УДК 518.9

А.А. БЕЛОУСОВ

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматриваются игровые задачи преследования для линейных систем с интегральными ограничениями на управления. Предлагаемая схема использует идеи метода разрешающих функций. Формулируется аналог условия Л.С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия решения задачи за некоторое гарантированное время.

Введение. Динамические системы с интегральными ограничениями на управление имеют важное прикладное значение. Поэтому все методы в теории дифференциальных игр, которые возникают, как правило, для геометрических ограничений на управления игроков впоследствии обобщаются на случай интегральных ограничений.

Так первый прямой метод Л.С. Понтрягина [1] был развит в работах М.С. Никольского на случай интегральных ограничений на управления. К этой же методике можно отнести исследования А.В. Мезенцева, Н.Л. Григоренко, А.Я. Азимова и Ф.В. Гусейнова.

Правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2] применялось для случая интегральных ограничений В.Н. Ушаковым, Б.Н. Пшеничным и Ю.Н. Онопчуком и впоследствии И.С. Раппопортом.

Попытка перенести идеи метода разрешающих функций [3] на случай интегральных ограничений на управления игроков была предпринята в статье А.А. Чикрия и В.В. Безмагорычного [4]. Однако, эта работа скорее повторяла подходы предложенные М.С. Никольским. Исследования в этом же направлении были продолжены в статьях А.А. Белоусова [5], А.А. Чикрия и А.А. Бело усова [6].

Настоящая работа обобщает указанные исследования.

Постановка задачи. Динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^l$, A, B, C – постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ соответственно.

Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям:

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \|v(\tau)\|^2 d\tau \le 1. \tag{2}$$

Эти управления будем называть допустимыми.

Терминальное множество имеет цилиндрический вид $M^* = M^0 + M$, где M^0 – линейное подпространство R^n, а M – выпуклое компактное множество в ортогональном дополнении M^0 в R^n. Обозначим π оператор проектирования из R^n на ортогональное дополнение к M^0 в R^n, т. е. $M = \pi M^*$.

Определение. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $v(t)$ существует допустимое управление преследователя $u(t)$, гарантирующее приведение решения уравнения (1) $z(t)$, соответствующего управлениям $(u(t), v(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M^*$. Считаем, что при построении своего управления $u(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию о реализовавшимся до этого момента управлении противника $v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$.

Введем предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л.С. Понтрягина [1] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Оно фиксирует некое преимущество преследующего игрока над убегающим и обеспечивает возможность решения задачи сближения.

Условие. Существует такое число λ, $0 \le \lambda < 1$, что для всех положительных t выполняется включение:

$$\pi e^{At} CV \subset \lambda \pi e^{At} BU, \tag{3}$$

где $U = \{u \in R^m : \|u\|^2 \le 1\}$ и $V = \{v \in R^l : \|v\|^2 \le 1\}$ – единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это условие на параметры игры выполнено.

Вспомогательные утверждения. Зафиксируем начальную позицию z^0. Введем вспомогательное многозначное отображение

$$\Omega(t,\tau,v)=\left\{\gamma\in \mathrm{R}:\left\{\gamma\left(M-\pi e^{At}z^0\right)+\pi e^{A\tau}Cv\right\}\cap\sqrt{(1-\lambda)\gamma+\lambda\|v\|^2}\cdot\pi e^{A\tau}BU\neq\varnothing\right\},\quad(4)$$

где $(t,\tau,v)\in \mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$, $\mathrm{R}_+=[0,\infty)$. И рассмотрим вспомогательную функцию (так называемую разрешающую функцию [3]):

$$\gamma(t,\tau,v)=\sup\Omega(t,\tau,v).\quad(5)$$

Исследуем свойства вспомогательного отображения и этой функции.

Лемма 1. Имеют место соотношения:

$\gamma(t,\tau,v)\geq 0$ для всех $(t,\tau,v)\in \mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$;

$\gamma(t,\tau,v)=+\infty$ при $\pi e^{At}z^0\in M$ для всех $(\tau,v)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$;

$\gamma(t,\tau,v)<\infty$ при $\pi e^{At}z^0\notin M$ для любых $(\tau,v)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$.

Лемма 2. Интервал $[0,\gamma(t,\tau,v))\subset\Omega(t,\tau,v)$ для всех $(t,\tau,v)\in \mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$.

Доказательство этих лемм вполне аналогичны доказательствам из [6].

Лемма 3. При $\pi e^{At}z^0\notin M$ верхняя грань в определении $\gamma(t,\tau,v)$ (5) достигается и функция $\gamma(t,\tau,v)$ будет измерима по Борелю по совокупности переменных $(t,\tau,v)\in \mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$.

Доказательство. Рассмотрим функцию расстояния между компактами из определения $\Omega(t,\tau,v)$ (4):

$$\delta(\gamma,t,\tau,v)=\min_{u\in U,\,m\in M}\left\|\gamma\left(m-\pi e^{At}z^0\right)+\pi e^{A\tau}Cv-\sqrt{(1-\lambda)\gamma+\lambda\|v\|^2}\,\pi e^{A\tau}Bu\right\|.$$

Данная функция непрерывна на множестве $\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$. Включение $\gamma\in\Omega(t,\tau,v)$ эквивалентно равенству $\delta(\gamma,t,\tau,v)=0$. Следовательно, определение (5) означает, что существует последовательность чисел γ_i таких, что

$$\delta(\gamma_i,t,\tau,v)=0\ \text{ и }\ \gamma_i\xrightarrow[i\to\infty]{}\gamma(t,\tau,v).$$

Отсюда, учитывая конечность $\gamma(t,\tau,v)$ (при $\pi e^{At}z^0\notin M$), вытекает, что $\delta(\gamma(t,\tau,v),t,\tau,v)=0$, т. е. верхняя грань в определении функции (5) достигается.

Рассмотрим множество уровня функции $\gamma(t,\tau,v)$:

$$\Lambda_a=\left\{(t,\tau,v)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l:\quad\gamma(t,\tau,v)<a\right\}.$$

Покажем, что данное множество является открытым, а значит и борелевским, для любого положительного числа a. Это будет означать, что функция $\gamma(t,\tau,v)$ измерима по Борелю [7].

Зафиксируем положительное число a и возьмем произвольную точку $(\bar{t},\bar{\tau},\bar{v})\in\Lambda_a$. Значит $a\notin\Omega(\bar{t},\bar{\tau},\bar{v})$, т. е. для этой точки выполняется неравенство $\delta(a,\bar{t},\bar{\tau},\bar{v})>0$. Непрерывность функции $\delta(\cdot)$ гарантирует существование такой окрестности Δ точки $(\bar{t},\bar{\tau},\bar{v})$, что для всех $(t,\tau,v)\in\Delta$ выполняется неравенство $\delta(a,t,\tau,v)>0$, т. е. $\gamma(t,\tau,v)<a$ для всех $(t,\tau,v)\in\Delta$ (в силу леммы 2). Это означает открытость множества Λ_a, что и завершает доказательство леммы 3.

Основной результат. Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) на терминальное множество M^* из начального положения z^0.

Теорема. Полагаем, что выполнено условие (3) на параметры игры (1), (2). Предположим, что существует момент $T=T(z^0)$ такой, что либо $\pi e^{AT}z^0\in M$, либо $\pi e^{At}z^0\notin M$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\int_0^T\gamma(T,T-\tau,v(\tau))d\tau\geq 1. \tag{6}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Доказательство. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы. Проанализируем сначала случай $\pi e^{At}z^0\notin M$.

Согласно лемме 3 разрешающая функция $\gamma(T,\tau,v)$ является измеримой по Борелю и для всех $(\tau,v)\in \mathsf{R}_+\times\mathsf{R}^l$ выполняется включение:

$$\pi e^{A\tau}Cv\in\bigcup_{u\in U}\sqrt{(1-\lambda)\gamma(T,\tau,v)+\lambda\|v\|^2}\,\pi e^{A\tau}Bu-\gamma(T,\tau,v)\left\{M-\pi e^{AT}z^0\right\}.$$

Функция стоящая в правой части этого включения измеримым по Борелю образом зависит от (τ,v) и непрерывно от $u\in U$.

По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль – Нардзевского [8, 9] следует, что для этого включения существует измеримый по Борелю селектор, т. е. измеримое по Борелю отображение $w(\tau,v)\in U$ такое, что

$$\sqrt{(1-\lambda)\gamma(T,\tau,v)+\lambda\|v\|^2}\,\pi e^{A\tau}Bw(\tau,v)-\pi e^{A\tau}Cv\in\gamma(T,\tau,v)\cdot\left(M-\pi e^{AT}z^0\right) \tag{7}$$

для всех $(\tau,v)\in\mathsf{R}_+\times\mathsf{R}^l$.

Из данной теоремы можно сделать заключение, что существует измеримое по Борелю отображение $\tilde{w}(\tau,v)\in U$ для которого выполняется равенство:

$$\sqrt{\lambda\|v\|^2}\,\pi e^{A\tau}B\tilde{w}(\tau,v)-\pi e^{A\tau}Cv=0$$

при всех $(\tau,v)\in \mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^l$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0,T]$ произвольное измеримое по Лебегу управление $v(\tau)$, которое удовлетворяет интегральному ограничению (2). По предположению теоремы (6) существует момент $T^*=T^*(z^0,v(\cdot))$ такой, что

$$\int_0^{T^*}\gamma(T,T-\tau,v(\tau))d\tau=1. \tag{8}$$

Тогда управление преследователя на интервале $[0,T]$ положим равным

$$u(\tau)=\begin{cases}\sqrt{(1-\lambda)\gamma(T,T-\tau,v(\tau))+\lambda\|v(\tau)\|^2}\cdot w(T-\tau,v(\tau)), & \tau\in[0,\mathrm{T}^*],\\ \sqrt{\lambda\|v(\tau)\|^2}\cdot\tilde{w}(T-\tau,v(\tau)), & \tau\in(\mathrm{T}^*,\mathrm{T}].\end{cases} \tag{9}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является (по существу) контруправлением с одним переключением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [7]. Поэтому построенное таким образом (9) управление $u(\tau)$ – измеримо по Лебегу для произвольного измеримого управления $v(\tau)$.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (1) попадет на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T)=\pi e^{AT}z^0+\int_0^{T^*}\pi e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau+\int_{T^*}^{T}\pi e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau-\int_0^{T}\pi e^{A(T-\tau)}Cv(\tau)d\tau=$$

$$=\pi e^{AT}z^0+\int_0^{T^*}\sqrt{(1-\lambda)\gamma(T,T-\tau,v(\tau))+\lambda\|v(\tau)\|^2}\,\pi e^{A(T-\tau)}Bw(T-\tau,v(\tau))d\tau+$$

$$+\int_{T^*}^{T}\sqrt{\lambda\|v(\tau)\|^2}\,\pi e^{A(T-\tau)}B\tilde{w}(T-\tau,v(\tau))d\tau-\int_0^{T}\pi e^{A(T-\tau)}Cv(\tau)d\tau\in$$

$$\in\pi e^{AT}z^0+\int_0^{T^*}\gamma(T,T-\tau,v(\tau))\left\{M-\pi e^{AT}z^0\right\}d\tau+0\in M.$$

Последнее включение имеет место в силу равенства (8) и выпуклости компакта M. Это включение и доказывает приведение решения на терминальное множество: $z(T) \in M^*$.

Проверим, что построенное таким образом (9) управление $u(\tau)$ удовлетворяет интегральному ограничению (2):

$$\int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau = \int_0^{T^*} [(1-\lambda)\gamma(T, T-\tau, v(\tau)) + \lambda\|v(\tau)\|^2] \cdot \|w(T-\tau, v(\tau))\|^2 d\tau +$$

$$+\int_{T^*}^{T} \lambda\|v(\tau)\|^2 \|\tilde{w}(T-\tau, v(\tau))\|^2 d\tau \le (1-\lambda)\int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))d\tau + \lambda\int_0^T \|v(\tau)\|^2 d\tau \le 1.$$

Аналогично рассматривается случай $\pi e^{AT} z^0 \in M$. В этом случае управление преследователя на интервале $[0, T]$ положим равным

$$u(\tau) = \sqrt{\lambda\|v(\tau)\|^2} \cdot \tilde{w}(T-\tau, v(\tau)). \tag{10}$$

Так же, как ранее можно показать, что и в этом случае управление (10) гарантирует приведение решения (1) на терминальное множество M^* в момент T (для любого допустимого управления $v(\tau)$) и $u(\tau)$ удовлетворяет интегральному ограничению (2).

Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Теорема без затруднения переносится на случай более общих интегральных ограничений на управления:

$$\int_0^\infty u^T(\tau) G u(\tau) d\tau \le \mu^2, \quad \int_0^\infty v^T(\tau) H v(\tau) d\tau \le \eta^2, \tag{11}$$

где G и H – симметричные положительно определенные матрицы размерности $m \times m$ и $l \times l$ соответственно, $u(\tau)$ и $v(\tau)$ – измеримые функции, μ и η – положительные числа, а знак T обозначает транспонирование.

Замена

$$\tilde{u} = \frac{1}{\mu} \cdot G^{\frac{1}{2}} u, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\eta} \cdot H^{\frac{1}{2}} v, \quad \tilde{B} = \mu \cdot B G^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{C} = \eta \cdot C H^{-\frac{1}{2}}$$

переводит дифференциальную игру (1), (11) к первоначальному виду

$$\dot{z} = Az + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{C}\tilde{v}, \quad z \in \mathrm{R}^n, \quad \tilde{u} \in \mathrm{R}^m, \quad \tilde{v} \in \mathrm{R}^l, \quad z(0) = z^0,$$

$$\int_0^\infty \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \|\tilde{v}(\tau)\|^2 d\tau \le 1.$$

В таком виде теорема полностью переносится на указанный общий случай.

О.А. Бєлоусов

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГОР
З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Розглядаються ігрові задачі переслідування для лінійних систем із інтегральними обмеженнями на керування. Запропонована схема використовує ідеї методу розв'язуючих функцій. Формулюється аналог умови Л.С. Понтрягіна, який дозволяє отримати достатні умови вирішення задачі за певний гарантований час.

A.A. Belousov

METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS FOR DIFFERENTIAL GAMES UNDER INTEGRAL CONSTRAINS

Linear systems under integral constraints on controls are discussed in this paper. Suggested scheme employs ideas of the Method of Resolving Functions. Analog of Pontryagin's Condition is formulated. On its basis sufficient conditions of the game termination in a certain guaranteed time are obtained.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
4. *Чикрий А.А., Безмагорычный В.В.* Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. – 1993. – № 4. – С. 26–36.
5. *Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх преследования с интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. – Ин-т математики им. В.А. Стеклова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. – С. 321–322.
6. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 4. – С. 290–301.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
8. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
9. *Kisielewicz **M.*** Differential Inclusions and Optimal Control // Mathematics and Its Applications. – Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – **44**. – 260 p.

Получено 23.04.2010