УДК 519.1

В.Б. ПАВЛЕНКО

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА

Рассматривается несколько подходов к решению проблемы построения гамильтонова цикла в плоском графе, которая часто возникает при компьютерном моделировании различных задач производственного планирования, маршрутизации данных и других.

Введение. При рассмотрении задач планирования производства, экономии природных ресурсов, задачи коммивояжера, задачи о ходе коня и многих других задач, а также методов их решения (включая эвристические и генетические алгоритмы) приходится столкнуться с проблемой нахождения пути, который проходил бы через все точки только один раз, т. е. «гамильтонова пути». При компьютерном моделировании этих задач необходимо убедится, что граф действительно имеет гамильтонов цикл. Эта задача часто бывает сложной и имеет несколько путей возможного решения.

Свое название гамильтонов цикл получил от задачи «Кругосветное путешествие» предложенной ирландским математиком Вильямом Гамильтоном в 1859 году. Нужно было, выйдя из исходной вершины графа, обойти все его вершины и вернуться в исходную точку. Граф представлял собой укладку додекаэдра, узловые вершины которого символизировали крупнейшие города Земли, а рёбра – соединяющие их дороги.

Позднее задача трансформировалась – необходимо найти простой цикл, содержащий все вершины графа. Такой цикл называют гамильтоновым циклом, а содержащий его граф – гамильтоновым графом. Граф, который содержит простой путь, проходящий через каждую его вершину, называется полугамильтоновым. Ясно, что всякий гамильтонов граф является полугамильтоновым [1]. Заметим, что гамильтонов цикл существует далеко не в каждом графе.

Задача проверки существования гамильтонова цикла является NP-полной (т. е., к которой можно свести любую другую задачу из класса NP за полиномиальное время). Это делает NP-полные задачи в некотором смысле «самыми сложными» задачами в классе NP, и если для какой-то из них будет найден «быстрый» алгоритм решения, то и любая другая задача из класса NP может быть решена так же «быстро».

Критерии существования гамильтонова цикла. Проблема поиска гамильтонова цикла является одной из наиболее известных NP-полных проблем теории графов. Очевидно, что если генерировать все *n!* различных последовательностей вершин и для каждой из них проверить, определяет ли она гамильтонов путь, то это потребует *n!n* шагов. Этот процесс может затратить огромное количество времени.

Для решения этой проблемы существуют несколько подходов.

Условие Дирака, предложенное в 1952 г. Полем Дираком.

Если в простом графе G с ($n \geq 3$) вершинами $p(\upsilon) \geq \frac{n}{2}$ для любой вершины υ, то граф G является гамильтоновым [2].

Условие Оре, которое было предложено в 1960 г. норвежским математиком Ойстином Оре.

Пусть p – количество вершин в данном графе. Если для любой пары несмежных вершин x, y выполняется неравенство $d(x)+d(y) \geq p$, т. е. степени любых двух несмежных вершин не меньше общего числа вершин в графе, то такой граф называется графом Оре. Граф Оре - гамильтонов.

Теорема Бонди – Хватала. Граф является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание – гамильтонов граф.

Эта теорема обобщает утверждения Дирака и Оре. Для графа G с n вершинами замыкание определяется добавлением в G ребра (u,v) для каждой пары несмежных вершин u и v, сумма степеней которых не меньше n.

Условие Поша. Пусть для графа $G=[A,B]$ построена функция целого неотрицательного аргумента x (то есть, функция в каждом целом неотрицательном x принимает значение, равное количеству вершин графа G, степень которых не превышает x) вида $f(x)=|\{a \in A \mid d(a) \leq x\}|$. Такую функцию называют функцией Поша.

Пусть p – количество вершин в данном графе $G=[A,B]$, $f(x)$ – его функция Поша, а x – целое число.

Графом Поша называется граф $G=[A,B]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) для $1 \leq x \leq \frac{p-1}{2}$ выполняется неравенство $f(x) < x$;

2) если $\dfrac{p-1}{2}$ – целое число, то при $x=\dfrac{p-1}{2}$ имеет место неравенство $f(x)\le\dfrac{p-1}{2}$.

Нетрудно заметить, что всякий граф Дирака является графом Поша. То же верно и в отношении графов Оре: каждый граф Оре является графом Поша. Обратное в обоих случаях неверно.

Следуя вышеизложенному, можно утверждать, что задача построения гамильтонова цикла сводится к построению цепи, которая будет удовлетворять одному из критериев существования гамильтонова цикла. Гамильтонов цикл легко искать, если граф имеет вид замкнутых контуров, соединенных более чем через две точки друг с другом. Однако не всегда можно определить внешний вид графа (скажем из-за количества вершин). Поэтому необходимо искать различные методы, позволяющие построить гамильтонов цикл, не опираясь на размер графа.

Различные методы построения гамильтонова цикла. Известно, что почти все графы гамильтоновы, т. е. $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{H(p)}{G(p)}=1$, где $H(p)$ – множество гамильтоновых графов с p вершинами, а $G(p)$ – множество всех графов с p вершинами. Таким образом, задача отыскания гамильтонова цикла или эквивалентная задача коммивояжера являются практически востребованными, но для нее неизвестен (и, скорее всего не существует) эффективный алгоритм решения [3].

Также на сегодня не существует никакого простого критерия или алгебраического метода, позволяющего ответить на вопрос, существует или нет в произвольном графе G гамильтонов цикл. Критерии существования, данные выше, представляют теоретический интерес, но являются слишком общими и не пригодны для произвольных графов, встречающихся на практике.

Гамильтонов цикл представляет собой, с комбинаторной точки зрения, последовательность вершин графа или ее перестановку. При этом в качестве начальной вершины цикла можно выбрать любую вершину, так что можно рассматривать перестановки с фиксированным первым элементом. Самый бесхитростный план поиска гамильтонова цикла состоит в последовательном рассмотрении всех этих перестановок и проверке для каждой из них, представляет ли она цикл в данном графе. Такой способ действий уже при не очень большом числе вершин становится практически неосуществимым ввиду быстрого роста числа перестановок (имеем $(n\text{-}1)!$ перестановок из n элементов с фиксированным первым элементом).

Более рациональный подход состоит в рассмотрении всевозможных простых путей, начинающихся в произвольно выбранной стартовой вершине a, до тех пор, пока не будет обнаружен гамильтонов цикл или все возможные пути не будут исследованы. По сути, речь также идет о переборе перестановок, но значительно сокращенном (например, если вершина b не смежна с вершиной a, то все $(n\text{-}2)!$ перестановок, у которых на первом месте стоит a, а на втором b, не рассматриваются).

Графический метод работает лишь в простых случаях, а алгебраические методы определения гамильтоновых циклов не могут быть применены с более чем несколькими десятками вершин, так как они требуют слишком большого времени работы и большой памяти компьютера.

В 1980 г. Асано Т., Кайкучи С., и Сэйто Н. предложили свой эффективный алгоритм для поиска гамильтонова цикла в произвольном 4-связном максимальном планарном графе. Для построения гамильтоновых циклов здесь использовалась упрощенная версия доказательства теоремы Уитни: каждый 4-связный максимальный планарный граф имеет гамильтонов цикл. Несмотря на поддержку финансированием и помощь министерства образования, науки и культуры Японии, к сожалению, подробные исследования этого метода не проводились [4].

На данный момент наиболее приемлемым является способ Робертса и Флореса, который не предъявляет чрезмерных требований к памяти компьютера, но время его выполнения зависит экспоненциально от числа вершин в графе. Однако другой неявный метод перебора имеет для большинства типов графов очень небольшой показатель роста времени вычислений в зависимости от числа вершин. Он может быть использован для нахождения гамильтоновых циклов в очень больших графах.

В противоположность алгебраическим методам, с помощью которых пытаются найти сразу все гамильтоновы циклы и при реализации которых приходится хранить все цепи, которые могут оказаться частями таких циклов, метод перебора имеет дело с одной цепью, непрерывно продлеваемой до того момента, когда либо отыскивается гамильтонов цикл, либо становится ясно, что эта цепь не может привести к гамильтонову циклу. Тогда цепь модифицируется некоторым систематическим способом (который гарантирует, что, в конце концов, будут исчерпаны все возможности), после чего продолжается поиск гамильтонова цикла. Этот метод не предъявляет чрезмерных требований к памяти компьютера, для поиска требуется очень небольшой объем памяти и за один запуск алгоритма находится один гамильтонов цикл. Этот метод может быть использован для нахождения гамильтоновых циклов в очень больших графах.

Также для этого метода есть небольшое улучшение, которое позволяет немного сократить расчеты, однако после внимательного изучения операций алгоритма становится очевидным, что по сути улучшенный вариант алгоритма Робертса и Флореса не намного лучше первоначального варианта этого алгоритма. Необходимое время вычисления в нем все еще зависит (более или менее) экспоненциально от n. Вычисления при использовании этих двух алгоритмов для неориентированных графов со степенями вершин 3 - 5 на практике показывают, что «улучшенный» вариант в действительности хуже для графов малых размеров, хотя для больших графов (с более чем 20 вершинами) он позволяет сэкономить более 50 % времени вычисления. Все дело в том, что даже после сделанного улучшения не слишком много внимания уделяется оставшейся части графа, в которой берется последовательность вершин, продолжающих построенную цепь. В этом случае используют мультицепной алгоритм, который в качестве своей основы использует метод Роберта и Флореса и отличается от него наличием операции возвращения (когда начальная вершина поиска удаляется и заменяется другой вершиной) [5].

На практике мультицепной алгоритм показывает высокие показатели эффективности. Время его работы растет очень медленно в зависимости от числа вершин и поэтому алгоритм применим для очень больших графов.

Другим преимуществом этого метода является очень слабая вариация времени для различных графов одинакового размера, и поэтому можно оценить с разумной степенью доверительности время вычисления, необходимое для различных задач.

Кроме того, эксперименты показывают, что для графов, степени вершин которых лежат в вышеприведенных пределах 3 – 5, метод по существу не чувствителен к степеням вершин.

Небезынтересно сказать несколько слов о вычислениях с тремя алгоритмами, когда искались все гамильтоновы циклы. На практике редко применяют все три алгоритма сразу. Это не повышает точность оценки, а сложность расчетов и громоздкость программы увеличивается. Более того, ошибка в вычислениях также растет – как правило, это 5 – 10 %. Этот недостаток компенсируется для комбинаторных задач относительно высокой скоростью работы.

Заключение. Применение алгоритмов построения гамильтоновых цепей имеет важное практическое значение и используется при изучении различных задач планирования, транспортных и коммуникационных систем, в частности, для маршрутизации данных в Интернете, при компьютерном моделировании различных практических задач, проблем экономики и разработке систем с возобновляемыми источниками энергии.

К сожалению, на сегодня не существует универсального метода построения гамильтонова цикла, а существующие методы способны решать лишь отдельные поставленные цели. Так, имея множество преимуществ, метод Робертса и Флореса уступает более быстрому мультицепному методу, который во много раз сложнее в реализации.

В. Б. Павленко

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ ГАМІЛЬТОНОВА ЦИКЛА

Розглядається декілька підходів до вирішення проблеми побудови гамільтонова цикла в плоскому графі, яка часто виникає при комп'ютерному моделюванні різних завдань планування, маршрутизації даних та інших.

V. B. Pavlenko

METHOD THEORETICAL ASPECTS OF CONSTRUCTING A HAMILTONIAN CYCLE

Consider several approaches to solving the problem of constructing a Hamiltonian cycle in a planar graph, which often arises in computer modeling of the various tasks of planning, routing data, and others.

1. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, опитимизация. – М.: Наука, 1981. – 341 с.
2. *Дойбер В. А., Косточка А. В., Закс Х.*. Более короткое доказательство теоремы Дирака о числе ребер в хроматически критических графах // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирский гос. ун-т, 1996. – С. 28–34.
3. *Харари Ф*. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
4. *A linear* algorithm for finding Hamiltonian cycles in 4-connected maximal planar graphs [Електронний ресурс] / *T. Asano, S. Kikuchi, N. Saito.* // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – № 7. – С. 15. – Режим доступу до журнала: http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6TYW-45FKTSV-45&_user=10&_origUdi=B6WH3-4D7JN6P-57&_fmt=high&_coverDate=01%2F31%2F1984&_rdoc=1&_orig=article&_origin=article&_zone=related_art&_acct=C000050221&_version=1&_urlVersion=0&_userid=10&md5=1742246037e33694e1e29159fc9f520f
5. *Кристофидес Н*. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

Получено 07.04.2011