глубиной), групповая скорость может быть отрицательной, т. е. энергия транспортируется в направлении, противоположном распространению волн (из области с большей плотностью в область меньшей плотности). Такая ситуация имеет место и при распространении волн в изгибно-деформируемой сжатой балке [18] при увеличении силы сжатия, что приближает нас к потере устойчивости по Эйлеру.

Если  $P_{tr} < P_{min}$ , то нет неустойчивости формы и  $\omega = \text{Re } \omega$ . Таким образом, в этом случае можно применить условие  $\frac{d\omega}{dk} < 0$  к (8). Тогда получим

$$P_{tr} > \frac{2}{\sigma(1 - \sigma^2)} \times \frac{\varepsilon^2}{3} \left( \frac{1}{4} \frac{I_0(k)^2}{I_1(k)^2} + \frac{1}{G} - \frac{1}{4} \right) k^4 + \frac{\varepsilon^2}{3} \frac{I_0(k)}{I_1(k)} k^3 + \frac{\left( \frac{I_0(k)^2}{I_1(k)^2} - 1 + \frac{2}{G} \right) k^2 + 2 \frac{I_0(k)}{I_1(k)} k}{(1 - \sigma^2) \left( \frac{I_0(k)^2}{I_1(k)^2} - 1 \right)} + \frac{\left( \frac{I_0(k)^2}{I_1(k)^2} - 1 + \frac{2}{G} \right) k^2 + 2 \frac{I_0(k)}{I_1(k)} k}{(1 - \sigma^2) \left( \frac{I_0(k)^2}{I_1(k)^2} - 1 \right)}. \quad (10)$$

Множество точек на плоскости  $(P_{tr}, k)$ , удовлетворяющих условию (10) и  $P_{tr} < P_{min}$ , определяет область трансмуральных давлений и соответствующих им волновых чисел, при которых наблюдается волна с отрицательной групповой скоростью. Такой областью на рис. 3 будет множество точек, которые находятся выше сплошной кривой, но ниже штриховой линии (порога). Трансмуральное давление является безразмерным и нормировано на  $\rho_f \nu_m^2$ . При превышении порога  $P_{tr} > P_{min}$ , очевидно, волна с  $\frac{d\omega}{dk} < 0$  продолжает существовать, но условие (10) перестает выполняться, поскольку уже  $\omega \neq \text{Re } \omega$ .

Обратимся теперь к реальной сердечно-сосудистой системе собаки [4, 10]. Рассмотрим

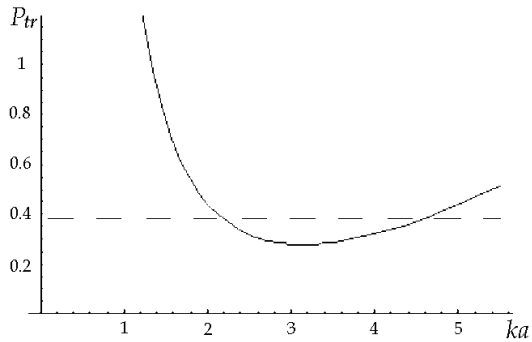


Рис. 3. Область отрицательных групповых скоростей выше сплошной кривой и ниже штриховой линии при  $P_{tr} < P_{min}$  ( $G = 7$ ,  $\sigma \lesssim 0.5$ )

распространение пульсовой волны, генерируемой сердцем и распространяющейся вдоль артерии с такими параметрами:  $a = 1$  см,  $\sigma \lesssim 0.5$ ,  $G = 7$ ,  $\nu_m = 5.8$  м/с. Именно для них построены графики на рис. 2, 3. Примем частоту сердечных сокращений собаки 120 ударов в минуту, которой соответствует частота  $\nu = 2$  Гц, тогда при разложении пульсовой волны в ряд Фурье основной гармонике будет соответствовать частота  $\omega_0 = 2\pi\nu \approx 13$  рад/с. Полагая, что существенный вклад будут вносить все кратные гармоники до  $10\omega_0 = 130$  рад/с, можно видеть, что реальный частотный интервал, который представляет интерес для исследования, лежит на рис. 2 между осью абсцисс и горизонтальной штриховой прямой (график нарисован в безразмерных величинах). Это означает, что волна с отрицательной групповой скоростью может распространяться лишь при условии, что трансмуральное давление в артерии или очень близко к пороговому (6), или превышает его.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ распространения и устойчивости пульсовых волн в кровеносном сосуде с привлечением геометрически нелинейной теории оболочек. В результате установлено, что наряду с традиционной длинной волной, распространяющейся со скоростью Моенса-Кортевега, существует другая волна с отрицательной групповой скоростью, распространяющаяся в противоположном направлении. Это может приводить к негативным патологическим последствиям, в частности, к нарушению сердечного ритма (аритмии) и дополнительной нагрузке на сердечные стенки.

Работа поддерживается Министерством образования и науки Украины, НИР N 0108U001016.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука. - 1967. 984 с.
2. *Громека И.С.* О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках. - Собр. соч. - М.: Изд-во АН СССР. - 1952. - С. 172-183.
3. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. - М.: Наука, - 1969. - 182 с.
4. *Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A.* The mechanics of the circulation. Oxford University Press, 1978. Русский перевод: *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. - М.: Мир. - 1981. - 372 с.
5. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, Ч. 2. - М.: ГИФМЛ, - 1963. - 584 с., 728 с.
6. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. - Киев: Вища школа. - 1989. - 207 с.
7. *Лукомський Д.В., Селезов І.Т.* Виникнення нестійкості форми при поширенні гідропружних хвиль в еластичній трубці, заповненій рідиною // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. - 2002. - N 3. - С. 132-145.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. - 4-е изд. - М.: Наука. - 1988. - 736 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. - М.: Наука, - 1965. - 204 с.
10. *Pedley T.J.* The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge University Press, 1980. Русский перевод: *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. - М.: Мир. - 1983. - 400 с.
11. *Селезов І.Т.* Про зведення нелінійної задачі гідропружності до розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь // Доповіді АН УРСР. Серія А. - 1964. - N2. - С. 185-188.
12. *Селезов І.Т.* О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью // Прикладная механика. - 1965. - 1, N 3. - С. 10-16.
13. *Astrom P., Egulftuz V.M., Colding-Jorgensen M., Gustafsson F. Holstein-Rathlou N.-H.* Instability and "sausage-string" appearance in blood vessels during high blood pressure // Phys. Rev. Letters. - 1999. - 82. - P. 323 - 331.
14. *Davey A. and Drazin P.G.* The stability of Poiseuille flow in a pipe // J. Fluid. Mech. - 1969. - 36, Part 2. - P. 209-218.
15. *Lukomsky D.V., Selezov I.T., Lukomsky V.P.* Nonlinear dynamics of pressure pulse waves in large blood vessels // Proc. 9th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Vol. 2, Poland, Lodz, 17-20 December 2007. - P. 909-918.
16. *Lukomsky D., Selezov I.* Arteria instability under heart pressure pulse propagation // Proc. 13th Conference of European Society of Biomechanics, Wrocław, 1-4. Sept. 2002. Acta of Bioengineering and Biomechanics. - 2002. 4, Suppl. 1. - P. 524-525.
17. *Nelson P. and Powers T.* Dynamical theory of the pearling instability in cylindrical vehicles // Phys. Rev. Letters. - 1995. - 74, N 17. - P. 3384-3387.

18. *Nonlinear waves*. Cornell University Press: Ithaca and London. Русский перевод: Нелинейные волны.– М.: Мир. – 1977. – 320 с.
19. *Selezov I.T., Shpakova S.G., Huq P.* Wave disturbances of stratified fluid due to vertical jet // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2001. – **28**, N 1–2. – P. 5465.
20. *Selezov I., Bersenev V.* Some mathematical models of reflex-metameric therapy // Proc. 5th World Congress of Biomechanics. – July 29 – August 4 2006, Germany, Munich. – Ed. D.Liepsch: Medimond. 2006. – P. 485–489.
21. *Selezov I., Avramenko O., Fratamico G., Pallotti G., Pettazzoni P.* Stress concentration due to advancing heart pulse through a blood vessel joint // J. Mechanics in Medicine and Biology. – 2001. – **1**, N 2. – P. 79–96.
22. *Selezov I., Pallotti G., Fratamico G., Pettazzoni P.* Viscoelasticity with permanent deformation in investigation of pulse propagation in blood vessel // J. Mechanics in Medicine and Biology. – 2001. – **1**, N 2. – P. 139–152.