УДК 517.977.8

А.А. БЕЛОУСОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ В НОРМЕ L_1

Рассматриваются игровые задачи преследования для линейных систем с интегральными ограничениями на управления в норме пространства L_1. Формулируется аналог условия Л.С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия решения задачи за некоторое гарантированное время.

Динамические системы с интегральными ограничениями на управление имеют важное прикладное значение. Изучению дифференциальных игр с интегральными ограничениями посвящено довольно много работ: статьи М.С. Никольского [1, 2] по переносу идей первого прямого метода Л.С. Понтрягина на этот случай; исследования А.В. Мезенцева, Б.Н. Пшеничного и Ю.Н. Онопчука, Н.Л. Григоренко, А.Я. Азимова, В.Н. Ушакова, И.С. Раппопорта, А.А. Чикрия и А.А. Белоусова [3]. Однако все эти работы сосредотачивались главным образом на одном типе интегральных ограничений – в виде интеграла от квадрата нормы функции-управления (т.е. в смысле нормы гильбертова пространства L_2). Но на практике большое значение имееют и другие типы интегральных норм, например, норма L_1 (так называемое ограничение на общий импульс [4]). Исследование такого рода задач требует определённого обобщения понятий управления и решения, а также привлечения аппарата управлений-мер и обобщенных функций [5, 6]. В данной работе рассматривается расширение исходной дифференциальной игры с помощью импульсных управлений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке украинско-российского проекта ДФФД-Ф40.1/021.

Динамика игры задаётся линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in \mathsf{R}^n$, $u \in \mathsf{R}^m$, $v \in \mathsf{R}^l$, A, B, C – постоянные матрицы размером $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ соответственно.

Терминальное множество M является линейным подпространством R^n.

Управляющие вектор-функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ находятся в распоряжении (соответственно) игрока-преследователя и убегающего игрока. Управления игроков ограничиваются единичными шарами пространства L_1:

$$\int_0^\infty \| u(\tau) \| d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \| v(\tau) \| d\tau \le 1. \tag{2}$$

Следует отметить, что если ограничиться лишь суммируемыми управлениями, то множество достижимости для системы (1) может быть незамкнутым, хотя и ограниченным. Причина этого явления состоит в том, что множество управлений, удовлетворяющих (2), не ограничено (по норме) в обычном смысле и содержит функции, которые сколь угодно близки к управлениям типа δ-функций. Общим подходом для замыкания множества управлений в *-слабой топологии является расширение исходной задачи с помощью функций ограниченной вариации или управлений-мер [5, 6].

Для исследования игровой задачи (1), (2) ограничимся привлечением аппарата импульсных управлений. Импульсное воздействие в момент τ описывается с помощью обобщенной функции Дирака $\delta(t - \tau)$ [5–7], которая характеризуется свойством

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\tau)\, dt = \begin{cases} f(\tau), & \tau \in [a,b], \\ 0, & \tau \notin [a,b] \end{cases}$$

для любой непрерывной функции $f(t)$. В качестве управлений преследователя и убегающего игрока возьмём обобщенные вектор-функции:

$$U(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta(t - \eta_i), \quad V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta(t - \theta_j), \tag{3}$$

$$t \in \mathsf{R}_+ = [0, \infty), \quad 0 \le \eta_1 < \ldots < \eta_i < \ldots, \quad 0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_j < \ldots,$$

$$u(t) \in \mathsf{R}^m, v(t) \in \mathsf{R}^l, b_i \in \mathsf{R}^m, c_j \in \mathsf{R}^l,$$

где $u(t)$ и $v(t)$ – суммируемые функции; последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ определяют моменты импульсов, векторы b_i и c_j определяют их величины. Полагаем, что последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ не имеют конечных точек сгущения, а значит на любом ограниченном интервале времени число импульсов конечно. Тогда ограничение (2) на управления примет вид [6]

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\| d\tau + \sum_{i=1}^\infty \|b_i\| \le 1, \quad \int_0^\infty \|v(\tau)\| d\tau + \sum_{j=1}^\infty \|c_j\| \le 1. \tag{4}$$

Управления вида (3), удовлетворяющие условиям (4), будем называть допустимыми.

При подстановке управлений (3) в уравнение (1) получается так называемое дифференциальное уравнение с толчками [7]. Решением этого уравнения является функция $z(t)$, которая абсолютно непрерывна всюду, кроме моментов импульсов, и имеет вид

$$z(t) = e^{At} z^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left[BU(\tau) - CV(\tau) \right] d\tau = e^{At} z^0 +$$

$$+ \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left[Bu(\tau) - Cv(\tau) \right] d\tau + \sum_{\eta_i \le t} e^{A(t-\eta_i)} Bb_i - \sum_{\theta_j \le t} e^{A(t-\theta_j)} Cc_j, \tag{5}$$

где суммирование осуществляется по всем моментам импульсов, не большим t.

Определение. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $V(t)$ существует допустимое управление преследователя $U(t)$, которое гарантирует приведение решения уравнения (5) $z(t)$, соответствующего управлениям $(U(t), V(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $U(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию об управлении противника $V(t)$ в тот же момент времени. Таким образом, преследователь строит своё управление в классе контрстратегий.

Обозначим π оператор проектирования из R^n на ортогональное дополнение к M в R^n.

Введём предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л.С. Понтрягина для дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Оно фиксирует некое преимущество преследующего игрока над убегающим и обеспечивает возможность решения задачи сближения.

Условие. Существует такое число λ, $0 \le \lambda < 1$, что для всех положительных t выполняется включение

$$\pi e^{At} C D_v \subset \lambda \pi e^{At} B D_u, \tag{6}$$

где $D_u = \{u \in \mathrm{R}^m : \|u\| \le 1\}$ и $D_v = \{v \in \mathrm{R}^l : \|v\| \le 1\}$ – единичные шары в пространствах управлений.

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) на терминальное множество M из начального положения z^0 с помощью импульсных управлений (3).

Теорема. Полагаем, что выполнено условие (6) на параметры игры (1), (2). Предположим, что существует момент $T = T(z^0)$, такой, что

$$\pi e^{AT} z^0 \in (1-\lambda) \bigcup_{0\le t\le T} \pi e^{At} BD_u \, . \tag{7}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Доказательство. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы. Значит существуют момент $\eta \in [0,T]$ и вектор $b \in D_u$, такие, что

$$\pi e^{AT} z^0 = (1-\lambda)\pi e^{A(T-\eta)} Bb \, . \tag{8}$$

В силу условия (6) для всех $(t,v)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ выполняется включение

$$\pi e^{At} Cv \in \lambda \bigcup_{u\in D_u} \|v\| \pi e^{At} Bu \, .$$

В этом включении справа стоит отображение, непрерывно зависящее от $(t,v)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$, а слева объединение берётся по векторам, которые непрерывно зависят от $(t,v,u)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$.

По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль-Нардзевского [8, 9] следует, что у этого включения существует измеримый по Борелю селектор, т.е. измеримое по Борелю отображение $w(t,v)\in D_u$, такое, что

$$\pi e^{At} Cv = \lambda \|v\| \pi e^{At} Bw(t,v) \tag{9}$$

для всех $(t,v)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0,T]$ произвольное допустимое управление $V(t)$ вида (3)

$$V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(t-\theta_j), \quad 0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_j < \ldots < \theta_N \le T \, ,$$

которое удовлетворяет ограничению (4)

$$\int_0^T \|v(t)\| \, dt + \sum_{j=1}^{N} \|c_j\| \le 1 \, . \tag{10}$$

Тогда управление игрока-преследователя на интервале $[0,T]$ положим

$$U(t) = \lambda \|v(t)\| w(T-t, v(t)) + \sum_{\theta_j \le t} \lambda \|c_j\| w(T-\theta_j, c_j)\delta(t-\theta_j) - (1-\lambda) b\delta(t-\eta) \, . \tag{11}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является контруправлением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [5]. Поэтому для любой измеримой функции $v(t)$ функция $\|v(t)\|w(T-t,v(t))$ в (11) будет измерима по Лебегу.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (5) попадёт на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-t)} \left[\lambda \|v(t)\| Bw(T-t, v(t)) - Cv(t)\right] dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \pi e^{A(T-\theta_j)} \left[\lambda \|c_j\| Bw(T-\theta_j, c_j) - Cc_j\right] - (1-\lambda)\pi e^{A(T-\eta)} Bb = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу выбора (8) и (9).

Проверим, что построенное таким образом (11) управление удовлетворяет интегральному ограничению (4):

$$\lambda \int_0^T \|v(t)\| \cdot \|w(T-t, v(t))\| dt + \lambda \sum_{j=1}^{N} \|c_j\| \cdot \|w(T-\theta_j, c_j)\| + (1-\lambda)\|b\| \le$$

$$\le \lambda \left[\int_0^T \|v(t)\| dt + \sum_{j=1}^{N} \|c_j\|\right] + (1-\lambda) \le 1.$$

Неравенства имеют место в силу (10) и выбора такого селектора (9), который удовлетворяет условию $\|w(t,v)\| \le 1$. Таким образом, теорема доказана.

Пример. Динамика системы задается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = u - \lambda v, \quad x, u, v \in \mathrm{R}^n, \quad 0 \le \lambda < 1, \quad x(0) = x^0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}^0. \tag{12}$$

Ограничения имеют вид (2). Терминальное множество $M = \{(x, \dot{x}) : x = 0\}$.

С помощью следующих замен эта система приводится к форме Коши (1):

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n, \quad A = \begin{pmatrix} 0_n, E \\ 0_n, 0_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_n \\ E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0_n \\ \lambda E \end{pmatrix},$$

где 0_n и E – соответственно нулевой и тождественный операторы в R^n.

Оператор проектирования из $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ на ортогональное дополнение к M имеет вид $\pi z = x$. Тогда

$$e^{At} = \begin{pmatrix} E, tE \\ 0_n, E \end{pmatrix}, \quad \pi e^{At} BD_u = tD, \quad \pi e^{At} CD_v = \lambda t D, \quad D = \{x \in \mathrm{R}^n : \|x\| \le 1\}.$$

Отсюда видно, что для этой системы условие (6) выполнено с указанным параметром λ. Применяя теорему найдем условия завершения игры (7):

$$\|x^0 + T\dot{x}^0\| \le (1-\lambda)T, \quad T \ge 0.$$

Значит, игра (12) гарантировано может быть завершена за конечное время для всех состояний $(x^0, \dot{x}^0)$ таких, что либо $\left\|\dot{x}^0\right\| < 1 - \lambda$, либо $\left\langle x^0, \dot{x}^0 \right\rangle \le 0$ и $\left\|\dot{x}^0\right\|^2 < (1-\lambda)^2 + \left\langle \dot{x}^0, x^0 \big/ \left\|x^0\right\| \right\rangle^2$.

О.А. Бєлоусов

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ У НОРМІ L_1

Розглядаються ігрові задачі переслідування для лінійних систем із інтегральними обмеженнями на керування за нормою простору L_1. Формулюється аналог умови Л.С. Понтрягіна, який дозволяє отримати достатні умови вирішення задачі за певний гарантований час.

A.A. Belousov

DIFFERENTIAL GAMES UNDER INTEGRAL CONSTRAINS ON CONTROLS IN NORM L_1

Linear systems under integral constraints on controls in L_1-space norm are discussed in this paper. Analog of Pontryagin's Condition is formulated. On its basis sufficient conditions of the game termination in a certain guaranteed time are obtained.

1. *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 1972. – **8**, № 6. – С. 964–971.
2. *Никольский М.С.* Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 1992. – **28**, № 2. – С. 219–223.
3. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 4. – С. 290–301.
4. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. – М.: Наука, 1974. – 368 с.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
6. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. – М.: Наука, 2005. – 429 с.
7. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
8. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
9. *Kisielewicz M***.** Differential Inclusions and Optimal Control // Mathematics and Its Applications. – Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – **44**. – 260 p.

Получено 25.03.2011