Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

А.Г. ДОНЕЦЬ, І.Е. ШУЛІНОК

КООРДИНАТНИЙ МЕТОД ЛОКАЛІЗАЦІЇ ЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Розглядається задача локалізації лінійної функції на перестановках. Пропонується метод її розв'язання, який є новим та кращим серед відомих.

Багато екстремальних задач комбінаторної оптимізації, такі як планування роботи підприємства, розподіл ресурсів, задача управління, мережеве планування описуються моделями дискретної оптимізації. Із задач дискретного моделювання виділяються задачі комбінаторної оптимізації, які виникають у найрізноманітніших галузях людської діяльності. Загальна задача комбінаторної оптимізації полягає у відшуканні екстремуму довільної цільової функції на довільних комбінаторних конфігураціях. Застосування теорії графів до розв'язання таких задач дає в багатьох випадках можливість отримати розв'язок з меншими витратами комп'ютерних ресурсів. Як відомо [1], множину перестановок можна представити у вигляді графа перестановок $G(P_n)$, який є об'єднанням підграфів меншої розмірності. Кожній послідовності з множини перестановок $P(A)$ ставимо у відповідність вершину графа $G(P_n)$. Для такого графа дві вершини будемо визнавати суміжними, якщо коди відповідних перестановок відрізняються одноразовою транспозицією двох елементів. З'єднуючи відповідні вершини по ходу генерації перестановок, одержуємо спочатку неорієнтований граф. Якщо в кожній вершині графа знайти відповідне значення заданої цільової функції $F(x)$, то стосовно значень функції можна побудувати орієнтований граф, зорієнтувавши його ребра у напрямі від більшого значення функції до меншого.

Особливо це ефектно виходить щодо лінійних упорядкованих функцій, які мають вигляд $F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, де $c_1 \le c_2 \le ... \le c_n$ (рис. 1).

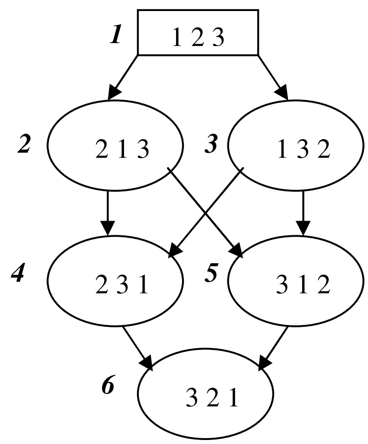

РИС. 1. Структура значень $F(x)$ для $n=3$

Стосовно цих функцій легко довести таке твердження.

Лема 1. Якщо з перестановки $p_1=(i_1,i_2,...i_n)\in P(A)$ одержана перестановка $p_2\in P(A)$ транспозицією двох чисел $i_k<i_l$, де $k<l$, то $F(p_1)\ge F(p_2)$.

На графі перестановок досить часто виникає наступна задача: знайти множину перестановок, на яких значення цільової функції дорівнює заданому значенню, тобто знайти

$$x^* = \arg_{x\in P_n} f(x), \text{ де } f(x^*) = y. \tag{1}$$

Також має сенс розглянути аналогічну задачу, якщо не завжди існують перестановки, в яких цільова функція приймає задане значення. Тоді зформульована вище проблема постане як задача**:** визначити множину пар перестановок $(\underline{x},\overline{x})$**,** для яких за заданого y має місце

$$\overline{x} = \arg\min_{f(x)>y} f(x), \ \underline{x} = \arg\min_{f(x)<y} f(x). \tag{2}$$

Задачі (1)-(2) мають спільну назву задачі локалізації значень цільової функції на перестановках. У роботі [2] описано горизонтальний метод розв'язання цієї задачі.

Слід зазначити, що значення функції на графі перестановок у напрямку знизу вверх зростає, а зверху вниз – спадає при рівномірному розподілі значень коефіцієнтів. Це обумовлено ієрархічною будовою цього графа та лінійністю цільової функції. При цьому поняття „верх”, або „низ” мають стабільний структурний зміст у відношенні підграфів у рамках об’єднуючого графа. Так, наприклад, підграф $G(P_3)$, зображений на рис.1, є складовою частиною всіх графів з більшою кількістю координат. Чотири підграфа $G(P_3)$, як показано на рис. 2, складають граф $G(P_4)$), п’ять підграфів $G(P_4)$, або 20 підграфів $G(P_3)$, складають $G(P_5)$ і так далі. Це означає, що для довільного n значення цільової функції в шести вершинах підграфа $G(P_3)$, у яких до координат справа дописані числа 4, 5, 6, ..., n-1, n, складають шість найбільших серед n! значень функції. Починаючи з одної із цих вершин, можна визначити множину шляхів, на яких значення функції спадає.

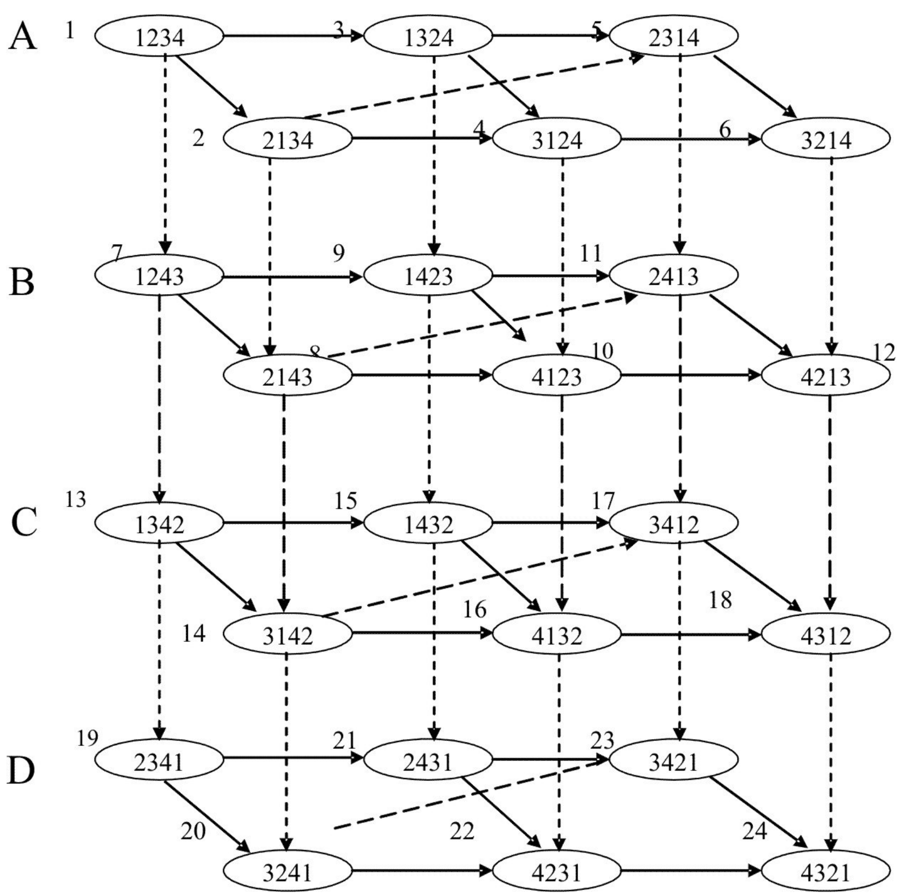

РИС. 2. Структура значень $F(x)$ для $n = 4$

Це і є підґрунтям для координатного методу локалізації функції. Розглянемо його суть на прикладі з такою функцією $f(x) = 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 6x_6$. Треба знайти перестановки x^*, в яких $f(x^*)=y^*=109$. Після упорядкування ця функція має вигляд $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6$.

Будемо поступово розглядати підграфи G_i, тобто підграфи, у яких фіксована остання координата – у даному прикладі $n = 6$, а $x_6 =1,2,3,4,5,6$, або $x_6 \in N_6$. Кожній вершині графа на рис.1, в залежності від її типу, можна поставити у відповідність свій підграф G_i (рис. 3). Під типом вершини розуміється наступне: якщо шоста координата для всього графа постійна (на рис.3 це 2), то п'ята і четверта змінюються від більшої можливої до меншої. Якщо три старші координати вже вибрані, то порядок перших трьох, який відповідає одній з шести вершин на рис.1, визначає тип вершини. Пояснимо побудову і структуру рис. 3.

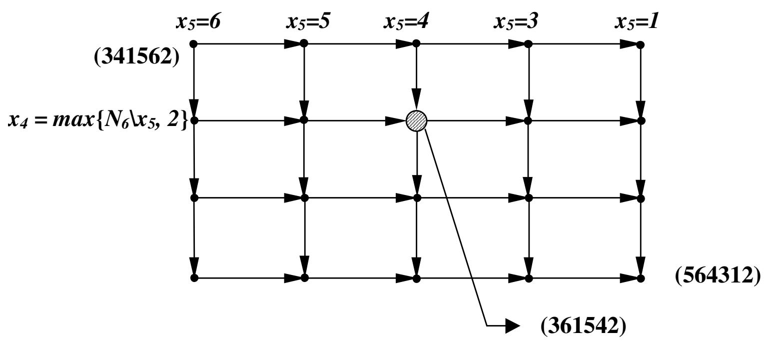

РИС.3. Схема підграфа G_2 для типу вершин (231)

Граф представляє мережу, де витоком є найвища і найлівіша вершина, а стоком – найнижча і найправіша вершина. Нехай на рис.3 як тип вибрано вершину (231). Тоді координати витока такі: $x_6 = 2$, $x_5 = 6$, $x_4 = 5$. Упорядкуємо інші координати, що залишилися. $i_1=1$, $i_2 =3$, $i_3 =4$. Тип вершини зобов'язує, щоб нижні індекси перших трьох координат були відповідно (231), тобто код витоку має вигляд (341562). Аналогічно знаходимо координати стоку.Ясно, що тут четверта і п'ята координати вибираються як найменші можливі, тобто $x_6 = 2$, $x_5 = 1$, $x_4 = 3$. Для перших трьох координат маємо $i_1=4$, $i_2 =5$, $i_3 =6$, і код стоку має вигляд (564312). Для довільної вершини цього підграфа (на рис. 3 вона заштрихована) застосовується той же принцип. Для неї $x_6 = 2$, $x_5 = 4$, а $x_4 = 5$ як друге за величиною значення серед залишених 1,3,5,6. Звідси код виділеної вершини (361542).

Тепер будемо розв'язувати поставлену задачу, при цьому дотримуючись таких правил: а) якщо в даній вершині значення функції менше заданого, то далі треба шукати це значення в сусідній вершині, збільшуючи четверту або п'яту координату; б) якщо в даній вершині значення функції більше заданого, то далі треба шукати це значення в сусідній вершині, зменшуючи четверту або п'яту координату.

Покажемо, що для розв'язування задачі не обов'язково розглядати всі коди підграфів типу на рис. 3 і обчислювати в них значення функції, а достатньо обчислити її значення у витоках мереж, які відповідають підграфам з фіксованим значенням шостої координати. Наприклад, виберемо тип вершини (213). Розглянемо підграфи G_i і для кожного обчислимо значення функції у витоках цих під графів (табл. 1).

ТАБЛИЦЯ 1

Підграф	Код витоку	Значення $f(x)$
G_6	213456	126
G_5	213465	125
G_4	213564	123
G_3	214563	119
G_2	314562	113
G_1	324561	108

Із табл. 1 видно, що підграф G_1 можна не розглядати, так як максимальне значення функції менше того значення, яке ми шукаємо. Отже, розглянемо інші підграфи, наприклад G_6 і дослідимо в ньому п'яту координату. Вона послідовно приймає значення $5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Відповідно до вектора коефіцієнтів функції $c = (2,3,4,6,7,8)$ це призведе до зменшення значення функції послідовно на $(c_5\text{-}c_4)=1$, $(c_5\text{-}c_3)=3$, $(c_5\text{-}c_1)=5$, $(c_5\text{-}c_2)=4$, а в сумі на 13. Тобто найменше значення при $x_4 = 4$ функція приймає у вершині (324516), а саме 126-13=113. Треба зменшувати значення x_4 . Це досягається транспозицією єлементів 5 і 4 та зменшенням значення функції на $(c_4\text{-}c_3)=2$, і воно стане рівним111.Але це все одно більше 109, тому знову замінюємо значення x_4 на 3, що зменшить значення функції на $(c_5\text{-}c_2)=4$, тобто до 107, у вершині (425316). Тепер це менше 109, тому треба збільшувати x_5 до 2, що досягається транспозицією чисел 2 та 1 і зростанням функції у вершині (415326) на $(c_4\text{-}c_1)=4$, тобто до 111. Знову зменшуємо значення x_4 до 1 шляхом транспозиції чисел 3 та 1.У вершині (435126) отримаємо зменшення функції на $(3\text{-}1)(c_4\text{-}c_2)=6$, тобто до 105. Необхідно збільшити x_5 до 3, переставляючи числа 2 і 3. Отримаємо значення функції 105 + $(c_5\text{-}c_2)=109$, що і було потрібно. Оскільки x_4 у цій вершині найменше, то більше в підграфі G_6 таких вершин не існує. Переходимо до $i< 6$.

Зробимо деякі узагальнення. Розв'язання задачі провадиться для всіх типів вершин. Для фіксованого типу вершин послідовно для кожного підграфу знаходяться необхідні вершини x^*, в яких $f(x^*) = y^*$. Будемо далі називати вершину-виток початковою вершиною графа G_i. Алгоритм пошуку необхідної вершини для підграфу G_i ($i = 1,2,...., n$) можна поділити на три етапи. Перший етап: побудова коду початкової вершини для G_i. Другий етап: розгортання графа вздовж координати x_4. Третій етап: розгортання графа вздовж координати x_5.

Опишемо кожний етап.

I. Нехай вибрано тип вершини (i_1, i_2, i_3), де $i_1 \cup i_2 \cup i_3 = \{1,2,3\}$, та номер підграфу i. Тоді покладемо: $x_6 = i$; $x_5 = \max\{N_6 \backslash x_6\}$, $x_4 = \max\{N_6 \backslash (x_5, x_6)\}$. Упорядкуємо числа $\{N_6 \backslash (x_4, x_5, x_6)\}$ по зростанню $j_1 < j_2 < j_3$. Тоді $x_1 = j_{i_1}$, $x_2 = j_{i_2}$, $x_3 = j_{i_3}$. Це і буде код головної виршини мережі G_i, який позначимо p_1(або q_1). Обчислимо значення цільової функції в цій вершині $f(p_1)$.

II. Розглянемо в цьому коді значення x_k (k = 1,2,3,4) та упорядкуємо їх за спаданням $x_4 = j_4 > j_3 > j_2 > j_1$. Розгортанням графа вздовж координати x_4 (або вниз) назвемо послідовність транспозицій $j_4 \Leftrightarrow j_3 \Leftrightarrow j_2 \Leftrightarrow j_1$, які крім коду головної вершини приводять до створення ще трьох кодів, які позначимо p_2, p_3 та p_4 і запишемо один під одним. Щоб знайти значення функції на цих перестановках, не обов'язково використовувати всі її координати. Достатньо знайти різницю значень функцій у сусідніх вершинах. Позначимо $\mu(\lambda)$ номер місця числа j_λ в коді перестановки p_1 (λ = 1,2,3). Тоді значення $f(p_2)$ буде менше $f(p_1)$ на величину $\Delta_1 = (j_4 - j_3)(c_4 - c_{\mu(3)})$. У другому множнику постійно буде величина c_4, тому що в транспозиції завжди бере участь координата x_4. Аналогічно знаходимо другу та третю різниці. Очевидно, що в процесі подальшого пошуку необхідно використовувати тільки ті перестановки, для яких $f(p_1) \geq y^*$.

III. Розглянемо в коді вершини p_k (яку позначимо q_1, (κ=1,2,3,4) значення x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 та упорядкуємо їх за спаданням. $x_5 = j_5 > j_4 > j_3 > j_2 > j_1$. Розгортанням графа вздовж координати x_5 (або праворуч) назвемо послідовність транспозицій $j_5 \Leftrightarrow j_4 \Leftrightarrow j_3 \Leftrightarrow j_2 \Leftrightarrow j_1$, які крім коду головної вершини мають привести до створення ще чотирьох кодів, які позначимо q_2, q_3, q_4 та q_5. Але ці коди створювати не обов'язково Так само, як і при розгортанні графа вниз, значення функції $f(q_2)$ у вершині q_2 буде меншим від значення $f(q_1)$ на величину $\delta_1 = (j_5 - j_4)(c_5 - c_{\mu(4)})$. За цією формулою знаходимо інші різниці. Послідовно віднімаючи δ_λ ($4 \geq \lambda \geq 1$) від $f(q_1)$, можемо отримати дві такі ситуації:

1. Всі значення функцій більші y*. У цьому випадку переходимо до розгортання наступного коду p_k.

2. На деякому кроці λ^* отримаємо значення функції у вершині рівне y*(або менше y*). У першому випадку запам'ятовуємо код відповідної вершини. Переходимо до розгортання наступного коду p_k, при цьому кількість кроків обмежується до λ^*-1.

Після розгортання всіх p_k (κ=1,2,3,4) пошук необхідних вершин підграфа G_i з фіксованим i закінчується.

Проведемо необхідні обчислення для всіх підграфів, наведених в табл. 1, використовуючи описані три етапи.

Для G_6 отримали вершину (425136), в якій f(425136) = 109. Розглянемо тепер G_5 і відповідну розгортку графа в табл..2, де перші числа – це значення функції у перестановці, а далі наведено її код. Для G_5 $p_{1=}$ q_1 = (213465), $f(q_1)$ = 125, (6 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 1).

ТАБЛИЦЯ 2

125 - 213465	**123** - 213645	**120** -214635	**115** – 314625	**111** – 324615
123 - 214365	**117 -** 216345	**116** -216435	**111 -** 316425	**107**- 326415
119 - 314265	**113 -** 316245	**108** -416235	**107 -** 416325	**103 -** 426315
116 - 324165	**110** -326145	**105** -426135	**101 -** 436125	**100** - 436215

Різниця значень пробігає числа (6-4)(7-6)=2, 7-4=3, 7-2=5, 7-3=4, у сумі дорівнює 14, тобто найменше значення функції при постійному значенні x_4 буде 125–14=111>109. Розгортаємо код p_2, для якого $f($214365) = 123, (6 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 1) і різниця значень пробігає числа (6-4)(7-4) = 6, 1, 5, 4, у сумі = 16. Значення функції спадають 123 – 117 – 116 – 111 – 107. Тут немає шуканої вершини, тому переходимо до коду p_3, при цьому будемо розгортати код на крок менше. Це дає значення функції $f($ $p_3)$ = f (314265) = 119, (6 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 2). Різниця їх значень пробігає числа (6-4)(7-4) = 6, 5, 1, а значення функції спадають 119 – 113 – 108 – 107. Тут також немає шуканої вершини, тому переходимо до коду p_4, в якому перевіряємо тільки один крок $f($ $p_4)$ = = f (324165) = 116. Сусідня вершина відрізняється транспозицією чисел 6 і 4, а функція на 6 менша, або дорівнює 110 < 109. Отже, у підграфі G_5 немає шуканих вершин.

Для G_4 p_1= (213564), $f(p_1)$= 123, (6 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 1). Різниця значень пробігає числа (7-6)=1, 2(7-4)=6, 7-2=5, 7-3=4, що дає послідовність спадання функції 123 – 122 – 116 – 111 – 107. Переходимо до p_2= (215364), $f(p_2)$= 119, а кроків робимо на один менше (6 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 2). Різниця значень пробігає числа (7-4)=3, 2(7-6)=2, 7-2=5, а функція спадає 119 – 116 – 114 – 109. Це значення шуканої вершини, а її код легко обчислити – (316524) за трьома транспозиціями над кодом p_2. Переходимо до коду p_3=(315264) і робимо два кроки– $f(p_3)$=115, (6 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 3). Це дає різниці 7-4=3, 2(7-2)=10, тобто спадання функції 112-102. Це означає, що при даному значенні x_4 шуканої вершини немає. Переходимо до коду p_4=(325164) і робимо один крок (6 $\Leftrightarrow$ 5). Це дає різницю 7-4=3, або значення функції 112-3=109. Так що в підграфі G_4 отримаємо дві шуканих вершини.

Переходимо до G_3, де код p_1= (214563), $f(p_1)$= 119, (6 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 1). Різницями будуть числа 1, 3, 10, 4. Спадання функції 119 – 118 – 115 – 105 – 101. Тут немає шуканої вершини, а в наступному коді робимо два кроки. $f(p_2)$= 117, а p_2 = (215463), (6 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 4), що відповідає різницям 3, 1. При цьому функція спадає –117 – 114 – 113. Для p_4 відразу отримуємо $f(p_3)$= 109, тому на цьому пошук в G_3 закінчується.

Залишилося зробити пошук у підграфі G_2. Код його головної вершини p_1= =(314562), $f(p_1)$= 113, (6 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 1). Різниці складають числа 1, 3, 5, 8.

Спадання функції наступне – 113 – 112 – 109 – 104 – 96. Тут маємо одну шукану вершину $f(x^*) = y^*$, де $x^* = (315642)$. Переходимо до коду вершини p_2= (315462), $f(p_2) = 111$, робимо один крок ($6 \Leftrightarrow 5$). Це приводить до транспозиції зі змешенням функції до 108. На цьому і закінчиться пошук на підграфі G_2, а тим самим на підграфі, що відповідає типу вершини (213). Внаслідок цього для даного типу вершини було знайдено 5 вершин, значення функції в яких дорівнює 109.

Схема пошуку необхідних вершин серед підграфів з фіксованим типом вершин не відрізняється від наведеної.

Слід зазначити такі відмінності алгоритму пошуку необхідних вершин координатним методом від горизонтального: перш за все, останній метод потребує менше обчислень. Необхідно обчислювати лише різниці значень функції, тоді як у попередньому методі кожний раз необхідно обчислювати значення функції в новій вершині, при цьому кожен раз відтворювати код вершини. Крім того, останній метод дозволяє декілька модифікацій, пов’язаних з обчисленням не тільки в кодах головних вершинах (витоках), а і симетричним підходом стосовно вершин-стоків та інших.

А.Г. Донец, И.Э. Шулинок

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Рассматривается задача локализации линейной функции на перестановках. Предлагается координатный метод ее решения, который является новым и лучшим среди известных.

A.G. Donets, I.E. Shulinok

COORDINATE METHOD FOR LOCALIZATION VALUES OF LINEAR FUNCTIONS DEFINED ON PERMUTATIONS

The problem of localization of a linear function on permutations is considered. We propose the coordinate method of its solution, which is new and best known.

1. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 1. – С. 10–16.
2. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Локализация значения линейной функции заданной на перестановках // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. – № 1. – С. 76–81.

Получено 15.04.2011