УДК 517.977

Г.Ц. ЧИКРИЙ

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ МЯГКОЙ ВСТРЕЧИ ДВУХ РАЗНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ

Исследуется игровая задача о мягкой встрече двух управляемых линейных дифференциальных систем второго порядка различного типа. С помощью построенной так называемой функции растяжения времени были выведены достаточные условия завершения игры за конечное время при любых начальных условиях и указан способ построения управления преследователя на основании управления убегающего в прошлом.

В основе прямых методов преследования лежит условие Понтрягина [1]. Однако оно не выполняется для целых классов задач, в частности, для задач о мягкой встрече [2].

Настоящая работа является дальнейшим развитием подхода к модификации первого прямого метода преследования [3], основанной на использовании функции растяжения времени. Обоснование этой модификации и результаты ее применения в конкретных модельных задачах представлены в [4, 5], где эта функция предполагается кусочно-гладкой функцией времени. Однако эта методика применима и в случае, когда подходящая функция растяжения времени оказывается разрывной на счетной, сходящейся к бесконечности последовательности точек, оставаясь непрерывно дифференцируемой в точках своей непрерывности. Необходимость привлечения такой функции растяжения времени возникла при исследовании игровой задачи о мягкой встрече двух управляемых дифференциальных систем второго порядка, одна из которых движется согласно второму закону Ньютона с учетом трения, а вторая совершает затухающие колебания. Этот модельный пример является примитивной иллюстрацией поведения пилотируемого (или беспилотного) летательного аппарата, с борта которого должен быть сброшен груз на палубу корабля, оказавшегося в плену бушующих океанских волн [6].

Пусть движение преследующего объекта описывается системой

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u\,,\ x \in R^n\,,\ \|u\| \le 1, \tag{1}$$

а объекта, уклоняющегося от встречи с ним

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \gamma^2 y = \sigma v\,,\ y \in R^n\,,\ \|v\| \le 1\,; \tag{2}$$

α, ρ, h, $\sigma > 0$; $h^2 < \gamma^2$ (случай малого вязкого трения).

Здесь x и y – геометрические координаты объектов, а u и v – управления, выбираемые ими в каждый текущий момент времени таким образом, чтобы их реализации во времени были измеримыми функциями, ρ и σ – силовые коэффициенты. В отсутствие управляющих воздействий $(u \equiv 0, v \equiv 0)$ система (1) описывает движение согласно второму закону Ньютона при наличии трения (α – коэффициент трения), а система (2) описывает затухающие колебания, причем h характеризует интенсивность уменьшения амплитуды колебания, а величина $\omega = \sqrt{\gamma^2 - h^2}$ является угловой частотой колебаний системы с вязким трением [7]. Заданы начальные положения объектов:

$$x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,,\ y(0) = y_0\,,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0\,.$$

Цель преследователя – добиться совпадения в некоторый конечный момент времени геометрических положений и скоростей объектов, т.е. их мягкой встречи.

Положим $z = (x_1, x_2, y_1, y_2)^T = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^T \in R^{4n}$. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\dot{z} = Az + u - v\,,\ u \in U\,,\ v \in V\,, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -\gamma^2 E & -2hE \end{bmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho S_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma S_0 \end{pmatrix},\quad z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ y_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\quad ,$$

0 и E – соответственно нулевая и единичная матрицы размерности n, а S_0 – единичный n - мерный шар с центром в начале координат.

Терминальное множество представляет собой линейное подпространство в $R^{4n} : M = \{z \in R^{4n} : x_1 = y_1, x_2 = y_2\}$.

Тогда мягкая встреча в некоторый момент времени $t > 0$ означает, что $\pi z(t) = 0$. Оператору π соответствует матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & -E \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Модифицированное условие Понтрягина. Пусть существует монотонно неубывающая функция времени $I(t)$, $t \geq 0$, имеющая разрывы слева на счетной, сходящейся к ∞ последовательности точек, и непрерывно дифференцируемая в точках своей непрерывности, причем $I(0)=0$, $I(t)>t$ при $t>0$:

$$W(t) = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \dot{I}(t) \pi e^{At} V \neq \varnothing, \ t \geq 0. \tag{5}$$

Здесь $X \overset{*}{-} Y = \{z : z + Y \subset X\}$; $z \in R^n$; $X, Y \subset R^n$. В точках разрыва $\dot{I}(t)$ полагается равной единице.

Запишем фундаментальную матрицу системы (3):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} E & \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} E & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ht}\left(\dfrac{h}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right) & \dfrac{1}{\omega} e^{-ht} \sin\omega t \\ 0 & 0 & -\dfrac{\gamma^2}{\omega} e^{-ht} \sin\omega t & e^{-ht}\left(-\dfrac{h}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Условие (5) здесь имеет вид

$$W(t) = \bigcap_{\|v\|\leq 1} \bigcup_{\|u\|\leq 1} \begin{pmatrix} \rho \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} u - \dfrac{\sigma}{\omega} \dot{I}(t) e^{-hI(t)} \left|\sin I(t)\right| v \\ \rho e^{-\alpha t} - \delta \dot{I}(t) e^{-hI(t)} \left| -\dfrac{h}{\omega} \sin\omega I(t) + \cos\omega I(t) \right| v \end{pmatrix} \neq \varnothing. \tag{7}$$

Аналогично тому, как это делалось в [4, 5], выводим формулу для нахождения функции растяжения времени $I(t)$.

$$\left| tgwI(t) \right| = \frac{w}{h} \left(1 - \frac{1}{1 + h \dfrac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}} \right). \tag{8}$$

Обозначим

$$J(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{h} \left(1 - \frac{1}{1 + h \dfrac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}} \right),$$

где под arctg понимается основное значение арктангенса. Заметим, что $J(t) \to \dfrac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{h}$ при $t \to \infty$, т.е. требование $J(t) > t$ для всех $t > 0$, предъявляемое к функции растяжения времени, не выполнено. Чтобы исправить положение, будем строить искомую функцию $I(t)$ поэтапно. Вычисляем

$$\dot{J}(t)=\frac{e^{\alpha t}}{\left(1+h\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right)^2+\omega^2\left(\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right)}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что $J(0)=1$, $\dot{J}(t)>1$ на интервале $\left(0,\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha}{\gamma^2}(\alpha-2h)\right)\right)$.

В предположении

$$\alpha>2h \tag{10}$$

функция $J(t)$ монотонно возрастает на этом интервале. Поэтому график функции $J(t)$ в некоторый конечный момент времени $t_1>0$ пересечет луч $y=t$. Положим

$$I(t)=J(t),\ t\in[0,t_1),$$

где момент t_1 определяется равенством $J(t_1)=t_1$. Далее, пусть

$$I(t)=J(t)+\frac{\pi}{\omega},\ t\in[t_1,t_2),$$

где t_2 удовлетворяет равенству

$$J(t_2)+\frac{\pi}{\omega}=t_2.$$

Продолжая построение функции $I(t)$, получаем

$$I(t)=J(t)+(k-1)\frac{\pi}{\omega},\ t\in[t_{k-1},t_k),\ k=1,\dots,\infty, \tag{11}$$

$$J(t_k)+(k-1)\frac{\pi}{\omega}=t_k. \tag{12}$$

Из вышеприведенных соображений следует существование бесконечной счетной последовательности моментов времени $t_k, t_{k+1}>t_k, k=1,\dots,\infty$, причем, как видно из (11), (12), $t_k\to\infty$.

Построенная таким образом функция $I(t)$ (11) является разрывной слева в точках t_k, $k=1,\dots,\infty$, и непрерывно дифференцируемой на полуинтервалах своей непрерывности, причем $I(0)=0$, $I(t)>t$, $t>0$. Таким образом, $I(t)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции растяжения времени.

Теперь выведем условия на параметры систем (1), (2), при которых выполняется обобщенное модифицированное условие (7).

Обозначим $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} [t_{k-1}, t_k)$, где $t_0 = 0$. Заметим, что $\dot{I}(t) = \dot{J}(t)$, $t \in \Omega$, $\dot{I}(0) = 1$, $\dot{I}(t_k) = 1$, $k = 1, ..., \infty$. Из формулы (8) имеем

$$tg\omega I(t) = \frac{\omega}{h}\left(1 - \frac{1}{1 + h\frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}}\right), \; t \in \Omega. \tag{13}$$

После дифференцирования формулы (13) и несложных выкладок получим выражения для модулей, входящих в формулу для $W(t)$ (7):

$$\left|\frac{1}{\omega}\sin\omega I(t)\right| = r(t))\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha},$$

$$\left|-\frac{h}{\omega}\sin\omega I(t) + \cos\omega I(t)\right| = r(t)e^{-\alpha t},$$

где

$$r(t) = e^{\frac{\alpha t}{2}}(\dot{I})^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому выполнение условия (7) напрямую зависит от выполнения неравенства

$$\rho - e^{-hI(t)}e^{\frac{\alpha t}{2}}(\dot{I})^{\frac{3}{2}}\sigma \geq 0. \tag{14}$$

Из формулы (14) следуют условия

$$\frac{\rho}{\alpha^2} \geq \frac{\sigma}{h^2}, \; \alpha \geq \frac{\gamma^2}{h}, \tag{15}$$

обеспечивающие выполнение модифицированного условия (7).

Применим первый прямой метод Понтрягина для построения управления преследования, приводящего к цели. Справедлива

Теорема ([4, 5]). Пусть для игры (3) выполнено условие (5) и для начального состояния z^0 существует конечное время

$$T = \min\left\{t \geq 0 : -\pi\left(e^{I(t)A}z_0 + \int_0^{I(t)-t} e^{(I(t)-\theta)A}Ud\theta\right) \cap \int_0^t W(\theta)d\theta\right\} \neq \varnothing. \tag{16}$$

Тогда из заданного начального положения z_0 преследование может быть завершено точно в момент $I(T)$.

Укажем путь выбора управления для преследователя, приводящий к цели. Положим на начальном отрезке времени $[0, \tau_0)$, где $\tau_0 = I(T) - T$, его управление тождественно равным нулю. Начиная с момента τ_0, т.е. в каждый текущий момент времени $\tau_0+\theta$, $0\le\theta<T$, будем строить управление в виде измеримого решения уравнения

$$\pi e^{(T-\theta)A}u(\tau_0+\theta)=\dot{I}(T-\theta)e^{I(T-\theta)A}v(I(T)-I(T-\theta))+\omega(T-\theta),$$

где $\omega(\theta)$ это измеримый селектор многозначного отображения $W(\theta)$, $\omega(\theta)\in W(\theta)$, существующий ввиду (5) и (16) в силу теоремы Филиппова–Кастена об измеримом выборе [8].

Из вида фундаментальной матрицы e^{At} (6) и оператора π (4) нетрудно сделать вывод о существовании такой постоянной K, что $\left\|-\pi e^{I(t)A}z_0\right\|\le K$ при любых t и z_0. С другой стороны, множество $\int_0^t W(\theta)d\theta$ содержит $2n$-мерное множество $\int_0^t\left(\rho-\sigma\frac{\alpha^2}{h^2}\right)d\theta\cdot\begin{pmatrix}S_0\\S_0\end{pmatrix}$. С ростом t это множество в какой-то конечный момент времени T поглотит $2n$-мерный шар радиуса K, т.е. реализуется включение $-\pi e^{I(t)}z_0\in\int_0^T W(\theta)d\theta$, а с ним и включение (16).

Таким образом, показано, что если выполнены неравенства (10) и (15), то рассматриваемая модельная игра может быть завершена за конечное время при любых допустимых начальных положениях и скоростях игроков.

По аналогии с [4, 5] условие взятия преследователем «следа» убегающего выводится из условия принадлежности нулевого вектора пересечению в (16): существует t_1, такое что в момент времени $\tau_0=I(t_1)-t_1$ выполнены равенства

$$x(\tau_0)=e^{-hI(t_1)+1/2\alpha t_1}\left(\dot{I}(t_1)\right)^{1/2}\left(\left(2h\frac{1-e^{-\alpha t_1}}{\alpha}+e^{-\alpha t_1}\right)y_0+\frac{1-e^{-\alpha t_1}}{\alpha}\dot{y}_0\right),$$

$$\dot{x}(\tau_0)=e^{-hI(t_1)+3/2\alpha t_1}(\dot{I}(t_1))^{\frac{1}{2}}\left(-\gamma^2\frac{1-e^{-\alpha t_1}}{\alpha}y_0+e^{-\alpha t_1}\dot{y}_0\right).$$

Из формулы (16) следует, что, выбирая управление в виде

$$u(\tau_0+t)=\frac{\sigma}{\rho}\left(\dot{I}(t_1-t)\right)^{3/2}e^{-hI(t_1-t)\frac{\alpha(t_1-t)}{2}}v(\tau_0+t_1-I(t_1-t)),\ 0\le t<t_1,$$

преследователь достигнет мягкой встречи с убегающим точно в момент τ_0+t_1, двигаясь при этом строго по геометрической траектории («следу») убегающего.

Г.Ц. Чикрій

ПРО ОДНУ ІГРОВУ ЗАДАЧУ М'ЯКОЇ ЗУСТРІЧІ ДВОХ ОБ'ЄКТІВ РІЗНОГО ТИПУ

Досліджується ігрова задача про м'яку зустріч двох керованих лінійних диференціальних систем другого порядку різного типу. За допомогою побудованої так званої функції розтягування часу одержано достатні умови завершення гри за скінченний час та зазначено спосіб побудови керування переслідувачем.

G.Ts. Chikrii

ONE GAME PROBLEM OF SOFT MEETING OF TWO DIFFERENT-TYPE OBJECTS

Paper concerns the game dynamic problem of soft meeting of two linear second-order different-type differential systems.The extension time-function is built and with its help sufficient conditions for terminating the game in a finite time are developed. Moreover formula for constructing control of the pursuer is given.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
2. *Никольский М.*С. О применении первого прямого метода Понтрягина // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики. – 1972. – №10. – С.51-56.
3. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**, – № 3.– С. 520–523.
4. *Чикрий Г.Ц.* Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 90–105.
5. *Чикрий Г.Ц.* Об одной задаче сближения для затухающих колебаний // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №5 – С.5–12.
6. *Albus J.*, *Meystel A*. The eagle snatch, «Intelligent Systems: a semiotic perspective » // Proc. of the Intern Multidisciplinary Conf., NIST, 1996. – Gaithersburg (USA), 1996. – P. 1–7.
7. *Василенко Н.В.* Теория колебаний. – Киев: Вища шк., 1992. – 430 с.
8. *Йоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Получено 14.03.2011