УДК 004.94:532.59

Р.И. ДЕМЧЕНКО, П.С. КОЛОМИЕЦ

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН НА ПРОНИЦАЕМОМ ВОЛНОЛОМЕ

Abstract: *The modification basis of the "mild slope" equation describing the surface waves transformation in the coastal zone with dissipation region of porous rubble-mound breakwater type has been done. The tests have been fulfiled for given breakwater characteristics.*
Key words: *rubble-mound breakwater, "mild slope" equation, surface waves, dissipation region.*

Анотація: *Представлено обґрунтування щодо модифікації рівняння "положистих схилів", що описують розповсюдження поверхневих хвиль у прибережній зоні, яка містить область дисипації хвильової енергії у вигляді насипної конструкції. Проведені тести, пов'язані з характеристиками конструкції.*
Ключові слова: *насипна конструкція, рівняння „положистих схилів", поверхневі хвилі, область дисипації.*

Аннотация: *Дано обоснование модификации уравнения "пологих склонов", описывающих распространение поверхностных волн в прибрежной зоне с областью диссипации волновой энергии в виде волнолома насыпной конструкции. Проведены тесты для заданных характеристик волнолома.*
Ключевые слова: *насыпная конструкция, уравнение „пологих склонов", поверхностные волны, область диссипации.*

1. Введение

Влияние диссипации энергии на распространение поверхностных волн представляет собой один из важных объектов исследования для практических инженерных задач в прибрежной зоне шельфа. Диссипация волновой энергии может быть вызвана такими факторами, как донное трение, волновое обрушение, насыпные волноломы вблизи берега.

Согласно экспериментальным работам Мадсена и Уайта, Соллита и Кросса, упомянутым в [1], насыпные волноломы можно рассматривать как область диссипации волновой энергии, резко изменяющейся от нуля в области, удаленной от волнолома, до некоторого конечного значения внутри последнего. В статье [1] рассмотрено аналитическое решение для уравнения «пологих склонов» [2], модифицированное в области диссипации энергии на основе предположения Бойа [3]. В настоящей работе дано обоснование такой модификации уравнения «пологих склонов» с учетом медленно изменяющегося течения (что не нарушает общности вывода) и рассмотрены тесты для заданных коэффициентов отражения поверхностной волны, проходящей через волнолом насыпной конструкции.

2. Уравнение Навье-Стокса

Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в поле силы тяжести запишем в виде [4] (ось z направлена вертикально вверх):

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}grad(v)^2-\left[\vec{v}rot\vec{v}\right]=-\frac{1}{\rho}grad\breve{P}+\vec{g}+\nu\Delta\vec{v}\ , \tag{1}$$

$$div\vec{v}=0\ , \tag{2}$$

$$\breve{P}=p-\rho gz\ . \tag{3}$$

Будем предполагать, что

$$\vec{v}=\vec{U}+\vec{u} \tag{4}$$

есть векторная сумма, представляющая линейное взаимодействие поля течения $\vec{U}=\{U_1,U_2\}$ и волнового поля. При этом

$$\vec{u}=\alpha[\vec{u}_0+\frac{1}{R}\vec{u}^{(\nu)}] \ , \tag{5}$$

где

$$\vec{u}_0 = grad\breve{\Phi}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{\nu}{cL_0}. \tag{7}$$

Здесь $\breve{\Phi}=\breve{\Phi}(x,y,z)$ – потенциал скорости, α – параметр крутизны волны, $c=\sqrt{gh}$ – фазовая скорость, L_0 – характерная длина волны, ν – кинематическая вязкость, $\vec{u}^{(\nu)}=\vec{u}^{(\nu)}(x,y,z)$ – слагаемое, связанное с вязкостью жидкости. Т.е. будем предполагать, что в основном слое жидкости $-h+\delta\le z\le\zeta$, где $\delta\to 0$ при $R\to\propto$, волновое движение описывается функцией, удовлетворяющей условию (6), а для функции $\vec{u}^{(\nu)}$ выполняются соотношения

$$\vec{u}^{(\nu)}\to 0,\ z\to\propto , \tag{8}$$

$$(u_i^{(\nu)})_{x,y}=O(\varepsilon),\ (u_i^{(\nu)})_z=O(1/R), \tag{9}$$

где ε – уклон дна.

Для искомой функции $\vec{u}$ выполняется условие прилипания на дне

$$\vec{u}=0, z=-h(x,y). \tag{10}$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$p=p_0+\alpha p_1 \ , \tag{11}$$

$$U_{ix},U_{iy}=O(\varepsilon)\,,\ \ h_x,h_y=O(\varepsilon).$$

Подставляя разложение искомых функций $\vec{u},p$ в (1) и собирая коэффициенты при степенях параметра α , получим в приближении $O(\alpha^0)$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}^2)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p_0=\nu\Delta U_1+(U_{2x}-U_{1y})U_2, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\vec{U}^2)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p_0=\nu\Delta U_2-(U_{2x}-U_{1y})U_1, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p_0=0. \tag{14}$$

При этом уравнение неразрывности для вектора $\vec{U}$ имеет вид

$$(\nabla\cdot\vec{U})h+\vec{U}\cdot\nabla h=0. \tag{15}$$

Т.к. из соотношения (14) следует, что функция p_0 не зависит от координаты z , представим ее в виде

$$p_0 = \rho g \zeta_0 , \tag{16}$$

где ζ_0 – изменение уровня свободной поверхности, обусловленное течением $\vec{U}$, причем $\zeta_{0x}, \zeta_{0y} = O(\varepsilon)$.

Из условия линейности взаимодействия поля течения $\vec{U}(x, y)$ и волнового движения, описываемого функцией (5), из уравнения неразрывности (2) с точностью до членов порядка $O(\alpha\varepsilon, \alpha\frac{1}{R^2})$ следует, что

$$\nabla^2 \breve{\Phi} + \frac{\partial^2 \breve{\Phi}}{\partial z^2} = 0 . \tag{17}$$

Тогда, для коэффициентов порядка $O(\alpha^1)$, принимая во внимание уравнение (17) и отбрасывая слагаемые порядка $O(\alpha\varepsilon, \alpha\frac{1}{R^2})$, а также (ввиду малости коэффициента кинематической вязкости ν) слагаемые порядка $O(\nu^2)$, система уравнений (1) будет иметь следующий вид:

$$\nabla_3 (\breve{\Phi}_t + U_1 \breve{\Phi}_x + U_2 \breve{\Phi}_y + \frac{1}{\rho} p_1) = 0 , \tag{18}$$

где $\nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

В полученных уравнениях компоненты поля течения входят как известные параметры, и движение волнового поля, описываемого функцией $\breve{\Phi}(x, y, z, t)$, предполагается потенциальным, тогда для системы уравнений (18) интеграл Бернулли можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} p_1 = -(\breve{\Phi}_t + U_1 \breve{\Phi}_x + U_2 \breve{\Phi}_y) . \tag{19}$$

На поверхности

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha\eta , \tag{20}$$

где η – возвышение свободной поверхности, соответствующее волновому движению, функция давления $\breve{P}$ с точностью до членов порядка $O(\alpha^2)$ будет записана следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \breve{P}_{z=\zeta} = -\alpha(\breve{\Phi}_t + U_1 \breve{\Phi}_x + U_2 \breve{\Phi}_y) - \alpha g \eta . \tag{21}$$

Поток импульса через поверхность $z = \zeta$ в направлении оси z есть

$$[\breve{\Pi} \cdot n_3)]_{z=\zeta} = [\breve{P} \cdot n_3 - \sigma'_{3k} \cdot n_k + (v_3 v_k) \cdot n_k]_{z=\zeta}, k = 1,2 . \tag{22}$$

Так как вектор нормали к поверхности $z = \zeta$,

$$\vec{n} = \left\{ n_1, n_{2,} n_3 \right\} = \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1 \right\} , \tag{23}$$

то выражение (22) с точностью до членов порядка $O(\alpha\varepsilon, \alpha^2)$ перепишется:

$$[\breve{\Pi}_3]_{z=\zeta} = [(\breve{P} - \sigma'_{33})n_3]_{z=\zeta} , \tag{24}$$

где с точностью до членов порядка $O(\nu^2)$

$$\sigma'_{33} = \nu\rho(\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial z}) = \nu\rho(2\alpha\frac{\partial^2\breve{\Phi}}{\partial z^2}) . \tag{25}$$

С другой стороны, т.к.

$$[\breve{\Pi}_3]_{z=\zeta} = [\,p_{атм} \cdot (-n_3)]_{z=\zeta} , \tag{26}$$

где $p_{атм}$ – атмосферное давление, получим из равенств (21) – (26), полагая $p_{атм} = 0$, выражение для возвышения свободной волновой поверхности η:

$$\eta = -\frac{1}{g}[\breve{\Phi}_t + U_1\breve{\Phi}_x + U_2\breve{\Phi}_y + 2\frac{\nu}{g}\frac{\partial^2\breve{\Phi}}{\partial z^2}]_{z=\zeta} . \tag{27}$$

Кинематическое условие для частиц жидкости на поверхности $z = \zeta$ с учетом условия (8) запишется:

$$[\frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - v_3]_{z=\zeta} = 0 . \tag{28}$$

Тогда, для членов порядка $O(\alpha)$ условие (28) будет иметь вид

$$[\frac{\partial\eta}{\partial t} + U_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + U_2\frac{\partial\eta}{\partial y} - \breve{\Phi}_z]_{z=\zeta} = 0 . \tag{29}$$

Подставляя выражение (27) для η в (29), получим

$$[\breve{\Phi}_z + \frac{1}{g}\frac{D^2}{Dt^2}\breve{\Phi} + \frac{1}{g}\frac{D}{Dt}(2\nu\frac{\partial^2\breve{\Phi}}{\partial z^2})]_{z=\zeta} = 0 , \tag{30}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla .$$

3. Уравнения «пологих склонов» в основном потоке вязкой несжимаемой жидкости

Так как толщина придонного слоя $\delta \to 0$ при $R \to \infty$, заменим условие прилипания на дне (10) для функции $\vec{u}$ условием непроницаемости на дне:

$$[\frac{\partial\breve{\Phi}}{\partial z} - \nabla h \cdot \nabla\breve{\Phi}]_{z=-h} . \tag{31}$$

Ниже, в **Приложении А,** будет показано, что решение в слое δ непрерывно связано с решением в основном слое потока жидкости: $-h + \delta \le z \le \zeta$.

Так как трансформация волн рассматривается в области с пологими неоднородностями дна $h_x, h_y = O(\varepsilon)$ и медленным изменением течения на расстояниях порядка длины волны $U_{ix}, U_{iy} \ll c / L_0,\ i = 1,2$, будем искать функцию $\breve{\Phi}$ в виде [1], [5]:

$$\breve{\Phi} = \Phi(x,y,z,t) \cdot f(z),$$
$$\Phi(x,y,z,t) = \tilde{\varphi}(x,y,t) + \varepsilon^2 z^2 \tilde{\varphi}_1(x,y,t) + O(\varepsilon^4), \quad f(z) = \frac{chk(z+h)}{chk(h+\zeta_0)}. \tag{32}$$

Отметим, что представленная в виде разложения (32) функция $\breve{\Phi}$ удовлетворяет условию прилипания на дне только в направлении оси z.

Применяя формулы Грина для функции $\breve{\Phi}$, удовлетворяющей уравнениям (17), (30), (31), и к функции f, удовлетворяющей задаче Штурма-Лиувилля [5], аналогично [5], [6], с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$, получим уравнение «пологих склонов» для случая вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{D^2}{Dt^2}\tilde{\varphi} + \frac{D}{Dt}\gamma_d\tilde{\varphi} - \nabla \cdot (b\nabla\tilde{\varphi}) + (\sigma^2 - k^2 b)\tilde{\varphi} = 0, \tag{33}$$

$$\tilde{\eta} = -\frac{1}{g}[\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + U_1\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} + U_2\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} + \gamma_d\tilde{\varphi}], \tag{34}$$

где волновые параметры определены как

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(k \cdot h)}, \quad c_g = \frac{1}{2}c \cdot (1+G), \quad G = \frac{2kh}{\sinh(2kh)}, \quad b \equiv c \cdot c_g, \tag{35}$$

$$\omega = \sigma + \vec{k}\cdot\vec{U}, \quad \sigma^2 = gkth(kh). \tag{36}$$

Здесь $\gamma_d = 2\nu' k^2 f_\zeta$, и граничные условия для уравнения (33) нарушаются в придонном слое на поверхности $z = -h(x,y)$ в случае $\gamma_d \neq 0$.

4. Модифицированные уравнения «пологих склонов»

На основании вышеизложенного и обоснования, приведенного в **Приложении А,** можно предположить, согласно [3], что в случае идеальной несжимаемой жидкости уравнения «пологих склонов» (33), (34), описывающие распространение гармонических волн на медленно изменяющихся течениях, в области, имеющей зоны диссипации волновой энергии, имеют вид

$$\frac{D^2}{Dt^2}\tilde{\varphi} + \frac{D}{Dt}W\tilde{\varphi} - \nabla \cdot (b\nabla\tilde{\varphi}) + (\sigma^2 - k^2 b)\tilde{\varphi} = 0, \tag{37}$$

$$\tilde{\eta} = -\frac{1}{g}[\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + U_1\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} + U_2\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} + W\tilde{\varphi}], \tag{38}$$

где коэффициент W – функция рассматриваемой области пространства и, согласно определению [3], представляет собой скорость изменения диссипации энергии на единицу интенсивности волновой энергии.

Если представить решение уравнений (37), (38) в виде гармонических функций

$$\tilde{\varphi} = \varphi(x, y)\exp(-i\omega t), \quad \tilde{\eta} = \eta(x, y)\exp(-i\omega t), \tag{39}$$

то полученное уравнение (37 – 39) в случае $\vec{U} = 0$ совпадает с волновым уравнением «пологих склонов», приведенным в [1], [7].

$$\nabla \cdot (b\nabla\varphi) + b\left[k^2 + i\frac{k}{c_g}W\right]\varphi = 0. \tag{40}$$

5. Тестирование полученной модели

В [1] в случае постоянной глубины получено аналитическое решение для прохождения гармонической волны через область диссипации конечной длины. При этом коэффициент трансмиссии T_r получен для различных волновых чисел, длин волнолома и параметра W [1]:

$$T = \frac{2 - F\left(1 - \frac{\bar{k}}{k}\right)}{1 + \frac{\bar{k}}{k}} e^{i(\bar{k}-k)l} + Fe^{-i(\bar{k}+k)l}, \tag{41}$$

где

$$\bar{k}^2 = k^2\left(1 + \frac{W}{c_g k}\right), \quad F = \frac{2\left(\frac{\bar{k}}{k} - 1\right)}{\left(\frac{\bar{k}}{k} + 1\right)^2 e^{-2i\bar{k}l} - \left(\frac{\bar{k}}{k} - 1\right)^2}. \tag{42}$$

В настоящей работе с помощью процесса итераций по формулам (41), (42) решена обратная задача нахождения коэффициента диссипации W по заданному коэффициенту трансмиссии T_w, волновому числу k и длине волнолома l, а также проведено тестирование полученной модели уравнений (37 – 39), (38 – 40). Для этого рассмотрен одномерный случай распространения на постоянной глубине $h = 5м$ гармонической волны высотой $Hw = 1м$, с периодом $T = 2c$, подходящей к волнолому насыпной конструкции под прямым углом. Параметры длины и соответствующие коэффициенты диссипации, рассчитанные по формулам (41), (42), приведены в табл. 1 для заданного коэффициента трансмиссии $T_w = 0.5$.

Таблица 1. Зависимость коэффициента диссипации от параметров волнолома

Длина волнолома (м)	W (1/с)
0.5	6
1	2.75
2	1.2
6	0.37
12	0.18

Ниже показаны результаты численного моделирования волновых высот с помощью уравнений (37), (38).

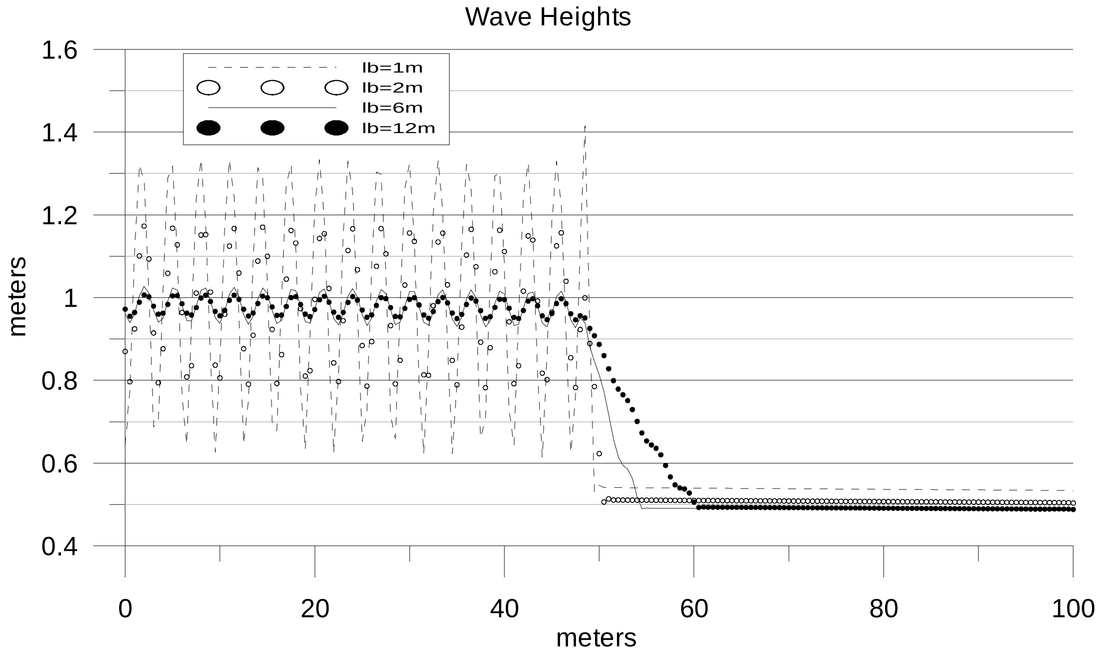

Рис. 1. Волновые высоты для прямоугольного волнолома различной длины

Как видно из рис. 1, длина зоны диссипации $l = 0.5м$ дает несколько завышенный коэффициент $T_w \approx 0.6$. В остальных случаях проходящие в область за волноломом высоты волны очень близки к заданному коэффициенту трансмиссии $T_w = 0.5$.

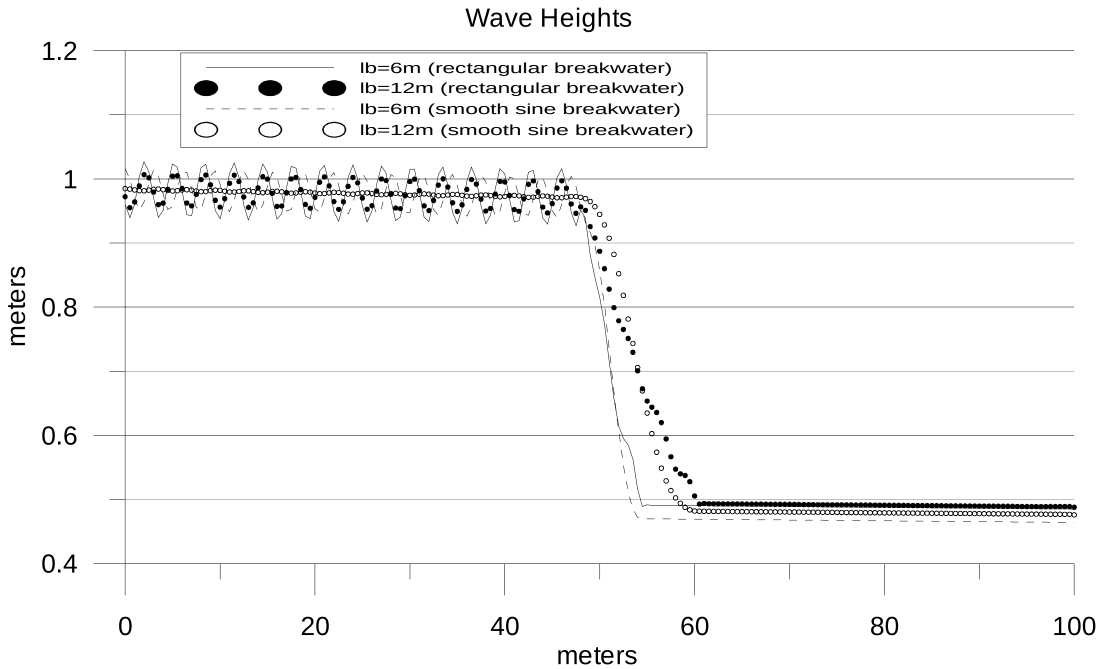

Рис. 2. Волновые высоты для прямоугольного волнолома с разной формой распределения коэффициента W

На рис. 2 показано сравнение волновых высот для длин волнолома $l = 6м$, $l = 12м$ с соответствующим значением коэффициента W из табл. 1 и распределением его в форме синуса с максимальным значением в середине области диссипации и нулевыми значениями на концах этой области. Для $l = 12м$ и случая сглаженной формы W можно видеть отсутствие отраженной волны.

6. Выводы

Дано обоснование модификации уравнения “пологих склонов”, описывающих распространение поверхностных волн в прибрежной зоне, содержащей область диссипации волновой энергии в виде волнолома насыпной конструкции. Проведены тесты для заданных характеристик волнолома.

Полученная модель (37), (38) может быть использована для инженерных задач прибрежной зоны шельфа.

Авторы благодарят к.ф.-м.н. М.И. Железняка за консультации при выполнении работы.

Приложение А

Покажем, что решение в придонном вязком слое толщины δ при удалении от донной поверхности $z = -h(x, y)$ будет асимптотически приближаться к решению в основном потоке $-h + \delta \le z \le \zeta$. Для этого перепишем уравнение движения жидкости (1) для функции $\vec{v} = \vec{U} + \alpha\vec{\tilde{u}}$ (вектор $\alpha\vec{\tilde{u}} = \alpha\{u, v, w\}$ соответствует компоненте волнового движения). Учитывая, что

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2} grad(v)^2 - [\vec{v} rot \vec{v}] , \tag{A.1}$$

получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} grad P^{\delta} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} , \tag{A.2}$$

где

$$P^{\delta} = p_0^{\delta} + \alpha p_1^{\delta} - \rho g z . \tag{A.3}$$

Для коэффициентов $O(\alpha^0)$

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0^{\delta}}{\partial x} = \nu \Delta U_1 , \tag{A.4}$$

$$U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0^{\delta}}{\partial y} = \nu \Delta U_2 , \tag{A.5}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0^{\delta}}{\partial z} = 0 . \tag{A.6}$$

Так как для поля течений $U_{ix}, U_{iy} = O(\varepsilon)$, то, пренебрегая слагаемыми в правых частях (А.4), (А.5), имеем

$$p_0^\delta = p_0^\delta(x, y)\,. \tag{А.7}$$

С точностью до членов порядка $O(\alpha^2)$ уравнение (А.2) и уравнение неразрывности (2) запишутся:

$$\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{\tilde{u}} + \frac{1}{\rho}\nabla_3 p_1^\delta = \nu \Delta_3 \vec{\tilde{u}}\,, \tag{А.8}$$

где $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,. \tag{А.9}$$

Граничные условия на поверхности $z = -h$ удовлетворяют условиям прилипания:

$$[u, v, w]_{z=-h} = 0\,. \tag{А.10}$$

В придонном пограничном слое вертикальная компонента скорости w мала по сравнению с компонентами скорости u, v, которые медленно изменяются в горизонтальном направлении по сравнению с вертикальным ($u_{xi}, v_{xi} \ll u_z, v_z$). Тогда, учитывая (А.9), из уравнения (А.8) получаем

$$\frac{\partial p_1^\delta}{\partial z} = 0\,, \tag{А.11}$$

т.е. в пограничном слое δ градиентом давления по вертикали можно пренебречь, или, что то же, в придонном слое жидкости давление равно давлению в основном потоке жидкости. В силу (21), с точностью до членов порядка $O(\alpha^2, \alpha\varepsilon, \alpha\frac{1}{R^2}, \nu^2)$, можно записать

$$[p_1^\delta]_{-h \le z = -h+\delta} = -\rho[\breve{\Phi}_t + U_1\breve{\Phi}_x + U_2\breve{\Phi}_y]_{z=-h+\delta}\,. \tag{А.12}$$

Таким образом, система уравнений (А.8) – (А.9) для пограничного придонного слоя δ имеет заданную функцию давления (А.12), а искомые функции скорости u, v, w, удовлетворяющие условию прилипания на дне (А.10), при удалении от точек поверхности $z = -h(x, y)$ будут асимптотически приближаться к скорости основного потока, описываемого функцией $\breve{\Phi}(x, y, z, t)$ в слое $-h + \delta \le z \le \zeta$. Следовательно, при уменьшении толщины вязкостного слоя δ будет уменьшаться погрешность, вносимая заменой условия прилипания на дне условием непроницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu P., Yoon S., Dalrymple R. Wave reflection from energy dissipation region // J. Waterway, Port Coastal and Ocean Engineering. – 1986. – Vol. 112, N 6. – P. 632 – 644.
2. Berkhoff J.C. Computation of Combined Refraction-Diffraction // Proc. 13th Coastal Eng. Conf. – Vancouver, ASCE. – New York, 1972. – Vol. 1. – Chapter 24. – P. 471 – 490.
3. Booij N. Gravity waves on water with non-uniform depth and current // Dissertation, Delft Univ. of Tech. – Holland, 1981.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1986. – Т. VI: Гидродинамика. – 736 с.
5. Liu P. Wave-current interaction on a slowly vatying topography // J. Geophysical Research. – 1983. – N C7, Vol. 88. – P. 4421 – 4426.

6. Демченко Р.И. Математическая модель рефракционно-дифракционной трансформации волн на течениях прибрежной зоны с помощью гиперболической аппроксимации “уравнения пологих склонов”// Математические машины и системы. – 1999. – № 3. – С. 1 – 13.
7. Jing L., Ridd P, Mayocchi C., Heron M. Wave-induced benthic velocity variatios in shallow waters // Estuarine, Coastal and Shell science. – 1996. – Vol. 42. – P. 787 – 802.

Стаття надійшла до редакції 01.04.2008