УДК 519.927

О.С. БИЧКОВ, В.С. КАСЬЯНЮК, Т.П. СОВЯК

ПРО НЕСТІЙКІСТЬ ФАЗОВИХ ОРБІТ ОДНОГО КЛАСУ ГІБРИДНИХ АВТОМАТІВ

Abstract: *In this paper, the common model of continuously-discontinuous systems, stochastic switched hybrid system, in particular, is considered. For this model, the theorems regarding instability of trivial phase orbit were proved. In the first theorem regarding instability, an assumption about existing of a common Liapunov's function was made, in the second theorem, this condition was eliminated.*
Key words: *hybrid system, instability, stochastic systems, Liapunov's function.*

Анотація: *Розглядається загальна модель неперервно-дискретних систем – стохастичний гібридний автомат. Для цієї моделі доводяться теореми про нестійкість тривіальних фазових орбіт. У першій теоремі про нестійкість робиться припущення про існування спільної функції Ляпунова, у другій теоремі про нестійкість ця умова усунена.*
Ключові слова: *гібридний автомат, нестійкість, стохастичні системи, функції Ляпунова.*

Аннотация: *Рассматривается общая модель непрерывно-дискретных систем – стохастический гибридный автомат. Для этой модели доказываются теоремы о неустойчивости тривиальных фазовых орбит. В первой теореме о неустойчивости делается предположение о существовании общей функции Ляпунова, во второй теореме о неустойчивости это условие устранено.*
Ключевые слова: *гибридный автомат, неустойчивость, стохастические системы, функции Ляпунова.*

1. Вступ

Великий інтерес для дослідження представляють системи, що складаються із скінченного числа елементів різної природи. Наприклад, системи, які містять елементи двох типів: ті, що описуються неперервними процесами і мають кінцеву тривалість, і ті, що описуються дискретними процесами (для таких елементів час реакції на події несуттєвий для аналізу системи). Такі системи прийнято називати неперервно-дискретними.

Типовими прикладами неперервно-дискретних систем є системи керування транспортним потоком, хімічними реакціями, температурою, математичні моделі руху в робототехніці та ін. Динаміка неперервної компоненти таких систем буває досить складною, але це не є підставою зводити дослідження подібних систем лише до вивчення дискретної поведінки. Більше того, дискретна динаміка накладає свій відбиток на характер поведінки системи в неперервні моменти часу. Тому подібні системи були виділені в окремий клас.

У літературі найбільш відомими підходами до формалізації неперервно-дискретних систем вважаються агрегативна система Н.П. Бусленка [1], неперервно-дискретна система В.М. Глушкова [2], системи змінної структури С.В. Ємельянова [3], гібридні автомати А. Пнуеллі [4] та ін. [5, 6].

У статті буде розглянуто загальну модель неперервно-дискретних систем – стохастичний гібридний автомат. Для цієї моделі будуть отримані достатні умови нестійкості фазових орбіт.

Питання стійкості фазових орбіт досить повно досліджені в роботах [7–9]. Проте питанням нестійкості в літературі приділено недостатньо уваги. В літературних джерелах пропонується багато методів дослідження стійкості та нестійкості за ймовірністю розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Ми використаємо підхід Р.З. Хасьмінського [10]. В роботі розглядається нестійкість за ймовірністю.

2. Достатні умови нестійкості

Нехай відомо, що динаміка процесу описується різними математичними моделями в N різних станах.

Прийнято називати системою зі змінною структурою таку систему, в якій зв'язки між функціональними елементами змінюються тим або іншим чином залежно від її стану.

Можна сказати, що для опису систем зі змінною структурою необхідно задати скінченну кількість можливих локальних станів, умов переходів з одного локального стану в інший та системи диференціальних рівнянь для опису динаміки в кожному з локальних станів. Для формалізації таких моделей використовують гібридні автомати. Слід зауважити, що в різних станах поведінка об'єкта моделюється різними траєкторіями, тому будемо називати розв'язок гібридного автомата орбітою.

Введемо множину $Q=\{1,..., N\}$ для нумерації цих станів. Для формалізації динаміки об'єкта будемо використовувати в кожному локальному стані системи диференціальних рівнянь.

Позначимо через множину $X=\{x_1,...x_n\}, n\ge 0, x_i\in R$ – дійсні фазові змінні, а через $F=\{f_i\ :\ Q\times R^n\to R^n,\ i=\overline{1,\ N}\}$ – множину неперервних вектор-функцій, що задовольняють умові Ліпшиця.

На початку функціонування необхідно задавати початкові умови для кожної системи диференціальних рівнянь. Для ініціалізації цих значень введемо множину $Init\ :\ Init\subset Q\times R^n$. Запис $(i,\ y)\in Init$ означає, що динаміка починається з i-го стану і описується i-ю системою диференціальних рівнянь. При цьому початкове значення фазової змінної дорівнює y .

Нехай система перебуває в i-му стані. Тоді для фазових змінних виконується умова належності до деякої множини, що описує цей стан. І поки виконується ця умова, динаміка буде описуватися i-ю системою диференціальних рівнянь. Для задання цієї умови введемо позначення $Inv\ :\ Inv\subset Q\times R^n$.

Для переключення зі стану в стан необхідно задати умову такого переходу. Нехай $Jump$ задає множинно-значну функцію таку, що $Jump\ :\ Q\times R^n\to P(Q\times R^n)$, де через P позначено множину усіх підмножин. Ця функція задає умову переходу зі стану в стан та початкове значення фазової змінної в момент переходу у новий стан.

Означення 1 [3]. Гібридним автоматом назвемо кортеж $H=(Q,\ X,\ F,\ Init,\ Inv,\ Jump)$.

Означення 2 [3]. Фазовою орбітою гібридного автомата H назвемо множину $\chi=\{(\tau,i,x)\}$, де $\tau\in T$, i – номер локального стану і $x\ :\ \tau\to R^n$ таке, що

1. $(i(\tau_0),\ x(\tau_0))\in Init$.

2. Для всіх i таких, що $\tau_i<\tau_i'$ пара $(i(t),\ x(t))\in Inv$ визначає неперервну динаміку в i-му локальному стані; пара $(i(\tau_{i+1}),\ x(\tau_{i+1}))\in Jump(i(\tau_i'),\ x(\tau_i'))$ визначає дискретну динаміку, $x(.)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь $\dot{x}(t)=\ f_i(i(t),x(t))$ для всіх $t\in[\tau_i,\ \tau_i']$.

Означення 3 [3]. Неперервний стан $x=0$ назвемо тривіальною фазовою орбітою гібридного автомата H, якщо існує не порожня множина $\overline{Q} \subset Q$ така, що для всіх $i \in \overline{Q}$ виконується

1. З $(i', z') \in Jump(i, 0)$ випливає, що $z' = 0$ й $i' \in \overline{Q}$.

2. $f(i, 0) = 0$ для всіх $i \in Q$.

Спочатку розглянемо випадок, коли динаміка в кожному локальному стані описується звичайними диференціальними рівняннями.

Означення 4 [6]. Тривіальна фазова орбіта $x=0$ гібридного автомата H називається стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\chi = (\tau, i, x)$, які задовольняють умові $|x_0| < \delta$, виконується $|x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \tau$. Через $|\cdot|$ позначено евклідову норму.

Означення 5 [7]. Локальний стан назвемо нестійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, яка описує динаміку гібридного автомата в ньому, нестійкий за Ляпуновим.

Якщо не виконується означення стійкості, то будемо вважати таку тривіальну фазову орбіту нестійкою.

Припустимо, що орбіта гібридного автомата починається з першого стану. Нехай позначення $x^k |_{i \to j}$ означає, що гібридний автомат переходить зі стану i в стан j, і значення x^k береться на множині, що задає умову переходу. Побудуємо таку послідовність $\{x^k\}$, $i = \overline{0, N}$:

$$x^0 |_{N \to 1}, \quad c_0 = V_1(x^0), \quad x^1 = V_1^{-1}(c_0)|_{1 \to 2},$$
$$c_1 = V_2(x^1), \quad x^2 = V_2^{-1}(c_1)|_{2 \to 3}, \ldots, \tag{1}$$
$$c_{N-1} = V_N(x^{N-1}), \; x^N = V_N^{-1}(c_{N-1})|_{N \to 1} \ldots$$

Для дослідження нестійкості тривіальної фазової орбіти гібридного автомата будемо використовувати гібридну u-функцію.

Означення 6 [7]. Назвемо $V(i, x) = \{V_i(x)\}, \quad i = \overline{1, N}$ гібридною u-функцією, якщо $V_i(x)$ додатно визначені, й для послідовності $\{x^i\}$, $i = \overline{0, N}$, визначеної в (1), виконується нерівність $|x^N| \geq |x^0|$.

Позначимо через Ω_i – множину, що відповідає i-му локальному стану.

Для гібридних автоматів у фазовому просторі R^2, в яких перехід зі стану в стан відбувається на прямій лінії, можна сформулювати таку теорему [7].

Теорема 1. Нехай гібридний автомат H з нестійкими локальними станами має тривіальну фазову орбіту $x=0$ і для неї виконується $|Q| < \infty$, $Jump(i, x) = \{(i+1, x)\}$, $i = \overline{1, N-1}$, $Jump(N, x) = (1, x)$. Нехай задано окіл початку координат $D \subset X$.

Якщо для H існує гібридна u-функція $V(i, x): \; Q \times D \to R$ така, що $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) > 0$ для всіх $x \in D \cap \Omega_i$ та $i = \overline{1, N}$, тоді тривіальна фазова орбіта нестійка за Ляпуновим.

Тепер розглянемо гібридний автомат, в якому динаміка локальних станів описується системами нелінійних стохастичних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} dX(t) &= b^i(X(t))dt + G^i(X(t))d\xi(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\xi(t)$ – стандартний скалярний вінерівський процес. Нехай для кожної системи виконуються умови існування і єдності розв'язку.

Будемо досліджувати стійкість тривіальної орбіти гібридного автомата за допомогою другого методу Ляпунова.

Означення 7 [10]. Говорять, що розв’язок $X(t)$ системи (2) стійкий за ймовірністю для $t \ge 0$, якщо для довільного $s \ge 0, \varepsilon > 0$ виконується

$$\lim_{x\to 0} P\{\sup_{t>s} | X^{s,x}(t) | > \varepsilon\} = 0 ,$$

де $X^{s,x}$ – інтегральна крива розв’язку системи (2), що стартує з точки x в момент часу s.

Означення 8 [11]. Неперервно-диференційована всюди, окрім початку координат, додатно визначена функція $V: R^n \to R^+$ називається спільною функцією Ляпунова для системи (2), якщо $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$ та $\forall t, \forall i \in Q$ виконується

$$LV(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j^i(x)\frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}^i(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \le 0 . \tag{3}$$

Нехай існує спільна функція Ляпунова для всіх підсистем (2), а також кількість переключень та час є скінченними. Нехай переключення відбуваються в моменти часу $t_0, t_{1\ldots,} t_0 < t_1 < \ldots i$.

$$\lim_{h\to 0} M \,\| x(t_i + h) - x(t_i) \|^2 = 0, \forall i . \tag{4}$$

Для доведення стійкості будемо використовувати формулу Іто:

$$V(t_j) = V(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} LV(x(s))ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{k,l}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} G_{kl}^q d\xi_l(s) . \tag{5}$$

Наведемо означення асимптотичної стійкості за ймовірністю.

Означення 9 [10]. Говорять, що розв’язок $X(t)$ системи (2) асимптотично стійкий за ймовірністю, якщо він стійкий за ймовірністю і:

$$\lim_{x\to 0} P\{\lim_{t\to\infty} X^{s,x}(t) = 0\} = 1 .$$

Якщо кількість переключень між станами гібридного автомата скінченна, то можна сформулювати достатні умови асимптотичної стійкості за ймовірністю.

Теорема 2. Якщо кожна із підсистем (2) стійка за ймовірністю і остання підсистема, яка активується, є асимптотично стійкою, то тривіальна орбіта системи (2) є асимптотично стійкою за ймовірністю. Доведення цієї теореми очевидне.

Позначимо через U_r множину $\{| x | < r\}$ в E . Дамо означення нестійкості за ймовірністю.

Означення 10. Будемо говорити, що тривіальна орбіта гібридного автомата нестійка за ймовірністю, якщо для всіх $\chi = (\tau, i,\ x)$ та для довільного $s > 0, x \in U_r$

$$P\{\sup_{t>0} | X^{s,x}(t) |< r\} = 0\,,$$

де $X^{s,x}$ – локальна інтегральна крива розв'язку системи (2), що стартує з точки x в момент часу s.

Означення 11. Неперервно-диференційована всюди, окрім початку координат, додатно визначена функція $V(t, x)$ називається спільною функцією Ляпунова для системи (2), якщо

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} b_j^i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}^i(t,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \le 0 \quad \forall t, \forall i \in Q, x \in U_r\ .$$

Нехай існує спільна функція Ляпунова для всіх підсистем (2), а також кількість переключень та час є скінченними,

$$b(t,0) = 0\,, G(t,0) = 0\,. \tag{6}$$

Нехай переключення відбуваються в моменти часу $t_0, t_{1\ldots,} t_0 < t_1 < \ldots i$.

$$\lim_{x\to 0}\inf_{t>0} V(t,x) = \infty\,. \tag{7}$$

Тоді має місце

Теорема 3. Якщо існує спільна функція Ляпунова для системи (2) та виконується (6), (7), то тривіальна орбіта системи (2) є нестійкою за ймовірністю.

Доведення.

Запишемо для кожного $t_j \in \{t_0, t_1, ...\}$ формулу Іто:

$$V(t_j, X(t_j)) = V(t_{j-1}, X(t_{j-1})) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} LV(s, X(s))ds + + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{k,l}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} G_{kl}^q d\xi_l(s)\,,$$

де q – підсистема, що активна на інтервалі $[t_{j-1}, t_j]$. Математичне сподівання другого інтегралу дорівнює 0. Візьмемо математичне сподівання від обох частин рівності, отримаємо

$$MV(t_j, X(t_j)) \le MV(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \le \le ... \le MV(0, X(0)) = V(s, x_0)\,. \tag{8}$$

Позначимо через $\tau_{r,\varepsilon}$ момент першого досягнення множини $\{| x |= r\} \bigcup \{| x |= \varepsilon\}$, $\tau_{r,\varepsilon}(t) = \min(\tau_{r,\varepsilon}, t)$. Враховуючи (8), отримаємо, що

$$MV(\tau_{r,\varepsilon}(t), X^{s,x}(\tau_{r,\varepsilon}(t)) \le V(s, x_0).$$

Відомо [10], якщо $LV \le 0$, то розв'язок $dX(t) = b(t, X)dt + G(t, X)d\xi(t)$, що розпочинається в $\varepsilon <| x |< r$, з ймовірністю 1 виходить за межі цієї області за скінченний час, якими б достатньо малими не були r і $\varepsilon > 0$. Врахувавши це, перейдемо до границі при $t \to \infty$ і отримаємо

$$MV(\tau_{r,\varepsilon}, X^{s,x}(\tau_{r,\varepsilon})) \le V(s, x_0).$$

З нерівності Чебишова випливає оцінка

$$P\{\sup_{0<t<\tau^{\varepsilon}} |X^{s,x}(t)|< r\} \inf_{|x|<\varepsilon, t>0} V(t,x) < V(s,x_0), \tag{9}$$

де τ^{ε} – момент першого досягнення множини $|x|=\varepsilon$. Відомо [1], що якщо коефіцієнти (2) задовольняють (6) і умові Ліпшиця в кожній обмеженій по x області, то точка $x=0$ недосяжна для траєкторії розв'язку при $x_0 \neq 0$. Тоді $\tau^{\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ з ймовірністю 1. З співвідношення (9) і (7) отримаємо твердження теореми при $\varepsilon \to 0$. Теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли різним підсистемам системи (2) відповідають різні функції Ляпунова.

Зробимо такі припущення для кожної з підсистем (2):

а) $b(t,0)=0$, $G(t,0)=0$, $\forall i \in Q$;

б) для будь-якого $i \in Q$ існує двічі неперервно-диференційована, додатно визначена функція V^i, така, що $\lim\limits_{x\to 0} \inf\limits_{t>0} V^i(t,x)=\infty$;

в) для $\forall i \in Q$ b^i, G^i задовольняють умові існування єдиного розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь.

Переключення між станами описується послідовністю $S = x_0;(i_0,t_0),(i_1,t_1),...,$ де (i_j,t_j) означає, що система перебуває у стані з номером i_j і поведінка гібридного автомата описується системою $dX(t) = b^{i_j}(t,X)dt + G^{i_j}(t,X)d\xi(t)$ для $t_j < t < t_{j+1}$.

Позначимо через $S\,|\,i = \tau_0^i, \tau_1^i,...$ і $I(S\,|\,i) = \bigcup_{j\in N}[\tau_{2j}^i, \tau_{2j+1}^i]$ кінці інтервалів та, відповідно, множини інтервалів, на яких i-а підсистема активна.

Теорема 4. Нехай виконуються умови а), б), в) для кожної підсистеми (2) і $\forall i \in Q$ виконується

$$LV^i = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} b_j^i(t,x)\frac{\partial V^i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}^i(t,x)\frac{\partial^2 V^i}{\partial x_j \partial x_k} \le 0,$$

$$\forall t \in I(S\,|\,i), x \in U_r, \forall j \in N,$$

$$MV^i(\tau_{2j}^i, x(\tau_{2j}^i)) \ge MV^i(\tau_{2j+1}^i, x(\tau_{2j+1}^i)), \tag{10}$$

$$MV^i(\tau_0^i, x(\tau_0^i)) \le MV^{i_0}(\tau_0^{i_0}, x(\tau_0^{i_0})) = V^{i_0}(s,x_0). \tag{11}$$

Тоді тривіальна фазова орбіта стохастичного гібридного автомата нестійка за ймовірністю.

Доведення.

Позначимо через $\tau_{r,\varepsilon}$ момент першого досягнення множини $\{|x|=r\} \cup \{|x|=\varepsilon\}$, $\tau_{r,\varepsilon}(t) = \min(\tau_{r,\varepsilon}, t)$. Зрозуміло, що $\exists j : \tau_{r,\varepsilon}(t) \in I(S\,|\,j)$.

Врахувавши (10), (11), отримаємо, що

$$MV^j(\tau_{r,\varepsilon}(t), X^{s,x}(\tau_{r,\varepsilon}(t)) \le V^{j_0}(s,x_0).$$

Відомо [10], якщо $LV \le 0$, то розв'язок системи

$$dX(t) = b(t, X)dt + G(t, X)d\xi(t),$$

що розпочинається в області $\varepsilon < |x| < r$ з ймовірністю 1, виходить за межі цієї області за скінченний час, якими б достатньо малими не були r і $\varepsilon > 0$.

Врахувавши це, перейдемо до границі при $t \to \infty$ і отримаємо

$$MV^{j}(\tau_{r,\varepsilon}, X^{s,x}(\tau_{r,\varepsilon})) \le V^{j_0}(s, x_0).$$

З нерівності Чебишова випливає оцінка

$$P\{\sup_{0<t<\tau^{\varepsilon}} |X^{s,x}(t)| < r\} \inf_{|x|<\varepsilon, t>0} V^{j}(t,x) < V^{j_0}(s,x_0) \le \max_{i_0}\{V^{i_0}(s,x_0)\}, \quad (12)$$

де τ^{ε} – момент першого досягнення $|x| = \varepsilon$. Відомо [10], що якщо коефіцієнти (2) задовольняють (6) і умові Ліпшиця в кожній обмеженій по x області, то точка $x = 0$ недосяжна для його траєкторії, якщо $x_0 \ne 0$. Тоді $\tau^{\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ з ймовірністю 1. З співвідношення (12) і б) отримаємо твердження теореми при $\varepsilon \to 0$. Теорему доведено.

3. Висновок

У статті були розглянуті стохастичні гібридні автомати. Дається означення нестійкого локального стану, означення стійкості та нестійкості тривіальної фазової орбіти стохастичного гібридного автомата. Дослідження нестійкості проводиться за допомогою другого методу Ляпунова. Для цього пропонується використовувати гібридну u-функцію, тобто для кожного локального стану будується власна функція Ляпунова, яка задана саме на цьому стані. Для окремих випадків нестійкість можна досліджувати за допомогою спільної функції Ляпунова.

У статті доведені теореми, що дають достатні умови нестійкості тривіальних фазових орбіт стохастичних гібридних автоматів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
2. Программное обеспечение моделирования непрерывно-дискретных систем / Под ред. В.М. Глушкова. – М.: Наука, 1975. – 280 с.
3. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. – М.: Наука, 1970. – 473 с.
4. Manna Z., Pnueli A. Verifying hybrid systems // In R. L. Grossman, A. Nerode, A.P. Ravn, H. Rischel, editors // Hybrid Systems. – 1993. – Vol. 736 of LNCS. – P. 4 – 35.
5. Filippov F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. – Kluwer Academic Publishers, 1988. – 304 p.
6. Harel D. Statecharts A. Visual Formalism for Complex Systems // Sci. Comput. Prog. – 1987. – N 8. – P. 231 – 274.
7. Бичков О. Дослідження стійкості тривіальних фазових орбіт гібридних автоматів // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. – 2005. – № 6. – С. 4 – 8.
8. Branicky M. Stability of switched and hybrid systems // Proc. 33-rd Conf. Decision and Control. – Lake Buena Vista, FL, 1994. – P. 3498 – 3503.
9. Ye H., Michel A., Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1998. – № 43. – P. 461 – 474.
10. Хасьминський Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука,1969. – 368 с.
11. Dimos V. Dimarogonas, Kostas J. Kyriakopoulos Lyapunov-like Stability of Switched Stochastic Systems // American Control Conference. – Boston, MA, 2004. – June. – P. 1868 – 1872.

Стаття надійшла до редакції 15.04.2008