УДК 622.24.053

Устойчивость колонны буровой установки роторного типа

Г. М. Улитин

Донецкий государственный технический университет, Донецк, Украина

На основе уравнения изгиба весомого стержня исследована задача устойчивости буровой колонны роторного типа. Получено уравнение для определения критической длины в случае растяжения–сжатия. Выполнены расчеты критической длины в зависимости от натяжения талевой системы для буровой установки “WIRTH”.

Особенность роторного способа бурения заключается в приложении растягивающего усилия N (натяжение талевой системы) к верхнему концу бурильной колонны, вследствие чего вся колонна находится в условиях растяжения–сжатия. В настоящей работе, в отличие от работ [1–3], рассмотрен другой подход к решению задач устойчивости бурильных колонн, основанный на использовании функций Ломмеля [4] на примере роторного способа бурения при проходке вертикальных стволов. Такой прием позволяет получить аналитические решения для любых внешних нагрузок с учетом состыковки растянутой и сжатой частей колонны.

В качестве математической модели устойчивости бурильной колонны примем упругий стержень длиной l с весом q единичной длины, загруженный поперечной распределенной нагрузкой p. На верхнем конце при $x = l$ приложена растягивающая сила N и горизонтальная реакция R направляющих бурильной колонны.

Уравнение изогнутой оси весомого стержня представим в виде

$$EJy''' + (ql - N - qx)y' = -R + p(x - l). \tag{1}$$

С помощью замен $\xi = ql - N - qx$ и $u = y'$ оно преобразуется следующим образом:

$$u''_{\xi\xi} + a^2 \xi u = -a^2 \left(R + \frac{p}{q} N \right) - \frac{a^2}{q} p\xi, \tag{2}$$

где $a^2 = (EJq^2)^{-1}$; EJ – изгибная жесткость стержня.

Точка $\xi_0 = 0$ является точкой ветвления решения линейного дифференциального уравнения (2). При этом на верхнем участке стержня имеем $\xi < 0$ (растяжение), на нижнем – $\xi > 0$ (сжатие).

Рассмотрим решение уравнения (2) для нижнего участка стержня. Неоднородному линейному дифференциальному уравнению (2) соответствует однородное

$$u''_{\xi\xi} + a^2 \xi u = 0,$$

решение которого известно [5]:

$$u(\xi)=C_1\xi^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)+C_2\xi^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $J_{1/3}(z)$ и $J_{-1/3}(z)$ – функции Бесселя первого рода.

Вронскиан фундаментальной системы функций

$$\varphi_1(\xi)=\xi^{1/2}J_1\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right),\quad \varphi_2(\xi)=\xi^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right),\quad w(\varphi_1,\varphi_2)=-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

С использованием общего решения однородного уравнения методом вариации произвольных постоянных получаем общее решение уравнения (2):

$$u(\xi)=C_1\xi^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)+C_2\xi^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)-$$

$$-\frac{2\pi a^2}{3\sqrt{3}}\left(R+\frac{p}{q}N\right)\left(\xi^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)\int_0^{\xi}\xi^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)d\xi-\right.$$

$$\left.-\xi^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)\int_0^{\xi}\xi^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)d\xi\right)-$$

$$-\frac{2\pi a^2 p}{3\sqrt{3}\,q}\left(\xi^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)\int_0^{\xi}\xi^{3/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)d\xi-\right.$$

$$\left.-\xi^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)\int_0^{\xi}\xi^{3/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}a\xi^{3/2}\right)d\xi\right).$$

Если ввести новую переменную $z=\frac{2}{3}a\xi^{3/2}$, то

$$u(z)=C_1z^{1/3}J_{1/3}(z)+C_2z^{1/3}J_{-1/3}(z)-$$

$$-\left(R+\frac{p}{q}N\right)z^{1/3}\left(\frac{2a}{3}\right)^{2/3}S_{0,1/3}(z)-\frac{p}{q}z^{1/3}S_{2/3,1/3}(z),$$

где $S_{\mu,\nu}(z)$ – функции Ломмеля [4].

Переходя к новой переменной z, после интегрирования получаем уравнение изогнутой оси стержня:

$$y(z)=C_1\bar{J}_{1/3}(z)+C_2\bar{J}_{-1/3}(z)+C_3+$$

$$+\frac{2}{3q}\left(R+\frac{p}{q}N\right)\overline{S}_{0,1/3}(z)+\frac{p}{q}\left(\frac{2}{3a^2}\right)^{1/3}\overline{S}_{2/3,1/3}(z), \tag{3}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные;

$$\overline{J}_{\pm 1/3}(z)=\int_0^z J_{\pm 1/3}(z)dz; \qquad \overline{S}_{\mu,\nu}(z)=\int_0^z S_{\mu,\nu}(z)dz.$$

Рассмотрим случай, когда $p=0$ при граничных условиях для уравнения (1):

$$y(0)=y'_x(0)=0; \quad y(l)=y'_x(l)=0. \tag{4}$$

Эти условия наиболее соответствуют случаю бурения при проходке вертикальных стволов для роторного способа бурения.

Для удовлетворения граничных условий необходимо знать выражения для углов поворота $y'_x(z)$, изгибающего момента $M(z)$ и поперечной силы $Q(z)$, которые с учетом рекуррентных соотношений для функций Бесселя и Ломмеля [4] принимают вид

$$\begin{cases} y'_x(z)=-aq\left(\dfrac{3z}{2a}\right)^{1/3}\left(C_1J_{1/3}(z)+C_2J_{-1/3}(z)+\dfrac{2R}{3q}S_{0,1/3}(z)\right); \\ M(z)=\left(\dfrac{3z}{2a}\right)^{2/3}\left(C_1J_{-2/3}(z)-C_2J_{2/3}(z)-\dfrac{4R}{9q}S_{-1,-2/3}(z)\right); \\ Q(z)=\dfrac{3}{2}qz\left(C_1J_{1/3}(z)+C_2J_{-1/3}(z)-\dfrac{16R}{27q}S_{-2,1/3}(z)\right). \end{cases} \tag{5}$$

Аналогично можно получить решение для верхнего участка стержня при растяжении:

$$\begin{cases} y(z)=C_1^*\overline{I}_{1/3}(z)+C_2^*\overline{I}_{-1/3}(z)+C_3^*+\dfrac{2R^*}{3q}\overline{G}_{0,1/3}(z); \\ y'_x(z)=aq\left(\dfrac{3z}{2a}\right)^{1/3}\left(C_1^*I_{1/3}(z)+C_2^*I_{-1/3}(z)+\dfrac{2R^*}{3q}G_{0,1/3}(z)\right); \\ M(z)=\left(\dfrac{3z}{2a}\right)^{2/3}\left(C_1^*I_{-2/3}(z)-C_2^*I_{2/3}(z)-\dfrac{4R^*}{9q}G_{-1,2/3}(z)\right); \\ Q(z)=-\dfrac{3}{2}qz\left(C_1^*I_{1/3}(z)+C_2^*I_{-1/3}(z)-\dfrac{16R^*}{27q}G_{-2,1/3}(z)\right), \end{cases} \tag{6}$$

где $z = \frac{2}{3} a(qx - ql + N)^{3/2}$, $I_{1/3}(z)$, $I_{-1/3}(z)$, $G_{\mu,\nu}(z)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и Ломмеля; звездочкой обозначены постоянные для верхнего участка колонны;

$$\bar{I}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z I_{\pm 1/3}(z) dz; \qquad \bar{G}_{0,1/3}(z) = \int_0^z G_{0,1/3}(z) dz.$$

Выражения (3), (5) и (6) позволяют удовлетворить различным граничным условиям и условиям сопряжения участков. На границе стыковки двух участков воспользуемся условием равенства перемещений, углов поворота, моментов и поперечных сил при $z_0 = 0$. Из этих равенств получаем зависимости

$$C_1 = C_1^*, \quad C_2 = -C_2^*, \quad C_3 = C_3^*, \quad R = -R^*. \tag{7}$$

Из условий сопряжения следует, что растянутая часть колонны не остается прямолинейной при потере устойчивости. Этот факт в работе [1] показан при использовании на участке растяжения приближенного уравнения.

Удовлетворяя граничным условиям (4), получаем однородную систему линейных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, R с учетом соотношений (7). Приравнивая определитель этой системы к нулю, приходим к уравнению для определения критических длин:

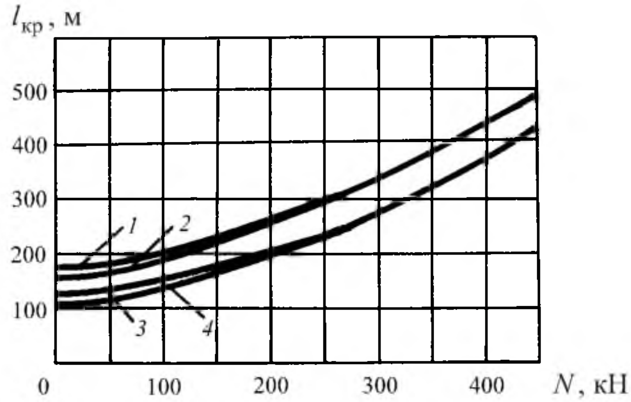
$$\begin{aligned} &(\bar{J}_{1/3}(\alpha) - \bar{I}_{1/3}(\beta))(J_{-1/3}(\alpha) G_{0,1/3}(\beta) + I_{-1/3}(\beta) S_{0,1/3}(\alpha)) - \\ &- (\bar{J}_{-1/3}(\alpha) + \bar{I}_{-1/3}(\beta))(J_{1/3}(\alpha) G_{0,1/3}(\beta) - I_{1/3}(\beta) S_{0,1/3}(\alpha)) - \\ &- (\bar{S}_{0,1/3}(\alpha) - \bar{G}_{0,1/3}(\beta))(J_{1/3}(\alpha) I_{-1/3}(\beta) + J_{-1/3}(\alpha) I_{1/3}(\beta)) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\alpha = \frac{2}{3} a(ql - N)^{3/2}$; $\beta = \frac{2}{3} a N^{3/2}$.

Вычисление корней α_i уравнения (8) проведено для буровой установки “WIRTH” со следующими параметрами: $EJ = 88{,}55$ МН$\cdot$м^2; $q = 1331$ Н/м. Первому минимальному положительному значению α_1 соответствует критическая длина, определяемая по формуле

$$l_{\text{кр}} = \frac{1}{q} \left(\frac{3\alpha_1}{2a} \right)^{2/3} + \frac{N}{q}.$$

Аналогично можно получить уравнения для определения критической длины при различном закреплении концов стержня. Рисунок иллюстрирует зависимости критической длины $l_{\text{кр}}$ от растягивающей силы N. Видно, что с увеличением глубины бурения вид граничного условия на верхнем конце стержня практически не влияет на его устойчивость [1].



Зависимость критической длины стержня от растягивающей силы при различных видах граничных условий для буровой установки "WIRTH": *1, 2, 3, 4* – соответственно жесткая заделка верхнего и нижнего концов, жесткая заделка нижнего и шарнирное закрепление верхнего, шарнирное закрепление нижнего и жесткая заделка верхнего, шарнирное закрепление верхнего и нижнего концов стержня.

Вышеприведенный расчет критических длин позволяет путем регулировки натяжения талевой системы предотвратить потерю устойчивости бурильной колонны.

Предложенный подход к решению задач устойчивости весомого стержня дает возможность, в отличие от работы [1], рассматривать граничные условия как смешанного вида, так и неоднородные. Кроме того, с использованием асимптотических представлений функций Бесселя и Ломмеля для больших значений аргумента несложно получить корни уравнения устойчивости для больших глубин бурения, что ранее представляло определенные трудности [6]. Так, например, если положить $N = 0$, то для граничных условий (4) имеем уравнение $\mathrm{tg}(\alpha - 5\pi/12) = \alpha \ln \alpha$, минимальный положительный корень которого $\alpha_1 = 2{,}45$. По результатам работы [1], соответствующий корень $\alpha_1 = 2{,}37$, при этом он получен численными методами.

Резюме

На основі рівняння згину вагомого стрижня досліджено задачу стійкості бурової колони роторного типу. Одержано рівняння для визначення критичної довжини у випадку розтягу–стиску. Виконано розрахунки критичної довжини в залежності від натягу талевої системи для бурової установки "WIRTH".

1. *Сароян А. Е.* Теория и практика работы бурильной колонны. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
2. *Сароян А. Е.* Бурильные колонны в глубоком бурении. – М.: Недра, 1979. – 232 с.
3. *Эпштейн Е. Ф., Мазейчик В. И., Ивахнин И. И., Асатурян А. Ш.* Расчет бурильных труб в геологическом бурении. – М.: Недра, 1979. – 160 с.

4. *Ватсон Г. И.* Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 798 с.

5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

6. *Тихонов В. С., Агеева И. Ю.* Свободные колебания вращающейся глубоководной бурильной колонны // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Киев. гос. техн. ун-т стр-ва и архитектуры, 1996. – Вып. 62. – С. 135 – 142.

Поступила 09. 11. 2000