УДК 519.8

Т.А. БАРДАДЫМ, О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МЕЖОТРАСЛЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ*

Рассмотрены две оптимизационные задачи межотраслевого планирования структурно-технологических изменений, представленные в виде квадратичных задач. Описаны возможные способы получения верхних оценок путем применения техники академика Н.З. Шора для нахождения двойственных лагранжевых оценок с использованием функционально избыточных ограничений.

Введение. В работе [1] рассмотрена оптимизационная модель планирования структурно-технологических изменений в переходной экономике, которая базировалась на уравнениях межотраслевого баланса. Модель предназначена для оптимизации изменений межотраслевой структуры затрат и конечных доходов при условии отсутствия усиления инфляции издержек и ограничениях на ресурсы, выделяемые на проведение структурно-технологических преобразований. Были рассмотрены два критерия оптимальности:

А) максимизация совокупного конечного дохода потребителей,

В) максимизация мультипликатора «прирост доходов – прирост производства».

Также предполагалась возможность использования не только данных двух вариантов целевой функции, но и их взвешенной линейной комбинации.

В работе [1] приведены формулировки многоэкстремальных оптимизационных задач для каждой из целевых функций А) и В). Для их решения разработаны методы нахождения локальных экстремумов на основе r-алгоритма в сочетании с мультистартом, которые легли в основу вычислительных модулей программной системы IOMSTC (Intersectoral Optimization Models of Structural and

*Работа выполнена при частичной поддержке SNSF (Швейцария), проект № IZ73ZO_127962

Technological Changes), созданой в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Нахождение нескольких локальных экстремумов позволяет сделать процесс принятия решения при определении основных направлений изменения технологических коэффициентов более гибким. При этом вопрос о качестве полученных решений (в смысле близости к глобальному) остается открытым. Некоторые ответы на этот вопрос можно получить, как упоминалось в [1], если представить предложенные задачи в виде невыпуклых квадратичных задач и воспользоваться подходом академика Н.З. Шора для получения двойственных лагранжевых оценок с использованием функционально избыточных ограничений [2].

Постановка квадратичных задач. Экономический смысл рассматриваемой межотраслевой модели планирования структурно-технологических изменений подробно изложен в работе [1]. Рассмотрим формулировки оптимизационных задач, которые представлены в разделе 2 работы [1], сохранив принятые там обозначения. Переменными в этих задачах выступают:

- матрица $\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ (определяет изменения существующих значений компонент матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ коэффициентов прямых затрат для n отраслей, известной также как матрица Леонтьева [3]);

- вектор $\Delta q = \{\Delta q_i\}_{i=1}^{n}$ (определяет изменения существующих значений компонент вектора $q = \{q_i\}_{i=1}^{n}$, которые определяют долю конечных доходов в каждой из отраслей);

- вектор z (дополнительные переменные, которые отражают структуру конечных доходов, получаемых от различных видов экономической деятельности).

Задача А [1] максимизации совокупного конечного дохода потребителей:

$$F_1(z) = \frac{z^T h}{1 - z^T \alpha} \to \max \tag{1}$$

при ограничениях

$$z_j - \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} + \Delta a_{ji}) z_i = q_j + \Delta q_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

(определяют дополнительные переменные)

$$\beta(a_{jj} + \Delta a_{jj}) + \beta(l_j(q_j + \Delta q_j) + d_j) + \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq j}}^{n} (a_{ij} + \Delta a_{ij}) \le \beta, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

(исключают усиление инфляции издержек, $0 < \beta < 1$ – заданный доверительный параметр)

$$a_{jj} + \Delta a_{jj} + l_j(q_j + \Delta q_j) + d_j \le 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

(баланс затрат и добавленной стоимости)

$$\underline{\Delta q_i} \le \Delta q_i \le \overline{\Delta q_i}, \quad \underline{\Delta a_{ij}} \le \Delta a_{ij} \le \overline{\Delta a_{ij}}, \quad i, j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

(границы изменения коэффициентов, обусловленные особенностями существующих технологий и их физическим смыслом),

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{kij} \max(0, -\Delta a_{ij}) \le B_k, \quad k = \overline{1, K}, \tag{6}$$

(ограничения на ресурсы при проведении структурно-технологических преобразований).

Задача В [1], в которой в качестве целевой функции выступает мультипликатор «прирост доходов – прирост производства» (мультипликатор Кейнса):

$$F_2(z) = z^T \alpha \to \max \tag{7}$$

при тех же ограничениях (2)–(6).

Для того, чтобы преобразовать задачи А и В к квадратичному виду:

1) заменим ограничение (6) на

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{kij} y_{ij}^2 \le B_k, \; k = \overline{1, K}, \tag{8}$$

$$y_{ij}^2 + \Delta a_{ij} \ge 0, \; i, j = \overline{1, n}; \tag{9}$$

2) в задаче А введем дополнительную переменную v:

$$v z^T \alpha + z^T h - v = 0. \tag{10}$$

Тогда задаче А соответствует квадратичная задача

$$\max v \tag{11}$$

при ограничениях (2)–(5) и (8)–(10), а задаче В – квадратичная задача (2)–(5), (7)–(9).

Двойственные лагранжевые оценки для квадратичных задач с использованием функционально избыточных ограничений. Для нахождения верхней оценки в квадратичных задачах максимизации

$$f^* = \max_{x \in \Re^n} (x^T K_0 x + b^T{}_0 x), \tag{12}$$

$$x^T K_i x + b^T{}_i x + c_i = 0, i \in I \;, \; x^T K_i x + b^T{}_i x + c_i \le 0, \; i \in J, \tag{13}$$

можно применить подход, предложеный академиком Н.З. Шором – найти

$$\psi^* = \inf_{u \in D \cap U^-} \psi(u) \ge f^*, \tag{14}$$

где $\psi(u) = \max_{x \in \Re^n} L(x, u)$, $L(x, u)$ – функция Лагранжа для исходной задачи, D – множество двойственных переменных u, в которых матрица $K(u)$ квадратичной формы $L(x, u)$ отрицательно определена, $U^- = \{u : u_i \le 0, i \in J\}$. А расширение исходной квадратичной постановки за счет добавления новых функционально избыточных ограничений позволяет улучшать полученную для нее оценку (за счет большей "мобильности" квадратичной матрицы функции Лагранжа в результате расширения области D). Еще в 80-х годах Н.З. Шором предлагался следующий путь расширения задачи:

1) добавление в квадратичную задачу ограничений, которые вводят новые переменные $R(\alpha_i) = R(\alpha_j)R(\alpha_k)$, $\alpha_i = \alpha_j + \alpha_k$, вектор $\alpha_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^n)^T \le \overline{\alpha}$ определяет переменную $R(\alpha_i)$, которой в исходном пространстве $\Re^n$ соответствует моном $R(\alpha_i) = x^{\alpha_i^1} x^{\alpha_i^2} \ldots x^{\alpha_i^n}$. Вектор $\overline{\alpha}$, который теоретически может выбираться каким угодно, ограничивает количество этих переменных. (В работе [2] эта схема использовалась для понижения степени полинома при сведении его к квадратичной функции при квадратичных ограничениях. Однако следует отметить, что любую квадратичную функцию (полином) можно рассматривать как полином более высокой степени, коэффициенты которого при старших степенях равны нулю);

2) добавление ограничений, полученных путем перемножения ограничений задачи во всех возможных сочетаниях (по два, по три и т.д.). Полученные ограничения, содержащие мономы, степень которых не позволяет их представление в виде квадратичной формы, исключаются. Но тогда включаются их линейные комбинации степени не больше двух. Например, если задача имеет ограничения

$$x_1^2 = (a_1, x) + b_1,\ x_2^2 = (a_2, x) + b_2,\ x_1 x_2 = (a_3, x) + b_3,$$

то ограничения $x_1^2 x_2^2 = ((a_1, x) + b_1)((a_2, x) + b_2)$ и $x_1^2 x_2^2 = ((a_3, x) + b_3)^2$ игнорируются, но $((a_1, x) + b_1)((a_2, x) + b_2) = ((a_3, x) + b_3)^2$ добавляется в задачу.

Сочетание этих двух приемов позволяет построить сколь угодно большое число ограничений. Описанная схема была применена для задачи нахождения глобального минимума полинома с вектором старших степеней s (отметим, что все компоненты вектора s четные, если полином ограничен снизу). Для случая, когда: 1) вводятся переменные при $\overline{\alpha} = s/2$; 2) вследствие отсутствия ограничений в исходной задаче в результате перемножений имеет место только семейство ограничений вида $R(\alpha_i)R(\alpha_j) - R(\alpha_k)R(\alpha_l) = 0$ для всех $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k + \alpha_l$, был получен теоретический результат о необходимом и достаточном условии точности оценки [2].

Отметим, что в качестве функционально избыточных ограничений могут выступать любые квадратичные ограничения (как с исходными переменными, так и с произвольными новыми), которые не влияют на допустимую область исходной квадратичной задачи и «полезно» расширяют эффективное множество функции $\psi(u)$. Например, если в произвольную квадратичную задачу добавить ограничение $y^2 - x^T K_0 x - b^T{}_0 x + f^* = 0$, то двойственная оценка ψ^* (14) будет точной.

Таким образом, возможностей построения функционально избыточных ограничений существует достаточно много, и главный вопрос заключается в том, какие из них следует выбирать для достижения необходимого результата (как минимум, чтобы не увеличить внешнюю задачу (по двойственным переменным) до размерности, которая делает решение задачи нереальным с практической точки зрения). На сегодняшний день универсального ответа на этот вопрос нет – на практике для каждой конкретной задачи используются ее специфика, общие соображения и метод проб и ошибок.

Нахождение верхних оценок для задач А и В. Применим технику Н.З. Шора для оценки целевых функций в вышеописанных задачах межотраслевого планирования. Нетрудно видеть, что для исходных квадратичных постановок задачи А (2)–(5), (8)–(11) и задачи В (2)–(5), (7)–(9) область отрицательной определенности для матрицы функции Лагранжа – пустое множество, и этому случаю соответствует тривиальная оценка $+\infty$. Поэтому предлагается модифицировать постановку задачи следующим образом:

1) в общем случае необходимо сделать замену переменных $\Delta\tilde{q}_i = \Delta q_i - \dfrac{\overline{\Delta q_i} + \underline{\Delta q_i}}{2}$, $\Delta\tilde{a}_{ij} = \Delta a_{ij} - \dfrac{\overline{\Delta a_{ij}} + \underline{\Delta a_{ij}}}{2}$, и заменить ограничения (5) на ограничения вида $\Delta\tilde{q}_i^2 \le \dfrac{(\overline{\Delta q_i} - \underline{\Delta q_i})^2}{4}$, $\Delta\tilde{a}_{ij}^2 \le \dfrac{(\overline{\Delta a_{ij}} - \underline{\Delta a_{ij}})^2}{4}$, $i, j = \overline{1,n}$. Для упрощения изложения дальше будем предполагать, что $\overline{\Delta q_i} + \underline{\Delta q_i} = 0$, и, следовательно, ограничения (5) заменяются на

$$\Delta q_i^2 \le \overline{\Delta q_i}^2, \Delta a_{ij}^2 \le \overline{\Delta a_{ij}}^2,\ i, j = \overline{1,n}; \tag{15}$$

2) для переменных z и y воспользуемся несколько искусственным приемом, добавив ограничения

$$z_i^2 \le \overline{z}_i^2,\ y_{ij}^2 \le \overline{y}_i^2,\ \ i, j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

а в задаче А еще и

$$v^2 \le \overline{v}^2. \tag{17}$$

Численные значения параметров $\overline{z}$, $\overline{y}$ и $\overline{v}$, которые задают возможные диапазоны изменения соответствующих переменных, определяются по результатам анализа исходной задачи. Недостаток этого приема заключается в том, что если оценка $\psi^* = \psi(u^*)$ достигается при u^*, таком что соответствующий хотя бы одному из ограничений (16), (17) множитель Лагранжа не равен нулю, то значение ψ^* будет зависить от параметров $\overline{z}$, $\overline{y}$ и $\overline{v}$. Поэтому для лучшего результата желательны дополнительные ограничения, которые бы «сгладили» эту зависимость. Однако, такое расширение имеет и свои позитивные моменты благодаря наличию ограничений типа $x_i^2 \le \overline{x}_i^2$ по всем переменным. Сведем квадратичные задачи к однородному виду путем домножения всех линейных мономов в задаче на дополнительную бинарную переменную t, а условие бинарности учтем путем добавления в ограничения уравнения

$$t^2 = 1. \tag{18}$$

При этом значение двойственной оценки, как показано в [4], не изменится.

Таким образом, мы получили однородные квадратичные задачи (чтобы не дублировать практически те же формулы, будем ссылаться на старые, уточнив лишь, что все линейные мономы в них домножены на переменную t): задача (2)–(4), (8)–(11), (15)–(18) соответствует задаче А, и задача (2)–(4), (7)–(9), (15), (16), (18) – задаче В. Эти постановки будем считать базовыми, а двойственные оценки (14) для них в дальнейшем можно будет уточнять, добавляя новые функционально избыточные ограничения.

Используя те же приемы, которые были применены в работе [4] для доказательства теорем и их следствий о сведении нахождения оценки ψ^* (14) в ряде случаев к безусловной задаче минимизации (на основе точной негладкой штрафной функции и того факта, что для однородных квадратичных задач решение внутренней задачи достигается при $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$), можно доказать следующую теорему.

Теорема. Если множество ограничений однородной квадратичной задачи (задачи (12), (13), в которой $\forall i \in \{0\} \cup I \cup J \;\; b_i = 0$) включает набор ограничений $x_i^2 + c_i = 0$, $i \in I_1$, и $x_i^2 + c_i \le 0$, $i \in J_1$, такой, что $I_1 \cup J_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $I_1 \cap J_1 = \{\varnothing\}$, то при $N > -\left(\sum_{i \in I_1} c_i + \sum_{i \in J_1} c_i\right)$

$$\psi^* = \min_{u \in U^-} \left(\sum_{i \in I \cup J} c_i u_i + N \max\left(0; u_i, i \in J_1; \lambda_{\max}(K(u))\right) \right), \tag{19}$$

где $U^- = \{u : u_i \le 0, i \in (J \setminus J_1)\}$.

В результате задача А и задача В сводятся к задачам вида (19), а их размерности равны соответственно $(3n^2 + 5n + K + 3)$ (размерность матрицы $K(u)$ – $(2n^2 + 2n + 2)$) и $(3n^2 + 5n + K + 1)$ (размерность матрицы $K(u)$ – $(2n^2 + 2n + 1)$). При такой постановке не нужно решать внутреннюю задачу (систему линейных уравнений), и ограничение на отрицательную определенность матрицы функции Лагранжа учтено непосредственно в функционале. Отметим, что при добавлении новых семейств функционально избыточных ограничений в виде однородных квадратичных ограничений (в случае наличия линейных мономов, они умножаются на ту же переменную t) общий вид задачи (19) не меняется.

Вычислительные експерименты. Для экспериментальных исследований была написана программа на языке Octave, реализующая описанный подход для нахождения оценки ψ^* для задачи В (для решения задачи минимизации (19) использовалась модификация r-алгоритма [2]). В качестве тестовой выбрана семиотраслевая модель с одним ограничением вида (6) (на ресурсы для проведения структурно-технологических преобразований), для которой мультипликатор Кейнса в известном локальном минимуме равен 0,524. Параметры ограничений (16) приняты равными: $\overline{z}_i = 1$, $\overline{y}_{ij} = \sqrt{\Delta a_{ij}}$, $i, j = \overline{1, n}$. Размерность матрицы $K(u)$ равна 113×113, количество двойственных переменных (размерность вектора u) – 184. Полученная оценка равна 0,916. Сейчас исследования находятся на этапе определения приемлемого с вычислительной точки зрения набора избыточных ограничений, чтобы получать оценку с удовлетворяющей точностью за приемлемое время.

Т.О. Бардадим, О.А. Березовський

ВЕРХНІ ОЦІНКИ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ МІЖГАЛУЗЕВОГО ПЛАНУВАННЯ СТУКТУРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ ЗМІН

Розглянуто дві оптимизаційні задачі міжгалузевого планування структурно-технологічних змін [1], які представлені у вигляді квадратичних задач. Описані можливі способи отримання верхніх оцінок шляхом застосування техніки академіка Н.З. Шора для знаходження двоїстих лагранжевих оцінок з використанням функціонально надлишкових обмежень.

T.O. Bardadym, O.A. Berezovskyi

UPPER BOUNDS FOR OPTIMIZATION PROBLEM OF INTERSECTORAL PLANNING OF STRUCTURAL AND TECHNOLOGICAL CHANGES

Two optimisation problems of interbranch planning of structural and technological changes [1] formulated as quadratic type problems are considered. Possible ways for finding upper bounds by technique of Academician N.Z. Shor to find Lagrangean dual bounds with the use of superfluous constrains are described.

1. *Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б.* Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 26 – 49.
2. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
3. *Леонтьев В.* Экономические эссе. – М.: Политиздат, 1990. – 417 с.
4. *Березовский О.А., Стецюк П.И.* Об одном способе нахождения двойственных квадратичных оценок Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 89–99.

Получено 06.04.2010