

Аналитический расчет сильного формоизменения импульсно нагруженных эллиптических пластин

В. Н. Сторожук, В. А. Ромащенко, П. П. Лепихин, С. В. Жураховский

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

С использованием энергетического подхода аналитически исследуются большие прогибы импульсно нагруженных эллиптических и круглых пластин из упрочняющихся упругопластических материалов. Получены формулы, удобные для проведения инженерных расчетов.

Ключевые слова: эллиптические пластины, импульсное нагружение, интенсивность деформаций, упрочнение, большие прогибы.

В последнее время в листовой штамповке в качестве критерия разрушения широко применяются диаграммы предельного формоизменения. Экспериментально подобные диаграммы можно получить с помощью как гидростатического, так и гидродинамического выдавливания с использованием матриц с эллиптическими отверстиями. Аналогичные эксперименты проводятся при исследовании напряженного состояния листовых материалов при различных соотношениях главных напряжений. При этом возникает необходимость получения аналитической зависимости конечного прогиба пластин эллиптической формы от внешней нагрузки. Существует большое количество аналитических решений для круглых пластин при импульсном нагружении с использованием жесткопластической модели. Решения с учетом упрочнения либо выражены в неявном виде, либо требуют проведения итерационных вычислений, что затрудняет их использование в инженерной практике. Численно и экспериментально подобные нестационарные задачи для круглых и эллиптических упругопластических упрочняющихся пластин исследовались ранее [1, 2]. Авторам неизвестны аналитические решения для эллиптических пластин, испытывающих большие прогибы в динамике с учетом упрочнения материала.

При нагружении круглых пластин широкое применение получил энергетический подход [3], при котором работа пластических деформаций пластины приравнивается к энергии нагружающего импульса. В данном сообщении энергетический подход используется для получения аналитического решения для нагруженных равномерным распространяющимся в жидкости импульсом давления $P(t)$, зависящим только от времени t , неподвижно закрепленных по контуру эллиптических или круглых пластин при больших прогибах с учетом упрочнения материала. С помощью указанного подхода можно получить выражения, удобные для использования в инженерных расчетах. При этом, следуя [3, 4], можно записать

$$W = SE_y = \pi ab l^{-1} \int_0^{\infty} P^2(t) dt, \quad (1)$$

где W – работа пластических деформаций пластины; S – площадь пластины; E_y – удельная энергия ударной волны в жидкости на единицу площади; a и b – полуоси эллипса; I – акустический импеданс жидкости. В соответствии с [4] выражение в правой части (1) представляет собой полную энергию ударной волны в жидкости.

Для импульса давления полусинусоидальной формы получим

$$P(t) = P_0 H(T - t) \sin(\pi t/T),$$

где T – длительность импульса; P_0 – его амплитуда; $H(x)$ – функция Хевисайда. Тогда

$$E_y = \frac{P_0^2 T}{2I}. \quad (2)$$

В случае экспоненциальной нагрузки $P(t) = P_0 e^{-\alpha t}$ будем иметь

$$E_y = \frac{P_0^2}{2I\alpha}.$$

В работе [5] А. Надаи получил выражение для интенсивности деформаций ε_i неподвижно закрепленной по контуру эллиптической пластины под действием статического равномерного давления. При этом полагалось, что изогнутая форма эллиптической пластины описывается выражением

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

координатные оси x, y совпадают с осями симметрии эллипса.

Данный подход соответствует мембранному приближению и им можно пользоваться при достаточно развитых пластических деформациях, когда влиянием моментности на напряженно-деформированное состояние пластины можно пренебречь [6]. Также допускалось, что материал несжимаем (в пластической области это справедливо [7]) и соответствующие компоненты тензора деформаций находятся в таком соотношении:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_0; \quad \varepsilon_h = -2\varepsilon_0, \quad (3)$$

где $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_0$ – радиальная, окружная и толщинная деформации соответственно; h – толщина пластины.

Тогда

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_h)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_h)^2} = 2\varepsilon_0.$$

Исходя из этих предположений А. Надаи получил следующее выражение для интенсивности деформаций эллиптической пластины:

$$\varepsilon_i = \frac{w_0^2}{2ab} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим материалы, для которых зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций аппроксимируется степенным законом:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m. \quad (5)$$

Для других диаграмм деформирования существуют стандартные методы пересчета их в эквивалентные степенные функции (5). В соответствии с [7] удельная энергия деформирования на единицу объема материала определяется так:

$$u = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (6)$$

Из (5) и (6) будем иметь

$$u = A\varepsilon_i^{m+1} / (m+1). \quad (7)$$

Подставляя (4) в (7) и вводя обозначение $a/b = n$, получаем

$$u = \frac{A}{m+1} \left[\frac{w_0^2}{2a^2} (1+n^2) \right]^{m+1}.$$

Тогда из (1), (2), учитывая, что $W = \pi abhu$, для импульса давления полусинусоидальной формы запишем

$$w_0 = a \sqrt{\frac{2}{n^2+1} \left[\frac{P_0^2 T(m+1)}{2LAh} \right]^{1/(m+1)}} \quad (8)$$

или для импульсов другой формы –

$$w_0 = a \sqrt{\frac{2}{n^2+1} \left[\frac{E_y(m+1)}{Ah} \right]^{1/(m+1)}}, \quad (9)$$

где h – начальная толщина пластины;

$$E_y = I^{-1} \int_0^{\infty} P^2(t) dt.$$

Частный случай. Круглая пластина. Принимая $a = R$ и $n = 1$, получаем

$$w_0 = R \sqrt{\left[\frac{P_0^2 T(m+1)}{2IAh} \right]^{1/(m+1)}} \quad (10)$$

Это выражение можно уточнить, если отказаться от предположений (3) и принять согласно [8] следующее распределение деформаций по радиальной координате r :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{w_0^2}{R^2}.$$

Тогда средние по радиусу деформации будут равны:

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_0; \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{R} \int_0^R \varepsilon_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr = \frac{2}{3} \varepsilon_0.$$

Из условия несжимаемости имеем $\bar{\varepsilon}_h = -\frac{5}{3} \varepsilon_0$, следовательно,

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_h)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_h)^2} = \frac{4\sqrt{19}}{9\sqrt{3}} \frac{w_0^2}{R^2}.$$

Тогда согласно (7) получим

$$W = \frac{A}{m+1} \left(\frac{4\sqrt{19}}{9\sqrt{3}} \frac{w_0^2}{R^2} \right)^{m+1} \pi R^2 h,$$

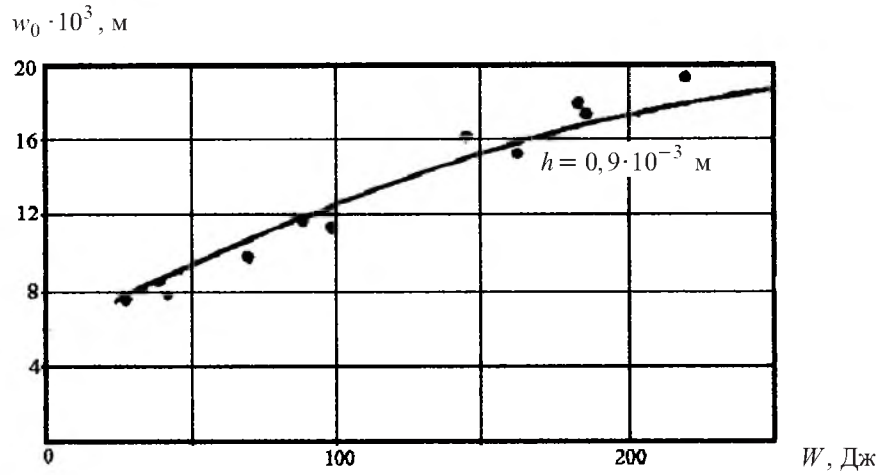
откуда с учетом (1) и (2) для импульса давления полусинусоидальной формы запишем

$$w_0 = R \sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{19}} \left[\frac{P_0^2 T(m+1)}{2IAh} \right]^{1/(m+1)}} \quad (11)$$

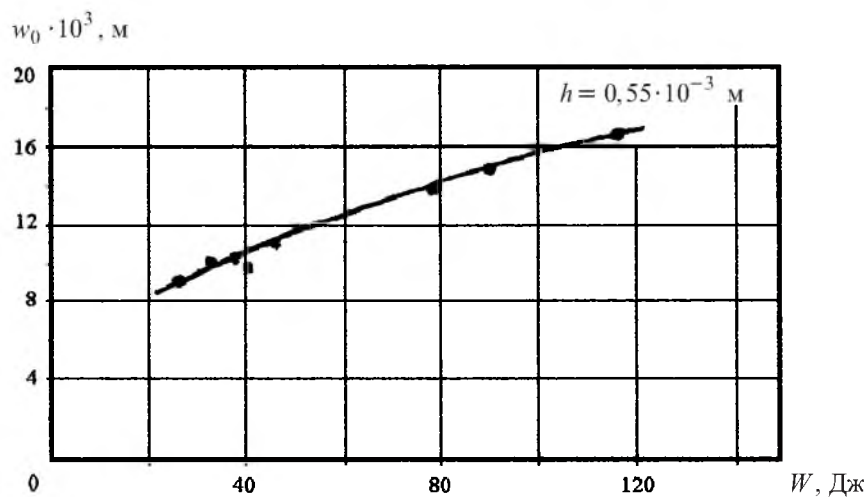
или для импульсов другой формы –

$$w_0 = R \sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{19}} \left[\frac{E_y(m+1)}{Ah} \right]^{1/(m+1)}} \quad (12)$$

Сравнивая выражения (10) и (11), видим, что их различие заключается в коэффициенте $\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{19}}} \approx 0,95$.



а



б

Рис. 1. Сравнение значений w_0 для круглых пластин радиусом $R = 0,028$ м, рассчитанных по формуле (12) – линии, с экспериментальными данными [9] – точки. (Длительность экспоненциального импульса давления составляла $3 \cdot 10^{-4}$ с. Материал – медь).

На рис. 1, 2 приведено сравнение значений w_0 и w_0/R для круглых пластин, рассчитанных по формуле (12), с экспериментальными данными работ [9, 10]. Установлено хорошее согласование между расчетными и экспериментальными данными, что позволяет рекомендовать полученные формулы для инженерных расчетов. В связи с тем что авторам неизвестны экспериментальные данные по импульсному нагружению эллиптических пластин, экспериментальная проверка выражений (8), (9) не производилась.

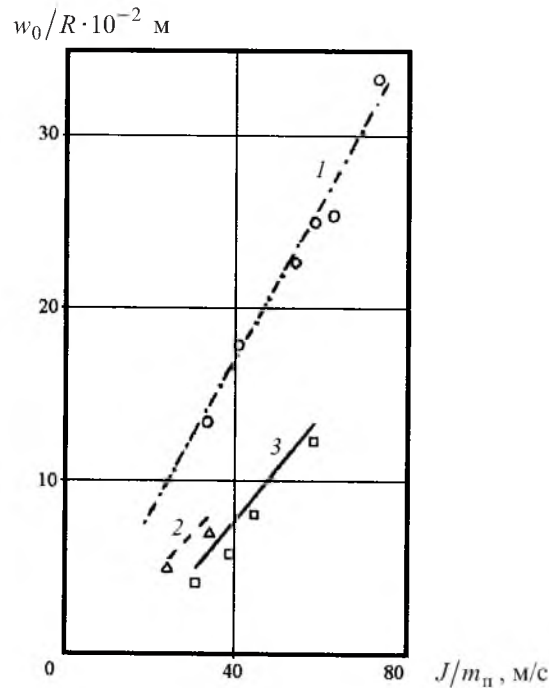


Рис. 2. Сравнение значений w_0/R для круглых пластин радиусом $R = 0,05$ м и толщиной $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м, рассчитанных по формуле (12) – линии, с экспериментальными результатами [10] – точки при разном времени импульсного нагружения T : 1 – $T = 7$ мкс; 2 – $T = 50$ мкс; 3 – $T = 100$ мкс. (Вдоль оси абсцисс отложено отношение импульса снаряда J к массе пластины $m_{п}$. Материал – листовая малоуглеродистая сталь.)

Резюме

Із використанням енергетичного підходу аналітично досліджуються великі прогини імпульсно навантажених еліптичних і круглих пластин із пружно-пластичних матеріалів, що зміцнюються. Отримано формули, що зручні для проведення інженерних розрахунків.

1. Ромащенко В. А. Метод исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщ. 1. Теория и численный метод // Пробл. прочности. – 1996. – № 3. – С. 5 – 19.
2. Ромащенко В. А., Сторожук В. Н. Метод исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщ. 2. Расчеты и эксперимент // Там же. – № 4. – С. 41 – 48.
3. Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. – New York: McGraw-Hill, 1959. – 605 p.
4. Müller M. Stobwellenfokussierungen Wasser: Dissertation, RWTH Aachen, Deutschland, 1987.
5. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. – New York: McGraw-Hill, 1963. – Vol. 2. – 705 p.

6. Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др. Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
7. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
8. Мисевич Ю. П., Рудис М. А. Большие пластические деформации круглых плоских мембран при статических и динамических нагрузках // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 1. – С. 26 – 29.
9. Kosing O. E. and Skews B. W. An investigation of high-speed forming of circular plates in a liquid shock tube // Int. J. Impact Eng. – 1998. – **21**, No. 2. – P. 801 – 816.
10. Степанов Г. В., Коваленко А. В. Неупругий прогиб пластин при кратковременном импульсном нагружении / АН УССР. Ин-т пробл. прочности – Препр. – Киев, 1991. – 40 с.

Поступила 10. 11. 2001

В № 2 за 2002 г. в статье Н. А. Долгова “Влияние модуля упругости покрытия на работоспособность системы основа–покрытие” автором допущены следующие неточности:

на стр. 66 (2-я строка снизу) вместо “где коэффициенты L и k являются ...” следует читать “где коэффициенты L (размерность Па/м) и k (размерность м^{-1}) являются ...”;

на стр. 67 (4-я строка сверху) вместо “... $2l$ – длина покрытия; p – нагрузка, прикладываемая к основе.” следует читать “... $2l$ – длина покрытия (размерность м); p – интенсивность нагрузки (размерность Па), прикладываемой к основе.”