УДК 519.21

С.П. ШПИГА

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА СТОХАСТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА ПО МНОГОКОМПОНЕНТНОМУ ДРОБНОМУ БРОУНОВСКОМУ ДВИЖЕНИЮ

В работе найдена верхняя оценка неравенства для супремума винеровских интегралов, построенных по анизотропному дробному броуновскому полю с индексами Хюрста из интервала (0.5, 1).

Введение. Дробное броуновское движение – одна из самых популярных вероятностных фрактальных моделей. Этот вероятностный процесс был введен А.Н. Колмогоровым [1], фундаментальный вклад в его изучение сделали Б.Б. Мандельброт и В. Ван Несс [2]. Многокомпонентное дробное броуновское движение широко используются при обработке спутниковых фотографий, анализе данных радиолокации, моделировании различных геофизических явлений, потоков данных в компьютерных сетях, финансовой и страховой математике, а так же в теории управления стохастическими системами. Особенный интерес привлекает наличие у этого процесса свойства «длинной памяти» или «долгосрочной зависимости». Для случайного поля дробное броуновское свойство может быть определено как на каждом луче, который выходит из начала координат, так и покоординатно.

Постановка задачи. Пусть задано полное вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$. Случайное поле $B_t = \left\{B_t^{H_1,H_2}, t \in \mathbb{R}_+^2\right\}$ называется дробным броуновским полем (ДБП) с индексами Хюрста H_1 и H_2, если оно удовлетворяет условиям:

1) B_t - гауссовское поле, $B_t = 0$ для $t \in \partial R_+^2$;

2) $EB_t = 0$,

$$EB_t B_s = \frac{1}{4} \prod_{i=1,2} \left(t_i^{2H_i} + s_i^{2H_i} - \left| t_i - s_i \right|^{2H_i} \right);$$

3) траектории B_t непрерывны с вероятностью 1;

4) приращения $\Delta_s B_t := B_t - B_{s_1 t_2} - B_{t_1 s_2} + B_s$ стационарны.

Далее рассматривается случай $H_i \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $i = 1,2$. В этом случае ДБП имеет свойство долгой памяти и его приращения имеют позитивную корреляцию.

Согласно результатам работы [3], траектории поля B почти наверно принадлежат классу $H^{H_1-\varepsilon_1, H_2-\varepsilon_2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, для любых $0 < \varepsilon_i < H_i$, $i = 1,2$. Также в этой статье приведено следующее определение ДБП в виде интеграла по винеровскому полю:

$$B_t = C_{H_1} C_{H_2} \int\limits_{R_+^2} \prod_{i=1,2} \left((t_i - u_i)_+^{H_i - 1/2} - (-u_i)_+^{H_i - 1/2} \right) dW_u$$

где dW_u – винеровское поле. Для нормализации величины $(B_t)^2$ выбирают

$$C_{H_i} = \left(\frac{2H_i \Gamma(3/2 - H_i)}{\Gamma(H_i + 1/2)(2 - 2H_i)} \right)^{1/2},\ i = 1,2.$$

Для точек $s, t \in R_+^2$, $s = (s_1, s_2)$ $t = (t_1, t_2)$ будем говорить, что $s \le t$, если, $s_i \le t_i, i = 1,2$. Прямым и обратным дробным интегралом на прямоугольнике P называются функции

$$\left(I_{(a_1,a_2)+}^{\alpha_1,\alpha_2} f \right)(x,y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int\limits_{\alpha_1}^{x} \int\limits_{\alpha_2}^{y} \frac{f(s,t)}{(x-s)^{1-\alpha_1} (y-t)^{1-\alpha_2}} ds\, dt,$$

$$\left(I_{(b_1,b_2)-}^{\alpha_1,\alpha_2} f \right)(x,y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int\limits_{x}^{b_1} \int\limits_{y}^{b_2} \frac{f(s,t)}{(s-x)^{1-\alpha_1} (t-y)^{1-\alpha_2}} ds\, dt.$$

Для любого $T \in \mathbb{R}_+^2$ положим $\zeta_T^* = \sup\limits_{t \in [0,T]} |\zeta_t|$, где ζ_t - некоторая функция на $[0,T]$. Далее, пусть $f \in L_2^{H_1,H_2}\left(\mathbb{R}^2\right)$, где

$$L_2^{H_1,H_2}\left(\mathbb{R}^2\right) := \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(M_-^{H_1,H_2} f \right)(t) \right)^2 dt < \infty \right\},$$

а $M_{\pm}^{H_1 H_2}(f) := \prod_{i=1,\,2} C_{H_i}^{(3)} I_{\pm}^{\alpha_1 \alpha_2} f$ – сильный мартингал Молчана. Обозначим $I_t = I_t(f) = \int_{[0,t]} f(s)\,dB_s^{H_1,H_2}$. Задача состоит в получении оценки возможных значений процесса $\left\| I_T^* \right\|_p = \sqrt[p]{E\left(I_T^*\right)^p}$.

Для точек $s,t \in R_+^2$, $s = (s_1, s_2)$ $t = (t_1, t_2)$ будем говорить, что $s \le t$, если, $s_i \le t_i$, $i = 1,2$.

В работе [2, с. 345] приведена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $1 \le p_i < \infty$, $1 \le q_i < \infty$, $i = 1,2$. Операторы смешанного дробного интегрирования $I_{\pm\pm}^{\alpha_1\alpha_2}$ ограничены из $L_{p_1 p_2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ в $L_{q_1 q_2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ тогда, и только тогда, когда $1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}$, $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} - \alpha_i$, $i = 1,2$.

Из нее следуют такие утверждения:

Следствие 1. Пусть $H_i \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $i = 1,2$. Положим $\alpha_i = H_i - \frac{1}{2}$, $\hat{H} := p_1 = p_2 = \frac{1}{H_1} \wedge \frac{1}{H_2}$, $q_1 = q_2 = 2$. Тогда $L_{\hat{H}}\left(\mathbb{R}^2\right) \subset L_2^{H_1 H_2}\left(\mathbb{R}^2\right)$, ведь для таких значений p_1, p_2 выполняются условия теоремы 1 и поэтому справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2^{H_1,H_2}} = \left\| M_-^{H_1 H_2} f \right\|_{L_2} = C_{H_1}^{(3)} C_{H_2}^{(3)} \left\| I_-^{\alpha_1 \alpha_2} f \right\|_{L_2} \le C_{H_1 H_2} \|f\|_{L_{\hat{H}}} .$$

Следствие 2. Пусть задана функция $f \in L_2^{H_1 H_2}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Тогда существуют $I(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)\,dB_s^{H_1,H_2}$ та $E\left|I(f)\right|^2 = \|f\|_{L_2^{H_1 H_2}(\mathbb{R})}^2$ и для $H_i \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $i = 1,2$ справедливо неравенство

$$E\left|I(f)\right|^2 \le C_{H_1 H_2}^2 \|f\|_{L_{\hat{H}}(\mathbb{R})}^2 .$$

Далее, для оценки процесса ζ_T^* используем следующий подход. Рассмотрим на множестве $[0,T]$ полуметрику ρ_I, которая порождена процессом $I(t)$:

$\rho_I^2(s,t) = E\left(I(t) - I(s)\right)^2 = E\left|\int\limits_0^t f(u)\,dB_u^{H_1,H_2} - \int\limits_0^s f(u)\,dB_u^{H_1,H_2}\right|^2$. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим $N(T,\varepsilon)$ наименьшее возможное количество точек в ε-сетке, которая покрывает множество $[0,T]$, $H(T,\varepsilon) = \log N(T,\varepsilon)$ – метрическую ε-энтропию этого отрезка в полуметрике ρ, а через $D(T,\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon \sqrt{H(T,u)}\,du$.

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1. Пусть $\rho(s,t)$ – некоторая полуметрика на $[0,T]$, $T \in \mathbb{R}_+^2$, $\varphi(x)$, $x > 0$ - непрерывно возрастающая функция, $\varphi(0) = 0$. Также, пусть $g \in L_1[0,T]$, $g(v) \geq 0$ – некоторая функция, такая что $\forall s,t \in [0,T],\ s < t:\ \varphi(\rho(s,t)) \leq \int\limits_s^t g(v)\,dv$. Тогда

$$N([0,T],\varepsilon) \leq 1 + \frac{\int\limits_0^T g(v)\,dv}{\varphi(\varepsilon)}.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ множество $[0,T]$ может быть покрыто квадратной ε-сетью из точек $s_{i,j}$, $i = \overline{1,M}$, $j = \overline{1,N}$, $M, N \geq 2$, (при этом $0 < s_{0,0}$, $s_{M,N} < T$), такой, что $\rho\left(s_{ij}, s_{i+1,j+1}\right) \geq \varepsilon$. Очевидно, что

$$\int\limits_0^T g(v)\,dv \geq \sum_{i=1,j=1}^{M-1,N-1} \int_{s_{ij}}^{s_{i+1,j+1}} g(v)\,dv \geq$$

$$\geq MN \cdot \varphi\left(\rho\left(s_{ij}, s_{i+1,j+1}\right)\right) \geq MN\varphi(\varepsilon),$$

поэтому оценка энтропии справедлива.

Лемма 2. Во веденной полуметрике ρ исполняется оценка

$$D(T,\varepsilon) \leq \int_0^\varepsilon \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{\hat{H}}} \int\limits_0^T \left|f(v)\right|^{\hat{H}} dv\right)}\,du.$$

Доказательство. Согласно следствиям 1 і 2 выберем $\varphi(u)=u^{\hat{H}}$ и $g(v)=\left|f(v)\right|^{\hat{H}}$. Тогда выполняются условия леммы 1, согласно которой для любого $\varepsilon>0$ метрическая ε-энтропия множества $[0,T]$ не превышает

$$\log\left(1+\frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\int_0^T g(v)\,dv\right).$$

откуда и следует утверждение леммы 2.

Теорема 3. Для любого $p>0$ имеет место оценка

$$\left\|I_T^*\right\|_p \le C_p(H_1,H_2)\|f\|_{L_{\hat{H}}[0,T]}.$$

Доказательство. Введем обозначение $\sigma^2=\sup\limits_{t\in[0,T]} EI_t^2$. Тогда, согласно теореме про энтропийную оценку максимума случайной функции ([5, с. 141])

$$P\left(I_T^*>r\right)\le 2\left(1-\Phi\left(\frac{r-4\sqrt{2}D(T,\sigma/2)}{\sigma}\right)\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-y^2/2\right)dy$. Также, согласно теореме 1 и следствиям из нее

$$E\left(I_T^*\right)^p \le p\int_0^\infty x^{p-1}\left(1-P\left(I_T^*\right)\right)dx=$$

$$=p\int_0^{4\sqrt{2}D} x^{p-1}\left(1-F(x)\right)dx+\int_{4\sqrt{2}D}^{\infty} x^{p-1}\left(1-F(x)\right)dx=$$

$$\le\left(4\sqrt{2}\right)^p+p2^p\int_0^\infty x^{p-1}\left(1-F\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)dx+p2^p\left(4\sqrt{2}D\right)\int_0^\infty x^0\left(1-F\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)dx\le$$

$$\le\left(4\sqrt{2}D\right)^p+p2^p\sigma^pC_1(p)+2^p p\left(4\sqrt{2}D\right)^{p-1}\sigma C_1(1)$$

Далее, оценим $D=D(T,\varepsilon)$:

$$D=\int_0^\varepsilon \log^{1/2}\left(1+\frac{x}{u^H}\right)du\le\int_0^\varepsilon\frac{H\sqrt{z}x^H}{\exp(zH)}dz=Hx^H\int_c^\infty\frac{\sqrt{z}}{\exp(zH)}dz,$$

откуда следует $D \le c_4 \|f\| L_{\hat{H}}$. Очевидно, что $\sigma \le c_5 \|f\|_{L_{\hat{H}}}$. Теорема доказана.

Заключение. Полученные оценки максимума моментов супремума винеровского интеграла можно использовать для оценки коэффициента сноса стохастического дифференциального уравнения над дробным броуновским полем.

С.П. Шпига

ВЕРХНЯ ОЦІНКА СТОХАСТИЧНГО ІНТЕГРАЛА ПО БАГАТОКОМПОНЕНТНОМУ ДРОБОВОМУ БРОУНІВСЬКОМУ РУХУ

Робота присвячена розвитку теорії вінерівських інтегралів по дробовому броунівському полю з індексами Хюрста $H_i \in (1/2,\, 1),\, i = 1, 2$. Була обчислена верхня оцінка моментів супремуму стохастичного інтегралу по дробовому броунівському полю за допомогою властивості гауссовості. Ці оцінки суттєво залежать від підінтегральної функції.

S.P. Shpyga

THE UPPER ESTIMATION FOR THE STOCHASTICAL INTEGRAL OF MULTICOMPONENT FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

This paper deals with the Wiener integrals via the fractional Brownian field with Hurst indexes $H_i \in (1/2,\, 1),\, i = 1, 2$. The upper estimation for the moments of the supremum of the stochastical integrals are obtained for deterministic set with the help of Gaussian property These estimations essentially depend on the properties of integrand.

1. *Колмогоров А.Н.* Спирали Винера и другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1940. – **26**, № 2. – С. 115 – 118.
2. *Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review. – 1968. – **10**, № 4. – С. 422 – 437.
3. *Мішура Ю.С., Ільченко С.А.* Побудова вінерівських інтегралів відносно дробових броунівських полів // Вісн. КНУ ім. Т.Шевченка. Сер. Фізико-математичні науки. – 2005. – **2.** – С. 46 – 52.
4. *Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Получено 31.01.2011