Рассматривается одна из актуальных задач теории графов – разложение полных графов на изоморфные деревья. Предлагается новый поход, позволяющий получить новые результаты в этой области.

УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ, О.В. МИРОНЕНКО

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ Т-ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

Введение. Основные проблемы, которые рассматриваются в данной работе, связаны с вопросом о существовании разложений полных графов на подграфы, взятые из некоторого множества графов, и с перечислением всех соответствующих разложений. Эта тема во всем своем многообразии разворачивается в различных публикациях на протяжении последних 150 лет. Но особое внимание привлекает задача о разложении полных графов на деревья. Серьезные исследования в этом направлении получены Л. Байнеке [1], а также Ш. Хуангом и А. Роса [2]. Самые поздние исследования отражены А.Я. Петренюком в [3], где содержится достаточно полная библиография. Наряду с теоретическими результатами в [3] приведены также результаты, полученные автором с помощью компьютерных расчетов алгоритмами простого перебора вариантов. Ввиду комбинаторной сложности решаемых задач эти результаты имеют ограниченный характер. В данной работе предлагается подход, позволяющий получить эти результаты теоретическим путем и значительно расширить возможности для дальнейших компьютерных расчетов.

Постановка задачи. Дальнейшие обозначения и определения взяты из [3].

Определение 1. Подграф называется фактором графа, если множество вершин этого подграфа совпадает с множеством вершин графа.

Определение 2. Семейство n-вершинных деревьев $T1$, $T2$,...,Ts называют древесной упаковкой размера s n-вершинного полного графа K_n, если: 1) все эти деревья являются факторами графа K_n; 2) никакие два из них не имеют общих ребер.

Деревья, составляющие упаковку, называются ее компонентами. Если, кроме того, все компоненты упаковки изоморфны некоторому дереву T, а каждое ребро K_n. принадлежит одной из компонент, то такая упаковка называется ***T-факторизацией*** полного графа K_n.

Одна из актуальных задач на данный момент – такая: для каких деревьев T существуют T-факторизации графа K_n?

Л. Байнеке показал, что для существования T-факторизации необходимо, чтобы $n = 2k$ и выполнялось условие $\Delta(T) \le k$, где $\Delta(T)$ – максимальная степень вершины в дереве T. Деревья, удовлетворяющие этим условиям, будем называть допустимыми.

Эта задача полностью решена для $n \le 8$. А.Я. Петренюк [4] решил ее для $n =$ $= 10$. Оказалось, что среди 106 неизоморфных деревьев этого порядка (их список приведен в приложении III известной книги Ф. Харари [5]) только 85 допускают T-факторизацию. Для четных значений $n > 10$ пока полного решения этой задачи не получено.

Основная система уравнений и ее следствия. Каждое допустимое дерево T с $n = 2k$ определяет вектор $\boldsymbol{d}(T) = (d_1, d_2,\ldots,d_k)$, где d_i $(1\le i \le k)$, означает количество вершин степени i в дереве T.

Назовем ***типом*** вершины x в T-факторизации R вектор $(s_1, s_2,\ldots,s_k)$, где s_j $(1\le j\le k)$ означает количество компонент в R, которые имеют степень j в вершине x. Возможные типы вершин можно определить из следующих соотношений:

$$s_1 + s_2 +\ldots+ s_k = k,$$
$$s_1 +2s_2 +\ldots+ks_k = n-1, \qquad (1)$$

s_i – целое число, $s_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Обозначим $w(n)$ число решений системы (1), или число возможных типов вершин порядка n. Так для $n = 10$ существует точно 5 возможных типов вершин, а именно: $t_1 = (14000)$; $t_2 = (22100)$; $t_3 = (30200)$; $t_4 = (31010)$; $t_5 = (40001)$.

Для удобства здесь запятые пропущены. Аналогично, для $n = 12$, $w(12) = 7$ и $t_1 = (150000)$; $t_2 = (231000)$; $t_3 = (312000)$; $t_4 = (320100)$; $t_5 = (401100)$; $t_6 = (410010)$; $t_7 = (500001)$. Для $n = 14$ имеем $w(14) = 11$, а именно: $t_1 = (1600000)$; $t_2 = (2410000)$; $t_3 = (3220000)$; $t_4 = (3301000)$; $t_5 = (4030000)$; $t_6 = (4111000)$; $t_7 = (4200100)$; $t_8 = (5002000)$; $t_9 = (5010100)$; $t_{10} = (5100010)$; $t_{11} = (6000001)$.

Обозначим a_j – число вершин типа t_j в T-факторизации R. Построим вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(R) = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_{\omega(n)})$, и пусть $\boldsymbol{S}=(s_{ij})$ – матрица с $w(n)$ строками и k столбцами, в которой i-я строка соответствует i-му типу в R. Тогда справедливо соотношение:

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{S} = k \cdot \boldsymbol{d}(T). \qquad (2)$$

Это соотношение достаточно детально исследовалось для малых значений n, а А.Я. Петренюком – для $n = 10$, которое записано ниже.

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 4a_5 &= 5d_1, \\ 4a_1 + 2a_2 + \quad a_4 &= 5d_2, \\ a_2 + 2a_3 &= 5d_3, \\ a_4 &= 5d_4, \\ a_5 &= 5d_5. \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно установить, что определитель этой системы равен 0. Это видно из расчетов, который устанавливает линейную зависимость строк матрицы системы. Если обозначить строки римскими числами I, II, III, IV, V, то существует такая зависимость: 4·I –II – 6·III – 11·IV – 16·V = 0.

Эта зависимость в правой части эквивалентна такой:

$$4d_1 = d_2 + 6d_3 + 11d_4 + 16d_5 . \tag{4}$$

Для $n = 12$ соответствующие расчеты имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 5a_7 &= 6d_1, \\ 5a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 + \quad a_6 &= 6d_2, \\ a_2 + 2a_3 + \quad a_5 &= 6d_3, \\ a_4 + a_5 &= 6d_4, \\ a_6 &= 6d_5, \\ a_7 &= 6d_6. \end{aligned} \tag{5}$$

Строки имеют такую зависимость: 5·I – II – 7·III – 13·IV – 19·V – 25·VI = 0.

В правой части это еквивалентно

$$5d_1 = d_2 + 7d_3 + 13d_4 + 19d_5 + 25d_6 . \tag{6}$$

Очевидно, что системы уравнений (3) и (5) имеют решение в целых числах тогда и только тогда, когда выполняются условия (4) и (6). Общую зависимость элементов матрицы $\boldsymbol{S}$ устанавливает

Теорема 1. Определитель системы (2) равен нулю, и система имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(k-1)d_1 = \sum_{i=2}^{k} [k\,(i-2)+1]\, d_i . \tag{7}$$

*Доказательство***.** Рассмотрим соотношения (1) и умножим первую строку на $2k - 1$, а вторую – на k. Так как $n = 2k$, то получим в правых частях строк одинаковые выражения. Сравнивая левые части, получаем зависимость

$$(k-1)s_1 = s_2 + (k+1)s_3 + (2k+1)s_4 + \ldots\ldots + [k\,(k-2)+1]s_k . \tag{8}$$

Так как в матрице $\boldsymbol{S}$ каждая строка соответствует определенному типу вершины, то ее элементы в каждой строке также удовлетворяют условию (8).

$$(k-1)s_{i1} = s_{i2} + (k+1)s_{i3} + (2k+1)s_{i4} + \ldots\ldots + [k(k-2)+1]s_{ik},\ (i = 1, 2, \ldots). \quad (9)$$

Умножим все строки на a_i ($i = 1, 2, \ldots, w(n)$) и сложим. Получаем

$$(k-1)\sum_{i=1}^{\omega(n)} a_i\, s_{i1} = \sum_{i=1}^{\omega(n)} a_i\, s_{i2} + (k+1)\sum_{i=1}^{\omega(n)} a_i\, s_{i3} + \ldots + [k(k-2)+1]\sum_{i=1}^{\omega(n)} a_i\, s_{ik}\,.$$

Здесь каждое слагаемое соответствует строке системы уравнений (2), и первая строка линейно выражается через другие, что свидетельствует о справедливости первого утверждения теоремы. В правой части получим при этом выражение (7), справедливость которого следует из известного соотношения для вектора степеней вершин $\boldsymbol{d}(G)$ произвольного графа G: $\sum_{i=1}^{n} d_i = n$; $\sum_{i=1}^{n} i d_i = 2m$;

где m – количество ребер графа. Учитывая то, что для допустимых деревьев $n = 2k$, $m = 2k - 1$, а степени вершин не превышают k, получаем систему

$$d_1 + d_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + d_{k-1} + d_k = n = 2k,$$

$$d_1 + 2d_2 + \ldots + (k-1)d_{k-1} + kd_k = 2n - 2 = 4k - 2. \quad (10)$$

После тех же операций, как и для системы (1) получим (7).

Исследуем более детально уравнение (8). Максимально возможное значение для s_1 равно $k - 1$.

Лемма 1. Для всех типов вершин справедливо

$$s_i = 0 \text{ для } i \geq s_1 + 2\,. \quad (11)$$

Для $s_1 = 1$ единственным решением (8) есть $s_2 = k - 1$, остальные значения равны 0. Для максимального значения $s_1 = k - 1$ получим тоже единственное решение $s_k = 1$, остальные значения равны 0. Тем самым для крайних значений s_1 лемма подтверждается. Для остальных значений s_1 можно найти такое решение (8): $s_2 = k - 1 - s_1$; $s_i = 1$, $i = s_1 + 1$. Это и доказывает лемму.

Поскольку в каждой i-й строке системы (2) используются только координаты s_i всех типов вершин, то с помощью этой леммы можно вывести несколько зависимостей о степенях d_i .

Лемма 2. В каждом типе вершин $s_2 \geq s_{k-1}$.

Действительно, решение (8) существует только для $s_1 = k - 2$. По лемме 1 имеет место $s_2 = \mathrm{s}_{\mathrm{k}-1} = 1$. Для $s_1 < k - 2$ всегда $\mathrm{s}_{\mathrm{k}-1} = 0$, что и доказывает лемму. Суммируя это неравенство по всем строкам, получим следующий результат.

Теорема 2 (см. в [3] теорему **3.14**). Если допустимое дерево с числом вершин $n = 2k \geq 10$ допускает T-факторизацию, то $d_2 \geq d_{k-1}$.

В условии (8) для s_{k-2} существует два случая ненулевых значений при $s_1 = k-2$; $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_{k-2} = 1$; $s_2 = 2$, $s_3 = 0$, $s_{k-2} = 1$. Суммируя эти результаты по строкам, получим такой результат.

Теорема 3 (см. в [3] теорему **3.16**). Если допустимое дерево с числом вершин $n = 2k$, $k \geq 6$ допускает T-факторизацию, то $d_2 + 2d_3 \geq 2d_{k-2}$.

Фиксируя ненулевые решения (8) для s_{k-3}, получаем три случая: $s_1 = k-2$, $s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = s_{k-3} = 1$; $s_1 = k-3$, $s_2 = s_3 = 1$, $s_4 = 0$, $s_{k-3} = 1$; $s_1 = k-4$, $s_2 = 3$, $s_{k-3} = 1$. Для этого существует

Теорема 4 (см. в [3] теорему **3.18**). Если допустимое дерево порядка $n = 2k$, $k \geq 8$ допускает T-факторизацию, то $d_2 + 3d_3 + 3d_4 \geq 3d_{k-3}$.

Для $n = 10$ все эти соотношения приведены в [3]. Однако они ничем не помогают для определения достаточных условий существования T-факторизаций, поэтому все результати получены с помощью компьютерных расчетов. Для решения системы (3) сведем ее к виду

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 5d_1 - 5d_3 - 15d_4 - 20d_5, \\ 4a_1 + 2a_2 &= 5d_2 - 5d_4, \\ a_2 + 2a_3 &= 5\mathrm{d}_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Эта система сводится к уравнению

$$2a_1 + a_2 = 5(d_2 - d_4)/2. \tag{13}$$

Отсюда вытекает, что $d_2 \geq d_4$ і $d_2 \equiv d_4 \pmod 2$. Подставляя возможные значения для a_2, получим a_1, а затем и все значения a_i, т. е. решение может быть не единственным. Аналогичные результаты можно получить и для больших значений n. Однако проблема нахождения достаточных условий существования T-факторизации остается пока открытой.

Г.П. Донець, О.В. Мироненко

ПРО НЕОБХІДНІ УМОВИ Т-ФАКТОРІЗАЦІЇ ПОВНИХ ГРАФІВ

Розглядається одна з актуальних задач теорії графів – розкладання повних графів на ізоморфні дерева. Пропонується новий підхід, що дозволяє отримати нові результати в даній галузі.

G.A. Donets, O.V. Mironenko

ABOUT NESSISERY CONDITIONS FOR T-FACTORIZATION OF FULL GRAPHS

It is considered an actual problem in graphs theory – decomposition of full graphs into isomorphic trees. A new approach is proposed, which permits to obtain new results in considered field of research.

1. *Beineke L.W.* Decomposition of complete graphs into forests // Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. – 1964. – N 9. – P. 589 – 594.
2. *Huang C., Rosa A.* Decomposition of complete graphs into trees // Ars Kombinatoria. – 1978. – N 5. – P. 23 – 63.

3. *Петренюк А.Я.* Екстремальні розклади повних графів. – Кіровоград: Комбінаторні конфігурації, 2009. – 169 с.
4. *Petrenjuk A.J.* On tree factorizations of K_{12} // J. of Combin. Math. and Combin. Computting. – 2002. – N 41.– P. 193 – 202.
5. *Харари Ф.* Теория графов . – М.: Мир, 1973. – 182 с.

Получено 17.05.2010