

## Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщение 2. Контакт берегов трещины

И. В. Орыняк, А. Ю. Гиенко, А. В. Каменчук

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

*Рассматривается взаимодействие берегов эллиптической трещины, которая находится в частично отрицательном поле внешних напряжений. Проблема заключается как в нахождении области, где происходит контакт берегов, так и возникающих при этом напряжений контакта. Последние представляются в виде конечного полиномиального ряда с неизвестными коэффициентами, определяемыми из условия минимума квадратов отклонений перемещений в области контакта от нуля и отклонений суммарных напряжений от заданных в остальной области. Сама же область контакта находится в результате поиска абсолютного минимума этих отклонений. Приведены конкретные результаты для трещины, находящейся в линейном поле напряжений.*

**Ключевые слова:** эллиптическая трещина, контакт, линейное нагружение, минимизация ошибки.

**Введение.** Полученное ранее [1] решение для перемещений берегов трещины можно рассматривать как фундаментальное. Представленное в виде полиномиального ряда оно позволяет решать практические задачи с любой требуемой степенью точности. Одной из таких задач является учет контактирования берегов трещины. Суть ее состоит в том, что для трещины, находящейся в частично отрицательном поле напряжений, возможны ситуации, когда перемещения ее берегов, определяемые методами теории упругости, становятся отрицательными на некотором участке. Так, например, при линейном нагружении берегов трещины:

$$q(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \quad (1a)$$

перемещения  $W(\rho, \varphi)$  в соответствии с упругим решением (см. в [1] формулу (33б)) равны

$$W(\rho, \varphi) = \frac{a\sqrt{1-\rho^2}}{H} d_{1,1}^{1,1} \rho \sin \varphi, \quad (16)$$

где  $a$  – ширина трещины;  $(\rho, \varphi)$  – параметрические координаты;  $H$  – обобщенный модуль Юнга;  $d_{1,1}^{1,1}$  – коэффициент поля перемещений. В результате получается, что при  $\pi < \varphi < 2\pi$  перемещения меньше нуля. С физической точки зрения это абсурд, поскольку поверхности не могут заходить одна за другую. Очевидно, что на величину перемещений нужно наложить условие неотрицательности, т.е.  $W(\rho, \varphi) \geq 0$ .

Сложность задачи состоит в том, что в зонах контакта берегов трещины возникают дополнительные неотрицательные напряжения взаимодействия, которые обуславливают перестройку всего напряженно-деформированного

состояния. Поэтому неизвестные границы области контакта необходимо уточнять в процессе решения задачи.

Насколько известно авторам, для трехмерных тел с трещинами не существует ни общих подходов к решению таких задач, ни конкретных результатов расчета. Ранее [2] были предложены качественные подходы к оценке коэффициента интенсивности напряжений (КИН) на контуре трещины. В [3] отмечается, что упомянутые задачи достаточно сложны и требуют разработки специфических математических методов и численных процедур.

В настоящей работе на основе полученных в сообщении [1] результатов рассматривается контактная задача, для решения которой ставятся следующие цели:

- формализовать постановку задачи о контакте берегов трещины;
- создать эффективную однозначную процедуру нахождения площади и напряжений взаимодействия поверхностей трещины;
- получить конкретные результаты для трещины под действием внешних напряжений (1а).

**Обоснование постановки задачи.** Пусть эллиптическая трещина площади  $S_0$  находится во внешнем нормальном частично отрицательном поле напряжений  $\sigma^A(S_0)$ . Поскольку отвечающие им в соответствии с теорией упругости перемещения  $W^A(S_0)$  отрицательны на некоторой части площади трещины, то происходит контакт ее берегов. Допустим, что область контакта берегов трещины  $S_1$  известна. Тогда достаточной формулировкой задачи, т.е. граничными условиями, будет следующая:

$$\begin{aligned} W(\rho, \varphi) &= 0, & (\rho, \varphi) \in S_1; \\ \sigma(\rho, \varphi) &= \sigma^A(\rho, \varphi), & (\rho, \varphi) \in S_2 = S_0 - S_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученные в [1] результаты могут быть использованы для нахождения приближенного решения (2). Полагаем, что во всей области  $S_0$  действуют дополнительные контактные напряжения  $\sigma^C(S_0)$ . Если эти дополнительные напряжения симметричны относительно оси  $y$ , то их можно представить в виде конечного полиномиального ряда:

$$\sigma_N^C(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^{\left[\frac{N-k}{2}\right]} \sum_{i=j}^{\left[\frac{N-k}{2}\right]} A_{2i+k, 2j+k} \bar{\sigma}_{2i+k, 2j+k}(\rho, \varphi), \quad (3a)$$

где

$$\bar{\sigma}_{2i+k, 2j+k}(\rho, \varphi) = \rho^{2i+k} \cos\left(\frac{k\pi}{2} - (2j+k)\varphi\right); \quad (3b)$$

$N$  – максимальная степень искомого полинома;  $A_{2i+k, 2j+k}$  – искомые коэффициенты разложения; здесь и далее квадратные скобки обозначают целую часть от выражения, заключённого внутри них. Упругие перемещения берегов трещины  $W^C(S_0)$ , соответствующие напряжениям (3а), примут вид [1]

$$W^C(\rho, \varphi) = \frac{a}{H} \sqrt{1 - \rho^2} \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-k}{2} \rfloor} \sum_{i=j}^{\lfloor \frac{N-k}{2} \rfloor} A_{2i+k, 2j+k} \overline{W}_{2i+k, 2j+k}(\rho, \varphi), \quad (4a)$$

где  $H$  – обобщённый модуль упругости;  $a$  – меньшая полуось трещины;  $\overline{W}_{2i+k, 2j+k}(\rho, \varphi)$  – безразмерное поле перемещений берегов трещины под действием напряжений (3б), которое можно представить следующим образом:

$$\overline{W}_{2i+k, 2j+k}(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^i \sum_{l=m}^i d_{2l+k, 2m+k}^{2i+k, 2j+k} \overline{\sigma}_{2l+k, 2m+k}(\rho, \varphi). \quad (4б)$$

Тогда вместо условий (2) можно записать приближенную постановку задачи:

$$\begin{aligned} W^R(\rho, \varphi) &\rightarrow 0, & (\rho, \varphi) \in S_1; \\ \sigma^R(\rho, \varphi) &\rightarrow \sigma^A(\rho, \varphi), & (\rho, \varphi) \in S_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma^R(\rho, \varphi)$  – полное напряжение, действующее на берега трещины,

$$\sigma^R(\rho, \varphi) = \sigma^A(\rho, \varphi) + \sigma^C(\rho, \varphi); \quad (6a)$$

$W^R(\rho, \varphi)$  – полное перемещение берегов трещины,

$$W^R(\rho, \varphi) = W^C(\rho, \varphi) + W^A(\rho, \varphi). \quad (6б)$$

Такая постановка дает возможность определить неизвестные коэффициенты  $A_{j,i}$  методом наименьших квадратов, минимизируя следующий функционал ошибки:

$$I_1(A_{i,j}) = \iint_{S_1} [k(\rho, \varphi) W^R(\rho, \varphi)]^2 dS + \iint_{S_2} [\sigma^C(\rho, \varphi)]^2 dS = \min. \quad (7)$$

Поскольку величины  $W$  и  $\sigma$  имеют разные размерности и числовой порядок, то, чтобы уравнивать их значимость, в функционал (7) введен дополнительный весовой коэффициент  $k(\rho, \varphi)$ . Заметим, что при максимально точном решении задачи (порядок полинома  $N$  в представлении (3) стремится к бесконечности) выбор значения  $k$  не влияет на определяемые значения  $A_{j,i}$ .

Однако проблема состоит в том, что область  $S_1$  заранее неизвестна, а функционал (7) не содержит никаких механизмов ее уточнения. Действительно, полагая, что  $S_1 = 0$  (трещина полностью открыта),  $\sigma^C(S_0) = 0$ , получаем  $I_1(A_{i,j}) = 0$ , т.е. функционал (7) достигает минимума. С другой стороны, считая, что трещина полностью закрыта ( $S_2 = 0$ ) и при этом

контактные напряжения противоположны приложенным, т.е.  $\sigma^C(S_0) \equiv -\sigma^A(S_0)$ , также получаем  $I_1(A_{i,j}) = 0$ . Таким образом, два заведомо неправильных решения обеспечивают минимизацию функционала (7). Это связано с тем, что постановка (5) не является полной с точки зрения обеспечения поиска области  $S_1$  и из физических соображений должна быть дополнена следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} W^R(\rho, \varphi) &\rightarrow 0, & \sigma^C(\rho, \varphi) &\geq 0, & (\rho, \varphi) &\in S_1; \\ \sigma^R(\rho, \varphi) &\rightarrow \sigma^A(\rho, \varphi), & W^R(\rho, \varphi) &\geq 0, & (\rho, \varphi) &\in S_2. \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с постановкой (8) минимизации подлежит функционал ошибки  $I_0$ :

$$I_0(A_{i,j}) = I_1(A_{i,j}) + I_2(A_{i,j}), \quad (9)$$

где величина  $I_1$  определена выражением (7), а функционал  $I_2$  равен

$$I_2(A_{i,j}) = \iint_{S'_2} [k(\rho, \varphi)W^R(\rho, \varphi)]^2 dS + \iint_{S'_1} [\sigma^C(\rho, \varphi)]^2 dS. \quad (10)$$

Здесь  $S'_1$  – часть области  $S_1$ , где  $\sigma^C(\rho, \varphi) < 0$ , а  $S'_2$  – часть области  $S_2$ , где  $W^R(\rho, \varphi) \leq 0$ . Теперь  $I_0$  достигает минимума для истинной площади контакта.

Для рассмотренных выше двух предельных случаев полностью открытой и полностью закрытой эллиптической трещины значения функционалов ошибки, а именно:  $I_2(1)$  и  $I_2(2)$ , соответственно равны

$$\begin{aligned} I_2(1) &= \iint_{S'_2} [k(\rho, \varphi)W^R(\rho, \varphi)]^2 dS; \\ I_2(2) &= \iint_{S'_1} [\sigma^C(\rho, \varphi)]^2 dS. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнивая эти величины между собой, можно сформулировать общее требование к коэффициенту  $k(\rho, \varphi)$ , чтобы два предельных неправильных решения приводили к одинаковой ошибке. Примем

$$k(\rho, \varphi) = \frac{\chi H}{a\sqrt{1-\rho^2}}, \quad (12)$$

где  $\chi$  – некоторый числовой коэффициент веса. Тогда произведение  $k \cdot W$  является функцией той же структуры, размерности и величины, что и напряжения  $\sigma$ .

**Алгоритм решения.** В постановке (8) с учетом (6) и (9) уже заложен механизм определения как самих коэффициентов  $A_{i,j}$ , так и искомой площади контакта  $S_1$ . Однако задача нахождения минимума (8) есть существенно нелинейной и требует разработки специальных приемов.

Основная идея предлагаемого алгоритма и, по-видимому, всей работы такова:

минимизация функционала (7) происходит на каждом шаге определения  $S_1$ , т.е. находятся коэффициенты  $A_{i,j}$  для фиксированной области  $S_1$ ;

минимизация  $I_2$  служит для определения области  $S_1$ , а именно: для уточнения области при найденных коэффициентах  $A_{i,j}$ .

Более подробно алгоритм состоит в следующем.

1. Область  $S_0$  разбивается на достаточно большое количество элементарных площадок  $\Delta S_m$ , сопоставимых по площади. Внутри каждой площадки выбирается одна точка  $M_m(\rho_m, \varphi_m)$ , которой приписывается свойство принадлежности к области  $S_1$  либо  $S_2$ . На начальном этапе задаются произвольная область  $S_1$ , например  $S_1 = 0$  либо  $S_1 = S_0$ , а также начальное значение ошибки  $I_0$ , вычисленной для этой начальной области в соответствии с (10).

2. Для заданной области  $S_1$  минимизируется функционал  $I_1$  (7) из обычного для метода наименьших квадратов условия:

$$\frac{dI_1}{dA_{i,j}} = 0. \quad (13)$$

Из этого условия с учетом (3), (4), (7) и (12) получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \chi^2 \iint_{S_1} [\bar{W}^A(\rho, \varphi) + \bar{W}^C(\rho, \varphi)] \bar{W}_{2n+k, 2\rho+k}(\rho, \varphi) dS + \\ + \iint_{S_2} \sigma^C(\rho, \varphi) \bar{\sigma}_{2n+k, 2\rho+k}(\rho, \varphi) dS = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $k = 0, 1$ ;  $\rho = 0, 1, \dots, \left[ \frac{N-k}{2} \right]$ ;  $n = \rho, \dots, \left[ \frac{N-k}{2} \right]$ .

Решив данную систему, определим неизвестные коэффициенты  $A_{2n+k, 2\rho+k}$ , входящие в выражения (3), (4) для  $\sigma_N^C(\rho, \varphi)$  и  $W^C(\rho, \varphi)$  соответственно. При этом интегралы из (14) вычисляются путем численного интегрирования по соответствующим областям. Для найденных коэффициентов  $A_{2n+k, 2\rho+k}$  и области  $S_1$  определяется полный функционал ошибки  $I_0$  (9) на данном шаге вычислений. Его значение сравнивается с аналогичными величинами, определенными на предыдущих итерациях, из которых запоминается наименьшее значение  $I_0$  и соответствующий ему номер итерации.

3. Уточняется область  $S_1$ . Поскольку найденные коэффициенты  $A_{2n+k, 2\rho+k}$  минимизируют  $I_1$ , то уточнение области происходит с целью уменьшения  $I_2$ . Для этого в области  $S_1$  определяется несколько точек  $k$ , например  $k = 5$ , в которых значения  $\sigma_N^C(\rho, \varphi)$  минимальны и отрицательны, если таковые имеются.

Очевидно, что эти точки не должны принадлежать  $S_1$ , поэтому их принадлежность меняется и они считаются находящимися в области  $S_2$ . В свою очередь, в области  $S_2$  определяются (если таковые имеются) несколько точек  $\rho$ , в которых значения  $W^R(\rho, \varphi)$  минимальны и при этом отрицательны. Эти точки перенаправляются в область  $S_1$ . Для того чтобы избежать попадания в “мёртвые” зоны, когда одни и те же точки бесконечно будут переноситься из закрытой зоны в открытую и обратно, необходимо задать  $k \neq \rho$ .

4. После уточнения областей  $S_1$  и  $S_2$  возвращаемся к п. 2 для определения коэффициентов полинома и полной ошибки  $I_0$ . Для всех проведенных вычислений (достаточно пройти примерно  $K_0/k$  шагов для любой выбранной начальной области  $S_1$ ) устанавливается номер шага, для которого значение  $I_0$  минимально. Для этого шага приводятся значения  $A_{2n+k, 2\rho+k}$  и точки, принадлежащие  $S_1$ , что и будет решением поставленной задачи.

**Практическая реализация и результаты.** Рассматривается только внешнее напряжение, заданное по закону (1а). В силу симметрии расчеты проводятся по половине трещины, и при выборе контактных напряжений (3а) учитываются лишь 1- и 3-я ветви нагружения [1]. Разбивка половины площади трещины осуществлялась в параметрических координатах на  $2 \cdot 2590$  элементарных областей. При этом применялась равномерная разбивка цилиндрами с параметрическим радиусом  $\rho_i$  на  $P = 35$  участков и неравномерная разбивка лучами с угловой координатой  $\varphi_j$ :

$$\begin{aligned} \rho_i &= i\Delta\rho; \\ \varphi_j &= \varphi_{j-1} + \Delta\varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\Delta\rho = \frac{1}{P}$ ;  $i = 0, 1, \dots, P - 1$ ;  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2(40 + 2i)}$ ;  $j = 0, \dots, 40 + 2i - 1$ .

Такая разбивка обеспечивает сопоставимые площади элементарных областей и даёт хорошую точность при численном определении интегралов. Интегралы в (14) представляются в виде сумм вида:

$$\iint_S f(\rho, \varphi) dS \cong \sum_i \sum_j f(\rho_i, \varphi_j) \Delta S_{ij}. \quad (16)$$

Площади элементарных областей находятся как площади трапеций:

$$\Delta S_{ij} \cong ab \left( \rho_i + \frac{\Delta\rho}{2} \right) \Delta\rho \Delta\varphi_j. \quad (17)$$

Проведение многократных расчетов коэффициентов в уравнении (14) на каждом шаге уточнения области интегрирования требует разработки эффективной процедуры их нахождения, иначе время расчета может быть недопустимо большим. С этой целью предложена соответствующая численная реализация. До начала расчета неизвестных коэффициентов проводится предварительный расчет повторяющихся множителей вида  $\rho^n \cos m\varphi \Delta S_{i,j}$  и  $\rho^n \sin m\varphi \Delta S_{i,j}$ , которые сохраняются в промежуточном многомерном массиве. Полученные результаты “кэшируются” в многомерном массиве, который передается впоследствии в главную процедуру расчета. Это позволило значительно уменьшить время уточнения области контакта в сравнении с обычным определением упомянутых множителей на каждом шаге. В целом время решения для 500–600 итераций на компьютере для  $N = 7$ , т.е. для 18 неизвестных, составляет 5–7 минут. Для задач такой сложности это достаточно быстрое решение.

Приведем более подробно полученные результаты для круговой трещины, для которой отрабатывались все методические проблемы. Если в уравнении (12) принимается значение  $\chi = 1/d_{1,1}^{1,1}$ , где последнее определено формулой (43) работы [1], то начальная ошибка в соответствии с (11) равна  $I_2(1) = I_2(2) = 0,1962703$ .

Сначала исследовалось влияние пути определения искомой площади  $S_1$ , т.е. влияние принятого начального состояния трещины на получаемые результаты. При этом рассматривались три начальных состояния: трещина полностью открыта; трещина полностью закрыта; половина трещины открыта. Оказалось, что полученные результаты для  $A_{2n+k, 2\rho+k}$  отличаются лишь в (5-6)-й значащей цифре, а область налегания берегов трещины – максимально на 10–20 точек. Это есть безусловным подтверждением правильности алгоритма. Поэтому в дальнейшем, без ущерба для точности результатов, полагаем, что изначально трещина является полностью открытой.

Затем рассматривалось влияние принятого коэффициента веса  $\chi$  на полученные результаты. На рис. 1 приведены значения КИН вдоль фронта круговой трещины при  $0,5 \leq \chi \leq 5$ . Очевидно, что  $\chi$  незначительно влияет на величину КИН, особенно в точках фронта трещины, примыкающих к открытым поверхностям трещины. Далее в вычислениях принималось  $\chi = 1$ . При этом начальное значение ошибки равно  $I_0^0 = 0,14141332$ .

Для нескольких значений  $N$  получены следующие результаты:

а)  $N = 1$  (всего два неизвестных коэффициента:  $A_{0,0}$  и  $A_{1,1}$ ). Количество точек  $M_1$ , попавших в область  $S_1$ , равно 2295 (из 2590 возможных). Минимальное значение ошибки  $I_0^{\min}$ , найденное на 515-м шаге, составляет  $I_0^0/I_0^{\min} \cong 6,28$ . Значения искомых коэффициентов равны:  $A_{0,0} = 0,17172$ ;  $A_{1,1} = -0,40483$ ;

б)  $N = 3$  (шесть неизвестных коэффициентов). Количество точек  $M_1$ , попавших в  $S_1$ , составляет 2104, при этом наибольшее отношение  $I_0^0/I_0^{\min} \cong 116,6$ . Значения искомых коэффициентов  $A_{i,j}$  равны:  $A_{0,0} = 0,025538$ ;  $A_{2,0} = 0,314920$ ;  $A_{2,2} = -0,290542$ ;  $A_{1,1} = -0,295930$ ;  $A_{3,1} = 0,258106$ ;  $A_{3,3} = 0,061143$ ;

в)  $N = 5$  (12 неизвестных коэффициентов).  $M_1 = 1989$ ;  $I_0^0 / I_0^{\min} \cong 485$ .

Значения коэффициентов  $A_{i,j}$  равны:  $A_{0,0} = -0,011636$ ;  $A_{2,0} = 0,61150$ ;  
 $A_{4,0} = -0,263340$ ;  $A_{2,2} = -0,517700$ ;  $A_{4,2} = 0,321110$ ;  $A_{4,4} = -0,075121$ ;  
 $A_{1,1} = -0,160267$ ;  $A_{3,1} = -0,984086$ ;  $A_{5,1} = 0,708153$ ;  $A_{3,3} = 0,250443$ ;  
 $A_{5,3} = -0,27470$ ;  $A_{5,5} = 0,042540$ ;

г)  $N = 7$  (18 неизвестных коэффициентов).  $M_1 = 1953$ ;  $I_0^0 / I_0^{\min} \cong 698$ .

Значения коэффициентов  $A_{i,j}$  равны:  $A_{0,0} = -0,000129$ ;  $A_{2,0} = 0,344011$ ;  
 $A_{4,0} = 0,375568$ ;  $A_{6,0} = -0,466221$ ;  $A_{2,2} = -0,438367$ ;  $A_{4,2} = 0,050876$ ;  
 $A_{6,2} = 0,208148$ ;  $A_{4,4} = -0,193891$ ;  $A_{6,4} = 0,148090$ ;  $A_{6,6} = -0,029821$ ;  
 $A_{1,1} = -0,116839$ ;  $A_{3,1} = -1,061177$ ;  $A_{5,1} = 0,522759$ ;  $A_{7,1} = 0,254373$ ;  
 $A_{3,3} = 0,446540$ ;  $A_{5,3} = -0,937616$ ;  $A_{7,3} = 0,499673$ ;  $A_{5,5} = 0,221674$ ;  
 $A_{7,5} = -0,226750$ ;  $A_{7,7} = 0,028184$ .

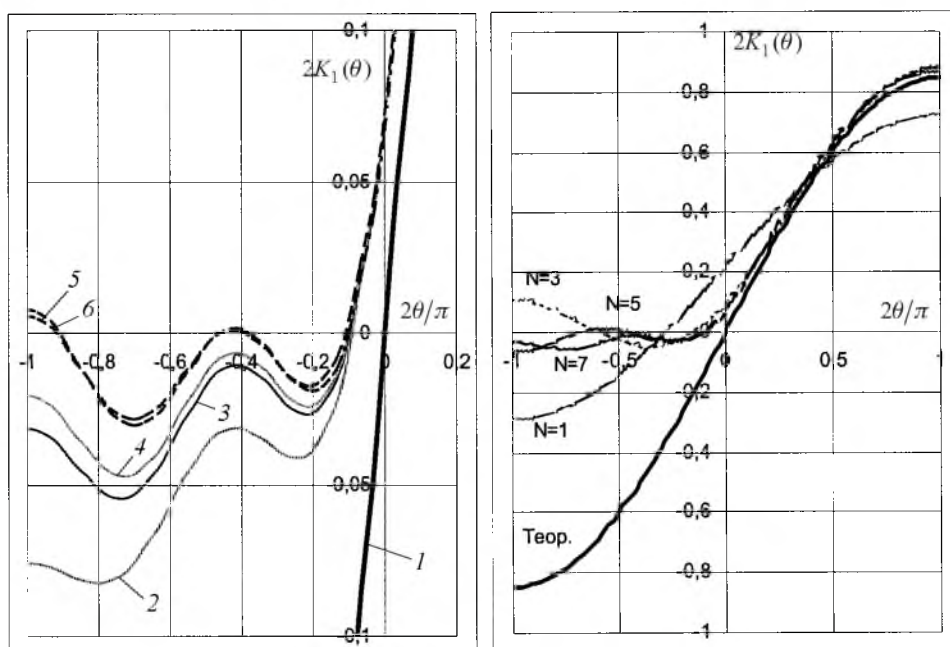


Рис. 1. Сравнение значений КИН для разного веса  $\chi$ : 1 – без учета взаимодействия берегов трещины; 2 –  $\chi = 0,5$ ; 3 –  $\chi = 1$ ; 4 –  $\chi = 1,178$ ; 5 –  $\chi = 2$ ; 6 –  $\chi = 5$ .

Рис. 2. Значения КИН для круговой трещины.

Благодаря наличию значений  $A_{i,j}$  можно определить поле перемещений по формуле (36), что, в свою очередь, легко позволяет найти коэффициенты интенсивности напряжений по формуле

$$K_1(\theta) = \frac{\sqrt{2\pi}H}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{W^R(\rho, \varphi)}{\sqrt{\Delta}}, \quad (18)$$

где  $\Delta$  – кратчайшее расстояние между точкой контура трещины и внутренней точкой поверхности трещины. Согласно (18) с учетом (3), (4) получим



$$K_1(\varphi) = \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\varphi) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{N-k}{2} \right\rfloor} \sum_{i=j}^{\left\lfloor \frac{N-k}{2} \right\rfloor} A_{2i+k, 2j+k} \sum_{m=0}^i \sum_{l=m}^i d_{2l+k, 2m+k}^{2i+k, 2j+k} \cos[k\pi - (2m+k)\varphi]. \quad (19)$$

Зависимости  $2K_1(\theta)$  для разных значений  $N$  приведены на рис. 2. Очевидно, что контакт берегов трещины приводит к незначительному увеличению максимальных значений КИН (на 3-4%). На рис. 3 показана эволюция зон контакта в процессе увеличения числа итераций, где неконтактирующие элементарные области наносились в виде дискретных точек.

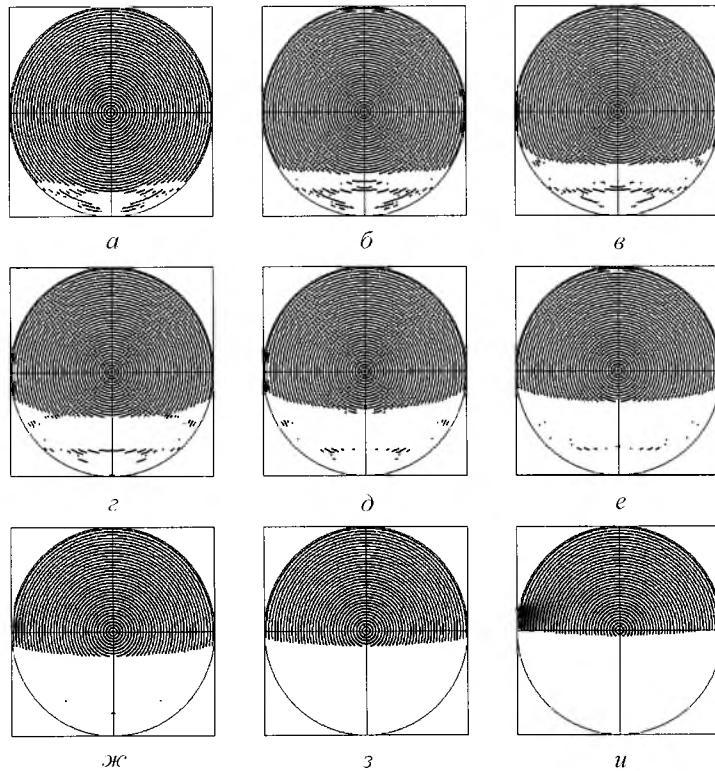


Рис. 3. Эволюция зон контакта трещины при увеличении числа итераций (начальная ошибка  $I_0^0 = 0,141413317$ , всего точек в четвертьобласти  $M = 2590$ ): а – 50 шагов, в  $S_1$  точек 250,  $I_0^0/I_0^{\min} = 1,82$ ; б – 100 шагов, точек 500,  $I_0^0/I_0^{\min} = 2,86$ ; в – 150 шагов, точек 750,  $I_0^0/I_0^{\min} = 4,45$ ; г – 200 шагов, точек 995,  $I_0^0/I_0^{\min} = 7,93$ ; д – 250 шагов, точек 1217,  $I_0^0/I_0^{\min} = 14,90$ ; е – 295 шагов, точек 1423,  $I_0^0/I_0^{\min} = 30,59$ ; ж – 350 шагов, точек 1645,  $I_0^0/I_0^{\min} = 99,35$ ; з – 427 шагов, точек 1953,  $I_0^0/I_0^{\min} = 698,23$ ; и – 600 шагов, точек 2315,  $I_0^0/I_0^{\min} = 316,76$ .

Видно, что вначале поиска правильного решения (при малом числе итераций) внутри контактирующей области оставались неконтактирующие “островки”.

Правильное “наилучшее” решение характеризуется четкой границей раздела между областями  $S_1$  и  $S_2$ . Подобные результаты и тенденции наблюдались для  $N = 5$  и  $3$ .

Для эллиптической трещины результаты приведены только для  $N = 7$ .

1. Для случая  $a/b = 0,5$  получены следующие результаты:  $M_1 = 1807$ ;  $I_0^0 \cong 0,176848$ ;  $I_0^0/I_0^{\min} \cong 793$ . Значения коэффициентов  $A_{i,j}$  равны:  $A_{0,0} = -0,003990$ ;  $A_{2,0} = 0,253894$ ;  $A_{4,0} = 0,558879$ ;  $A_{6,0} = -0,554093$ ;  $A_{2,2} = -0,339360$ ;  $A_{4,2} = -0,256403$ ;  $A_{6,2} = 0,432176$ ;  $A_{4,4} = -0,116535$ ;  $A_{6,4} = 0,057401$ ;  $A_{6,6} = -0,027637$ ;  $A_{1,1} = -0,045144$ ;  $A_{3,1} = -1,132847$ ;  $A_{5,1} = 0,441500$ ;  $A_{7,1} = 0,337741$ ;  $A_{3,3} = 0,465642$ ;  $A_{5,3} = -0,860436$ ;  $A_{7,3} = 0,384260$ ;  $A_{5,5} = 0,211920$ ;  $A_{7,5} = -0,213420$ ;  $A_{7,7} = 0,026615$ .

2. Для  $a/b = 0,2$ :  $M_1 = 1742$ ;  $I_0^0 \cong 0,19257302$ ;  $I_0^0/I_0^{\min} \cong 830$ . Значения коэффициентов  $A_{i,j}$  равны:  $A_{0,0} = -0,003930$ ;  $A_{2,0} = 0,170272$ ;  $A_{4,0} = 0,730953$ ;  $A_{6,0} = -0,641694$ ;  $A_{2,2} = -0,256281$ ;  $A_{4,2} = -0,492151$ ;  $A_{6,2} = 0,599508$ ;  $A_{4,4} = -0,079727$ ;  $A_{6,4} = 0,016402$ ;  $A_{6,6} = -0,026650$ ;  $A_{1,1} = -0,08447$ ;  $A_{3,1} = -1,085793$ ;  $A_{5,1} = 0,199885$ ;  $A_{7,1} = 0,500346$ ;  $A_{3,3} = 0,441619$ ;  $A_{5,3} = -0,737454$ ;  $A_{7,3} = 0,270558$ ;  $A_{5,5} = 0,207685$ ;  $A_{7,5} = -0,211795$ ;  $A_{7,7} = 0,022407$ .

Значения КИН вдоль фронта трещины и зоны контакта для данных случаев представлены соответственно на рис. 4 и 5.

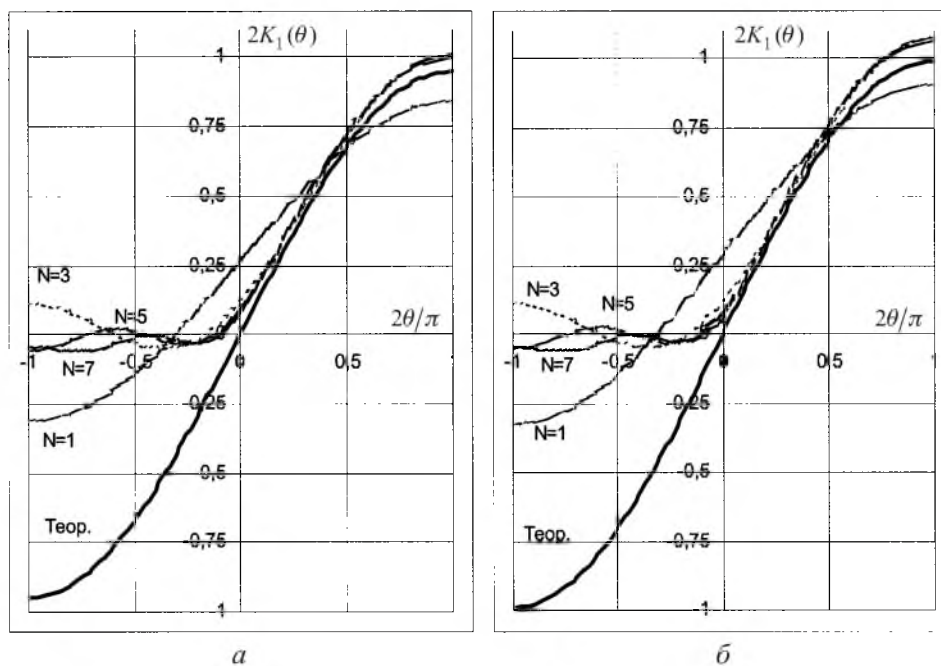


Рис. 4. Значения КИН для эллиптической трещины: а –  $a/b = 0,5$ ; б –  $a/b = 0,2$ .

Полученные результаты интересно сопоставить с данными [4] для внутренней одномерной трещины длины  $2a$ , расположенной симметрично в достаточно широкой пластине, которая подвергается изгибу на бесконеч-

ности, т.е. линейному нагружению. Было получено [4], что учет контакта берегов трещины приводит к увеличению КИН примерно на 7-8%, а точка окончания области контакта расположена на расстоянии  $a/3$  от центра трещины. Полученные нами данные для эллиптической трещины с отношением  $a/b=0,2$  как для величины области контакта, так и для максимальных КИН достаточно близки к этим результатам.

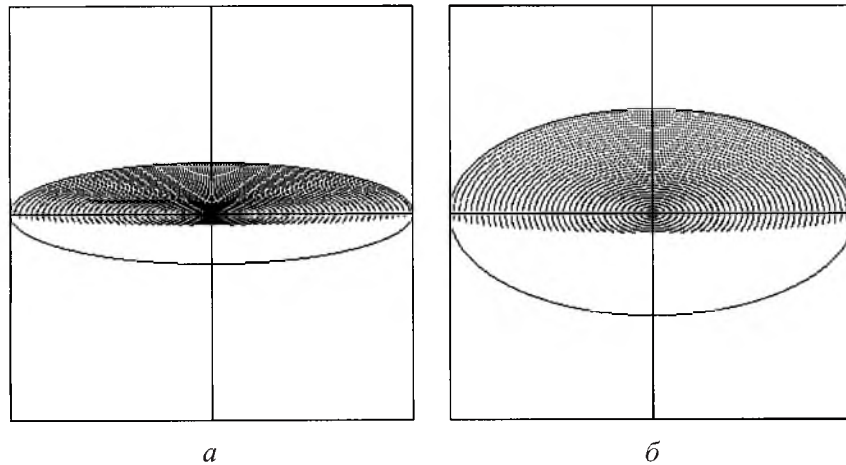


Рис. 5. Уточнённые зоны контакта берегов эллиптических трещин для напряжений контакта в виде полиномиального ряда до 7-й степени:  $a - a/b = 0,2, I_0^0 = 0,1768482$ , на 371-м шаге найдено лучшее отношение  $I_0^0/I_0^{\min} = 829,65$ , при этом в  $S_1$  точек 1742 из 2590;  $б - a/b = 0,5, I_0^0 = 0,1768482$ , на 388-м шаге найдено лучшее отношение  $I_0^0/I_0^{\min} = 793,8$ , при этом в  $S_1$  точек 1807 из 2590.

## Выводы

1. Сформулирована задача о трещине в неограниченном теле с учётом взаимодействия её берегов. Впервые предложен эффективный алгоритм решения поставленной задачи, который сводится к введению фиктивного поля напряжений на всей поверхности трещины и последующей минимизации функционала ошибки на поверхности трещины. Данный функционал состоит из двух компонент: первая служит для определения коэффициентов добавочного поля напряжений, вторая уточняет саму область контакта.

2. Минимизация первой компоненты сводится к решению системы линейных уравнений. Вторая компонента минимизируется постепенно, шаг за шагом, путем выноса из областей  $S_1$  и  $S_2$  точек, которые являются наимудшими с точки зрения минимизации ошибки.

3. Получены конкретные результаты для эллиптической трещины при линейном законе нагружения берегов трещины. Показано, что положительные напряжения, возникающие в результате взаимодействия берегов трещины, незначительно влияют на максимальные значения КИН, которые превышают его исходное значение (без учета контакта) на 3% для круговой трещины и на 7-8% для очень вытянутой трещины. Причем увеличение числа неизвестных с 6 до 18 не очень заметно влияет на точность результатов расчета КИН.

## **Резюме**

Розглядається взаємодія берегів еліптичної тріщини, яка знаходиться в частково від'ємному полі зовнішніх напружень. Проблема полягає як у визначенні області, де відбувається контакт берегів, так і напружень контакту, що виникають при цьому. Останні записуються у вигляді скінченного поліноміального ряду з невідомими коефіцієнтами, які визначаються з умови мінімуму квадратів відхилень переміщень в області контакту від нуля та відхилень сумарних напружень в іншій частині області від заданих. Область контакту визначається в результаті пошуку абсолютного мінімуму згаданих вище відхилень. Приведено конкретні результати розрахунку для тріщини, що знаходиться в лінійному полі напружень.

1. *Орыняк И. В., Гуенко А. Ю.* Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщ. 1. Перемещение берегов трещины при полиномиальном законе нагружения. // Пробл. прочности. – 2002. – № 1. – С. 22 – 40.
2. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1989. – 224 с.
3. *Гольдштейн Р. В.* Задачи теории упругости с неизвестной границей трещины // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – № 2. – С. 7 – 14.
4. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.

Поступила 27. 11. 2000