Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕГЛАДКИХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается процедура автоматического определения значений штрафных коэффициентов по ходу работы оптимизационного алгоритма. Анализируются возможности предлагаемого подхода для разработки схем декомпозиции квазиблочных задач оптимизации со связывающими переменными.

Негладкие штрафные функции широко используются при решении оптимизационных задач [1–4]. Однако их использование связано с определенными проблемами – отсутствуют простые методики вычисления приемлемых значений штрафных коэффициентов. Выбор значений коэффициентов, обычно, возлагается на пользователя, что приводит либо к завышению используемых значений, либо к необходимости многократного решения одной и той же задачи для удовлетворительного подбора штрафных коэффициентов. В работе рассматривается подход, позволяющий построить процедуру автоматического определения значений штрафных коэффициентов по ходу работы оптимизационного алгоритма. Анализируются возможности предлагаемого подхода для разработки схем декомпозиции квазиблочных задач оптимизации со связывающими переменными. Предлагаемая процедура определения значений штрафных коэффициентов оказывается также полезной при использовании выпуклых продолжений целевой функции [5] в схемах декомпозиции. Рассматриваемые подходы позволяют существенно упростить реализацию схем декомпозиции.

1. Процедуры уточнения штрафных коэффициентов. Рассматривается задача: найти

$$f^* = \min\{ f(x) : x \in C \}, \qquad (1)$$

где $C = \left\{ x \in R^n : h_i(x) \le 0, i = 1,..., m \right\}$, $f, h_i : R^n \to R$ – выпуклые функции. Предполагается, что C – ограниченное замкнутое множество и задана допустимая точка $x^0 \in C$, такая, что $h_i(x^0) < 0,\ i = 1,..., m$.

Пусть f, h_i принимают конечные значения при любых x. Будем рассматривать штрафные функции вида

$$S(x, s) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} s_i h_i^+(x),\ s \in R^m,\ s_i \ge 0,\ i = 1,..., m, \tag{2}$$

или

$$S(x, s) = f(x) + s \cdot h^+(x),\ s \in R,\ s \ge 0, \tag{3}$$

где $h(x) = \max\left\{ h_i(x),\ i = 1,..., m \right\}$, $x^+ = \max\{0,\ x\}$. Рассмотрим задачу: найти

$$S^*(s) = \min\left\{ S(x, s) : x \in R^n \right\}. \tag{4}$$

Штрафная функция $S(x, s)$ точная при заданных значениях штрафных коэффициентов s, если $S^*(s) = f^*$ и решения задач (1) и (4) совпадают.

Пусть $S'(x, s, p)$ – производная функции S в точке $x \in R^n$ по направлению p при фиксированном значении s, $p(x) = (x - x^0) \big/ \left\| x - x^0 \right\|$.

Лемма 1. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$S'(x, s, p(x)) \ge \varepsilon \tag{5}$$

при любом $x \notin C$, тогда $S(x, s)$ – точная штрафная функция.

Доказательство. Пусть x^* – оптимальное решение задачи (4). Очевидно, что если $x^* \in C$, то x^* является оптимальным решением задачи (1). Пусть $x^* \notin C$. Обозначим $\pi_C(x^*)$ точку пересечения отрезка $\left[x^0, x^* \right]$ с границей множества C. Нетрудно видеть, что в силу (5) имеет место $S(x^*, s) > S(\pi_C(x^*), s)$. Это противоречит предположению об оптимальности точки x^*.

Теорема 1. Существует конечное $\bar{s}$, такое, что условие леммы 1 выполняется при любых $s > \bar{s}$, где $\bar{s} \in R^m$, если используется штрафная функция вида (2), и $\bar{s} \in R$,для штрафной функции (3).

Обозначим $g_S(x, s)$ субградиент функции $S(x, s)$ в точке x при фиксированном s. Вместо (5) может использоваться неравенство

$$\left(g_S(x,s),\, p(x)\right) \geq \varepsilon\,. \tag{6}$$

Очевидно, что если в точке x выполняется (6), то также выполняется и (5). Пусть значения штрафных коэффициентов s зафиксированы, для решения задачи (4) используется глобально сходящийся алгоритм A безусловной минимизации выпуклых функций.

Теорема 2. Пусть на каждой итерации k алгоритма A выполняется условие: если $x^k \notin C$, то для этой точки имеет место неравенство (6). Тогда алгоритм A сходится к решению задачи (1).

Для штрафной функции (2) неравенство (6) принимает вид

$$\left(g_f(x),\, p(x)\right) + \sum_{i\in I(x)} s_i \left(g_{h_i}(x),\, p(x)\right) \geq \varepsilon, \quad I(x) = \left\{ i : h_i(x) > 0 \right\}\,, \tag{7}$$

соответственно, для функции вида (3)

$$\left(g_f(x),\, p(x)\right) + s\left(g_h(x),\, p(x)\right) \geq \varepsilon, \quad x \notin C\,. \tag{8}$$

При практическом использовании приведенных соотношений в случае, когда неравенство (7) или (8) на некоторой итерации алгоритма A нарушается, будем увеличивать (на этой итерации) какой-либо из штрафных коэффициентов s_i, $i \in I(x)$ так, чтобы неравенство (6) выполнилось. При этом увеличение выбранного штрафного коэффициента будем производить на величину не менее B, где $B > 0$ – заданный параметр. В силу конечности $\overline{s}$ количество таких увеличений штрафных коэффициентов по ходу работы алгоритма A будет конечно. После этого в силу теоремы 1 алгоритм сходится к решению задачи (1).

Использование точных штрафных функций позволяет существенно упростить реализацию схем декомпозиции для квазиблочных задач выпуклого программирования со связывающими переменными вида: найти

$$f^* = \min_{x,y} \left\{ \sum_{i=1}^{m} f_i(x, y^i) : h_i(x, y^i) \ \leq \ 0,\ i = 1,\ldots,m \right\}, \tag{9}$$

где $f_i(x, y^i)$, $h_i(x, y^i)$ - выпуклые функции $(n + k_i)$ – размерного вектора (x, y^i), $x \in R^n$, $y^i \in R^{k_i}$, принимающие конечные значения при любых x, y^i. Здесь x – связывающие переменные, y^i – переменные i-го блока. Предполагается, что заданы $x^0 \in R^n$, $y_0^i \in R^{k_i}$, $i = 1,\ldots, m$, такие, что $h_i(x^0, y_0^i) < 0$.

Схема декомпозиции для задачи (9) основана на том, что при фиксированных значениях связывающих переменных x эта задача распадается на подзадачи, каждая из которых есть задача с ограничениями и может решаться независимо [1, 6]. Обозначим $\Phi_i(x)$ оптимальное значение i–й подзадачи при заданных значениях переменных x, тогда координирующая задача имеет вид: найти

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(x) : x \in R^n \right\}. \tag{10}$$

При решении задачи (10) возникают существенные проблемы, поскольку функции $\Phi_i(x)$ определены не при любых значениях x. В работе [1] для преодоления этих проблем предлагалось делать специальную регуляризацию исходной задачи.

Пусть заданы штрафные коэффициенты $s_1 \geq 0, ..., s_m \geq 0$. Обозначим

$$S_i(x, y^i, s_i) = f_i(x, y^i) + s_i h_i^+(x, y^i). \tag{11}$$

Поскольку для задачи (9) выполняются условия Слейтера, то существуют штрафные коэффициенты s_i^*, $i = 1, ..., m$, такие, что при условии $s_i \geq s_i^*$, $i = 1, ..., m$ следующая задача эквивалента исходной задаче (9): найти

$$S^*(s_1, ..., s_m) = \min_{x,y} \left\{ \sum_{i=1}^{m} S_i(x, y^i, s_i) : x \in R^n,\ y^i \in R^{k_i}, i = 1, ..., m \right\}. \tag{12}$$

Применение схемы декомпозиции для задачи (12) проще, так как при фиксированных связывающих переменных она распадается на подзадачи, которые являются задачами безусловной минимизации и имеют решение при любых x. Для применения такого подхода может использоваться рассмотренная процедура итеративного уточнения штрафных коэффициентов s_i, $i = 1, ..., m$.

2. Конические продолжения функций. Применение негладких штрафных функций возможно, если все функции задачи определены при любых значениях переменных. В случаях, когда функции могут быть не определены вне допустимой области, в [5] предлагалось использовать конические продолжения функций. Рассмотрим применение конических продолжений в схемах декомпозиции.

Пусть заданы: выпуклая функция $f : R^n \to R \bigcup \{\infty\}$, замкнутое выпуклое множество $C \subset R^n$, $C \subseteq \operatorname{dom} f$, внутренняя точка x^0 множества C, $x^0 \in \operatorname{int} C$, и некоторое число E. Для $x \notin C$ обозначим $\pi_C(x^0, x)$ точку пересечения отрезка $[x^0, x]$ с границей множества C. Положим

$$R_C(x^0, x) = \left\| x - x^0 \right\| \Big/ \left\| \pi_C(x^0; x) - x^0 \right\|, \tag{13}$$

$$\chi_E(x) = E + (f(\pi_C(x^0, x)) - E) \cdot R_C(x^0, x). \tag{14}$$

Определим операцию конического продолжения $\Gamma(f, C, x^0, E)$ функции f с множества C на R^n:

$$\Gamma(f, C, x^0, E):\ f(x) \to \psi_E(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in C, \\ \chi_E(x), \text{ если } x \notin C. \end{cases} \quad (15)$$

Функция $\psi_E(x)$ – непрерывна и принимает конечные значения при любых x.

Лемма 3 [5]. Пусть функция f липшицева на C. Тогда существует конечное E^*, такое, что для всех $E \le E^*$ функция $\psi_E : R^n \to R$ – выпуклая.

Заметим, что $R_C(x^0, x)$ есть функция Минковского [4] для множества C, записанная относительно точки x^0. Функция $R_C(x^0, x)$ – выпуклая; если $x \in \operatorname{int} C$, то $R_C(x^0, x) < 1$, если $x \notin C$, то $R_C(x^0, x) > 1$, для граничных точек x множества C имеет место $R_C(x^0, x) = 1$.

Рассмотрим задачу

$$\psi^* = \min\left\{\psi_E(x):\ R_C(x^0, x) \le 1\right\} \quad (16)$$

и негладкую штрафную функцию

$$P_E(x, u) = \psi_E(x) + u\left[R_C(x^0, x) - 1\right]^+. \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что

$$P_E(x, u) = \psi_{E-u}(x). \quad (18)$$

Рассмотрим квазиблочную задачу (9) выпуклого программирования со связывающими переменными. Предполагается, что $f_i,\ h_i : R^n \times R^{k_i} \to R \bigcup \{\infty\}$ – выпуклые собственные функции, $C_i = \left\{(x, y^i) : x \in R^n,\ y^i \in R^{k_i}, h_i(x, y^i) \le 0\right\}$ – ограниченные и замкнутые множества, $C_i \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{dom} f_i \bigcap \operatorname{dom} h_i)$, функции f_i липшицевы на C_i $i = 1, \ldots, m$. Заданы точки $x^0 \in R^n$, $y_0^i \in R^{k_i}$, такие, что $h_i(x^0, y_0^i) < 0, i = 1, \ldots, m$.

Положим $\psi_i(x, y^i, E_i) = \Gamma(f_i, C_i, (x^0, y_0^i), E_i)$ – конические продолжения функций f_i с множеств C_i на все пространство $R^n \times R^{k_i}$ (E_i – параметр), $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим задачу: найти

$$\psi^*(E_1, \ldots, E_m) = \min_{x, y}\left\{\sum_{i=1}^m \psi_i(x, y^i, E_i):\ x \in R^n,\ y^i \in R^{k_i},\ i = 1, \ldots, m\right\}. \quad (19)$$

Теорема 3. Существуют конечные числа E_i^*, такие, что при всех $E_i < E_i^*$, $i = 1,..., m$, функции $\psi_i(x, y^i, E_i)$ выпуклы, а задачи (9) и (19) эквивалентны (совпадают их оптимальные значения и оптимальные множества).

*Доказательство***.** Поскольку f_i липшицевы на C_i, то из леммы 3 следует существование величин $\overline{E}_i$, таких, что при $E_i < \overline{E}_i$ функции $\psi_i(x, y^i, E_i)$ выпуклы. Рассмотрим задачу

$$\min_{x,y} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x, y^i, E_i): \ R_{C_i}((x^0, y_0^i), (x, y^i)) \le 1, \ i = 1,..., m \right\}, \qquad (20)$$

где R_{C_i} – функция Минковского для множества C_i. Очевидно, задачи (9) и (20) эквивалентны. Из теоремы о негладких штрафных функциях [1, 3] следует существование коэффициентов u_i^*, $i = 1,..., m$, таких, что штрафная функция $S(x, y, u) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \psi_i(x, y^i, E_i) + u_i \left[R_{C_i}((x^0, y_0^i), (x, y^i)) - 1 \right]^+ \right\}$ будет точной, если $u > u^*$. Обозначив $E_i^* = \overline{E}_i - u_i^*$ и учитывая (18), получаем утверждение теоремы.

Так же как и (12) использование задачи (19) позволяет существенно упростить реализацию схемы декомпозиции. Поскольку задачи (9) и (20) эквивалентны, то подход, предложенный в первом разделе, может использоваться для уточнения штрафных коэффициентов для задачи (20), т.е. для уточнения параметров продолжения E_i в функциях $\psi_i(x, y^i, E_i)$.

В заключение необходимо заметить, что значения штрафных коэффициентов, при которых выполняются условия леммы 1, являются завышенными по сравнению с минимальными значениями, определяемыми теоремами о негладких штрафных функциях [1–3].

Ю.П. Лаптін

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ВИКОРИСТАННЯ НЕГЛАДКИХ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

Розгядається підхід, який дозволяє побудувати процедуру автоматичного визначення значень штрафних коефіцієнтів по ходу роботи оптимізаційного алгоритму. Аналізуються можливості запропонованого підходу для розробки схем декомпозиції квазіблочних задач оптимізації зі зв'язуючими змінними.

Yu.P.Laptin

SOME QUESTIONS OF NONSMOOTH PENALTY FUNCTIONS

We consider an approach to construct an automatic procedure for determining the values of penalty coefficients in the process of optimization algorithm. The possibilities of the proposed approach for the development of decomposition schemes for quasi-block optimization problems with binding variables are analysed.

1. *Shor N. Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 381 p.
2. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
3. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования .– М.: Наука, 1976. – 191 с.
4. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
5. *Лаптин Ю.П., Лиховид А.П.* Использование выпуклых продолжений функций для решения нелинейных задач оптимизации // Управляющие машины и системы. – 2010. – № 6. – С. 25–31.
6. *Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г.* Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2.– С. 47 – 55.

Получено 25.03.2011