4. *Рапопорт И. М.* Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. – Москва: Машиностроение, 1967. – 359 с.
5. *Еселева Е. В., Гнитько В. И., Стрельникова Е. А.* Собственные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Пробл. машиностроения. – 2006. – **9**, № 1. – С. 58–69.
6. *Кузина И. Ю.* Метод гиперсингулярных интегральных уравнений для задачи о гидроупругих колебаниях упругой оболочки вращения // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та. – 2006. – **2(25)**. – С. 271–276.
7. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва: ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
8. *Гандель Ю. В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 11.01.2008

УДК 535.3:537.876.23:631.3

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. О. Литвин**

Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі двох рентгенівських знімків у двох взаємно перпендикулярних ракурсах

The class of functions of three variables which can be restored by two X-ray pictures in mutually perpendicular directions is investigated.

На даний час реконструктивна комп'ютерна томографія (РКТ) є наукою, що найбільш динамічно розвивається внаслідок її унікальних можливостей отримання і реконструкції інформації про досліджувані об'єкти. В основі цього твердження лежить той факт, шо математичний апарат РКТ — перетворення Радона, інтегральна геометрія — дозволяє отримувати інформацію про об'єкт з принципіально новими якостями, порівняно з відомими методами досліджень в біології, молекулярній генетиці, сейсмології, океанології, медицині, електронній мікроскопії тощо. Томографічні системи використовують різні методи отримання експериментальних даних: рентгенівське, оптичне, синхротронні випромінювання, власне випромінювання, випромінювання об'єктів, що "самі світяться", сейсмічні хвилі, ультразвукову надзвичайно високочастотну (НВЧ), ядерно-магнітно-резонансну томографію (ЯМР) тощо.

Зауважимо, що застосування класичних методів КТ [2–6] для розв'язання ряду задач неможливе у зв'язку з недостатньою або дуже малою кількістю проекцій. Водночас в працях [7, 8] показана принципова можливість малоракурсної комп'ютерної томографічної реконструкції плазмових об'єктів, що світяться, та локальних внутрішніх неоднорідностей в конструйованих виробах. Огляд розроблених за останній час методів (без посилань на методи, пов'язані з інтерлінацією, інтерфлетацією та мішаною апроксимацією функцій [10, 11]), алгоритмів та технічних засобів міститься в [9].

Залежно від потужності використаних обчислювальних засобів, геометричних можливостей конкретних застосувань тощо, малоракурсна комп'ютерна томографія умовно ділиться на ультрамалоракурсну (УМРКТ) та малоракурсну. УМРКТ використовується в задачах діагностики, в яких можна отримати всього два, рідко три ракурси спостереження. В цьому випадку для використання класичних томографічних методів (методу згортки обернених проекцій тощо) застосовується метод довизначення вхідних даних до необхідних об'ємів. При цьому враховується апріорна інформація про об'єкт (процес), а також коректна математична модель об'єкта (процесу).

Другий напрям застосування УМР КТ пов'язаний з задачами визначення просторового розміщення, орієнтації та габаритних розмірів досліджуваних внутрішніх локальних об'єктів.

У малоракурсній томографії використовується від 6 до 24 проекцій. В математичному та алгоритмічному планах в малоракурсних томографічних системах діагностики та дослідженні параметрів фізичних процесів, використовуються ті самі методи реконструкції, що і в класичних — згортка, перетворення Фур'є, пряме та обернене перетворення Радона тощо. Але їх реалізації для малоракурсних задач значно складніші, бо треба вибирати і обгрунтовувати алгоритми для обчислення проміжних проекцій, розв'язувати задачу оптимальної інтерполяції числа відліків у кожній проекції тощо. Додаткова складність виникає при проведенні реконструкції за допомогою спектральних ліній, що мають дуже малу інтенсивність. Внаслідок малої кількості вхідних даних для оптимізації алгоритмів треба мати математичні моделі досліджуваних явищ (процесів). Ці труднощі вимагають для кожної конкретної задачі свого набору алгоритмів і засобів її розв'язання. Сказане видно на прикладах специфічних особливостей малоракурсної томографії в задачах діагностики плазми [7, 8] і дослідженні структури твердих тіл [2–6].

Дана робота присвячена дослідженню класу функцій, що описують внутрішню структуру тривимірного тіла (щільність, коефіцієнт поглинання), які можна точно відновити за допомогою всього двох рентгенівських знімків у взаємно перпендикулярних ракурсах методом, описаним в патенті [1]. Цей метод оснований на використанні операторів мішаної апроксимації функцій [10, 11].

Основні твердження роботи. Для побудови математичної моделі внутрішньої структури тривимірного тіла будемо використовувати мішану апроксимацію $B_{m,n}f(x,y,z)$ суми Фур'є функцій трьох змінних $f(x,y,z) \in L_2[0,1]^3 \bigcap C[0,1]^3$ за змінними x, y, побудовану за допомогою сум Фур'є функцій $f(x,y,z)$ порядків m, n за змінними x, y відповідно

$$F_{m,x}f(x,y,z) = \sum_{k=-m}^{m} c1_k(f;y,z)e^{i2\pi kx}, \qquad c1_k(f;y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi kx}dx,$$

$$F_{n,y}f(x,y,z) = \sum_{l=-n}^{n} c2_l(f;x,z)e^{i2\pi ly}, \qquad c2_l(f;x,z) = \int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi ly}dy.$$

Ці оператори мають вигляд

$$B_{m,n}f(x,y,z) = F_{m,x}f(x,y,z) + F_{n,y}f(x,y,z) - F_{m,n}f(x,y,z),$$

де

$$F_{m,n}f(x,y,z) = F_{m,x}F_{n,y}f(x,y,z) = \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n} c_{k,l}(z)e^{i2\pi(kx+ly)};$$

$$c_{k,l}(z) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy.$$

Для подальшого потрібна наступна лема.

Лема 1. *Для функцій* $f(x,y,z) \in L_2[0,1]^3 \bigcap C[0,1]^3$ *виконуються рівності* $(-m \leqslant k' \leqslant \leqslant m; -n \leqslant l' \leqslant n)$

$$c1_{k'}(B_{m,n}f;y,z) = \int_0^1 B_{m,n}f(x,y,z)e^{-i2\pi k'x}dx = c1_{k'}(f;y,z) = \int_0^1 fe^{-i2\pi k'x}dx,$$

$$c2_{l'}(B_{m,n}f;y,z) = \int_0^1 B_{m,n}f(x,y,z)e^{-i2\pi l'y}dy = c2_{l'}(f;y,z) = \int_0^1 fe^{-i2\pi l'y}dy.$$

Доведення. Для деякого фіксованого k' $(-m \leqslant k' \leqslant m)$ напишемо низку рівностей

$$c1_{k'}(B_{m,n}f;y,z) = \int_0^1 B_{m,n}f(x,y,z)e^{-i2\pi k'x}dx =$$

$$= \int_0^1 [F_{m,x}f(x,y,z) + F_{n,y}f(x,y,z) - F_{m,n}f(x,y,z)]e^{-i2\pi k'x}dx =$$

$$= c_{1,k'}(f;y,z) + \sum_{l=-n}^{n} c_{k',l}(z)e^{i2\pi ly} - \sum_{l=-n}^{n} c_{k',l}(z)e^{i2\pi ly} = c1_{k'}(f;y,z) = \int_0^1 fe^{-i2\pi k'x}dx.$$

Тут використані такі рівності:

$$c1_k(F_{m,x}f;y,z) = \int_0^1 F_{m,x}fe^{-i2\pi kx}dx = \sum_{k=-m}^{m}\int_0^1 c1_k(f;y,z)e^{-i2\pi kx}e^{-i2\pi k'x}dx =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} c1_k(f;y,z)\int_0^1 e^{-i2\pi kx}e^{-i2\pi k'x}dx = \sum_{k=-m}^{m} c1_k(f;y,z)\delta_{k,k'} = c1_{k'}(f;y,z).$$

Аналогічно знайдемо коефіцієнт Фур'є від другого доданку мішаної суми Фур'є

$$c1_{k'}(F_{n,y}f;x,z) = \int_0^1 F_{n,y}fe^{-i2\pi k'x}dx = \int_0^1 \left(\sum_{l=-n}^{n} c2_l(f;x,z)e^{i2\pi ly}\right)e^{-i2\pi k'x}dx =$$

$$
=\sum_{l=-n}^{n}\left(\int_0^1 c2_l(f;x,z)e^{-i2\pi k'x}dx\right)e^{i2\pi ly}=\sum_{l=-n}^{n}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 fe^{-i2\pi ly}dy\right)e^{-i2\pi k'x}dx\right)e^{i2\pi ly}=
$$

$$
=\sum_{l=-n}^{n}c_{k',l}(z)e^{i2\pi ly}.
$$

Знайдемо коефіцієнт Фур'є за змінною x від третього доданка мішаної суми Фур'є

$$
\int_0^1 F_{m,n}f(x,y,z)e^{-i2\pi k'x}dx=\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n}c_{k,l}(z)\int_0^1 e^{i2\pi(kx+ly)}e^{-i2\pi k'x}dx=
$$

$$
=\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n}c_{k,l}(z)\delta_{k,k'}e^{i2\pi ly}=\sum_{l=-n}^{n}c_{k',l}(z)e^{i2\pi ly}.
$$

Це дозволяє зробити висновок: $c1_{k'}(B_{m,n}f;y,z)=c1_{k'}(f;y,z)$.

Аналогічно доводиться, що для кожного фіксованого l' $(-n\leqslant l'\leqslant n)$ виконуються рівності $c2_{l'}(B_{m,n}f;y,z)=c2_{l'}(f;y,z)$. Таким чином, коефіцієнти Фур'є за змінними x та y до порядків m, n, відповідно, оператора $B_{m,n}f$ і функції f збігаються. Лема 1 доведена.

Для того, щоб ці результати використати при математичному моделюванні внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою двох рентгенівських знімків у напрямах осей x та y, відповідно, зауважимо, що доданок $c_{1,0}(f;y,z)=\int_0^1 fe^{-i2\pi 0x}dx=\int_0^1 f(x,y,z)dx$ у формулі для $F_{m,x}f(x,y,z)$ може розглядатися, як функція змінних (y,z), що описує зображення на рентгенівському знімку, яке отримується просвічуванням об'єкта (вважаємо, що об'єкт дослідження повністю розміщений у кубі $[0,1]^3$) рентгенівськими променями вздовж осі Ox за умови, що рентгенівський промінь проходить через точку (y,z) площини Oyz.

Аналогічно, доданок $c2_0(f;x,z)=\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi 0y}dy=\int_0^1 f(x,y,z)dy$ у формулі для $F_{n,y}f(x,y,z)$ є функцією змінних (x,z), що описує зображення на рентгенівському знімку, яке отримується просвічуванням об'єкта рентгенівськими променями вздовж осі Oy за умови, що рентгенівський промінь проходить через точку (x,z) площини Oxz.

Далі, врахуємо, що доданок $c_{0,0}(z)=\int_0^1\int_0^1 f\,dxdy$ у сумі $F_{m,n}f$ може бути отриманий за допомогою вказаних двох знімків $c1_0(f;y,z)$, $c2_0(f;x,z)$, тобто $c_{0,0}(z)=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y,z)dx\right)dy=$ $=\int_0^1 c1_0(f;y,z)dy$ і, аналогічно, $c_{0,0}(z)=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y,z)dy\right)dx=\int_0^1 c2_0(f;x,z)dx$ Це дозволяє написати наступне важливе з практичної точки зору твердження.

Твердження 1. *Якщо $c1_0(f;y,z)$, $c2_0(f;x,z)$ — функції, що описують тіньові зображення внутрішньої структури тривимірного тіла при просвічуванні тіла рентгенівськими променями вздовж осей Ox та Oy, відповідно, а коефіцієнт $c_{0,0}(z)$ обчислюється за однією з таких формул:*

$$
c_{0,0}(z)=\int_0^1 c1_0(f;y,z)\,dy,\qquad c_{0,0}(z)=\int_0^1 c2_0(f;x,z)\,dx,
$$

то функція $B_{m,n}f(x,y,z) = F_{m,x}f(x,y,z) + F_{n,y}f(x,y,z) - F_{m,n}f(x,y,z)$, що є математичною моделлю внутрішньої структури тривимірного тіла, задовольняє умови

$$c1_0(B_{m,n}f; y,z) = c1_0(f; y,z), c2_0(B_{m,n}f; y,z) = c2_0(f; y,z),$$

незалежно від вибору всіх інших виразів $c1_p(y,z)$, $1 \leqslant |p| \leqslant m$ та $c2_p(x,z)$, $1 \leqslant |p| \leqslant n$ і $c_{p,q}(z)$, $1 \leqslant |p| + |q| \leqslant 2n$. Твердження 1 (при $m = n = 0$) лежить в основі патента [1] на спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою двох рентгенівських знімків у двох взаємно перпендикулярних напрямах.

2. Аналіз точності математичної моделі у вигляді оператора $B_{0,0}f(x,y,z)$.

Теорема 1. *Оператор $B_{0,0}f(x,y,z) = c1_0(f; y,z) + c2_0(f; x,z) - c_{0,0}(z)$ точно відновлює всі функції $f(x,y,z)$ вигляду:*

$$f(x,y,z) = u(x,z) + v(y,z),$$

де $u(x,z)$, $v(y,z)$ — довільні інтегровні функції.

Доведення. Запишемо наступну низку рівностей:

$$c1_0(f; y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)dx = \int_0^1 [u+v]dx = \int_0^1 udx + \int_0^1 vdx = \int_0^1 u(x,z)dx + v(y,z),$$

$$c2_0(f; x,z) = \int_0^1 f(x,y,z)dy = \int_0^1 [u+v]dy = \int_0^1 udy + \int_0^1 vdy = u(x,z) + \int_0^1 v(y,z)dy,$$

$$c_{0,0}(z) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)dxdy = \int_0^1\int_0^1 [u+v]dxdy = \int_0^1\int_0^1 u(x,z)dxdy + \int_0^1\int_0^1 v(y,z)dxdy =$$

$$= \int_0^1 u(x,z)dx + \int_0^1 v(y,z)dy.$$

Підставляючи ці формули у вираз для оператора $B_{0,0}f(x,y,z)$, отримаємо

$$B_{0,0}f(x,y,z) = c1_0(f; y,z) + c2_0(f; x,z) - c_{0,0}(z) = u(x,z) + v(y,z) = f(x,y,z).$$

Таким чином, $B_{0,0}f(x,y,z) = f(x,y,z)$. Тому

$$\int_0^1 B_{0,0}f(x,y,z)dx = \int_0^1 f(x,y,z)dx; \qquad \int_0^1 B_{0,0}f(x,y,z)dy = \int_0^1 f(x,y,z)dy.$$

Теорема 1 доведена.

Висновки. В даній роботі доведено, що в ультрамалоракурсній томографії з двома рентгенівськими знімками у взаємно перпендикулярних ракурсах можна точно відновити внутрішню структуру тіла, що описується досить широким класом функцій.

1. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Межуєв В. І., Удовиченко В. М., Литвин О. О.* Спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта. Патент на винахід № 78568. – Зареєстровано в державному реєстрі патентів України на винаходи 10.04.2007.

2. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии / Под ред. В. П. Паламодова. – Москва: Мир, 1990. – 279 с.
3. *Троицкий И. Н.* Статистическая теория томографии. – Москва: Радио и связь, 1989. – 240 с.
4. *Левин Г. Г., Вишняков Г. Н.* Оптическая томография. – Москва: Радио и связь, 1989. – 224 с.
5. *Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.* Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. – Новосибирск: Изд. ИДМИ НГУ, 1999. – 172 с.
6. *Терещенко С. А.* Методы вычислительной томографии. – Москва: Физматлит, 2004. – 320 с.
7. *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. – Новосибирск: Наука, 1987. – 232 с.
8. *Пикалов В. В., Мельникова Т. С.* Томография плазмы. – Новосибирск: Наука, 1995. – 230 с.
9. *Филонин О. В.* Малоракурсная томография. – Самара: Самар. науч. центр РАН, 2006. – 253 с.
10. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 545 с.
11. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с.

*Інститут кібернетики НАН України
ім. В. М. Глушкова, Київ
Українська інженерно-педагогічна
академія, Харків*

Надійшло до редакції 22.02.2008