УДК 519.8

Э.И. НЕНАХОВ

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА

Рассматривается модель обмена с переменными бюджетами. Пред-полагается линейность всех функций предпочтения. Исследова-ние модели основано на ее сведении к конечной системе неравенств. Показано, что данная модель с периодическими точками имеет вектор равновесных цен.

Исследуется модель чистого обмена с линейными функциями полезности потребителей. Необходимые и достаточные условия существования решений этой модели были получены Гейлом Д. [1]. Первый алгоритм для нахождения равновесной цены был построен в [2] путем сведения модели к линейной задаче о дополнительности, которая решалась методом Лемке.

Одни численные методы решения модели основываются на условии валовой заменимости функции избыточного спроса, порождаемой рассматриваемой моделью, другие – на свойстве выявленного предпочтения этой функции. Обычно к условию выявленного предпочтения приводит непрерывность, однородность нулевой степени и валовая заменимость однозначных функций избыточного спроса. Общая теория точечно-множественных отображений избыточного спроса, удовлетворяющих условию выявленного предпочтения, разработана в [3]. В основу алгоритма [4] нахождения конкурентного равновесия исследуемой модели положено нахождение решения квазивариационных неравенств.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из m потребителей, потребляющих n видов продуктов. Поведение i-го потребителя определяется функцией полезности (a_i, x_i), $a_i, x_i \in R_+^n$, и фиксированным запасом продуктов $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{in}) \geq 0$. Рассматриваемые виды продуктов характеризуются положительным вектором цен $p = \,= (\pi_1,...,\pi_n)$.

Векторы x_i^*, $i = \overline{1,m}$, $p^* > 0$ являются решением линейной модели чистого обмена, если выполнены равенства

$$x_i^* = \arg\max\left\{(a_i,\ x_i)\middle| x_i \ge 0,\ \left(p^*, x_i\right) \le \left(p^*, b_i\right)\right\},\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{i=1}^m b_i\ . \tag{1}$$

Как видно из приведенной формулировки, бюджет i-го потребителя не фиксируется заранее, а определяется в процессе обмена одних продуктов на другие.

Пусть матрица $A = \{a_{ij}\}$ составлена из векторов-строк a_i, а матрица $B = \{b_{ij}\}$ – из векторов-строк b_i. Будем считать, что в каждой строке и столбце матриц A и B имеются положительные элементы. Пусть матрицы A и B удовлетворяют условию E: не существует множеств индексов $I \subset \{1,...,m\}$, $J \subset \{1,...,n\}$ таких, что

$$a_{ij} = 0, \forall \left(i \bar{\in} I,\ \ j \in J\right); b_{ij} = 0,\ \ \forall \left(i \in I,\ \ j \bar{\in} J\right);\ \ b_{i_0\, j_0} > 0,\ \ i_0 \bar{\in}\ I,\ \ j_0 \in J\ .$$

Модель (1) имеет решение, если и только если выполняется условие E [1].

Каждое решение конечной системы неравенств и равенств

$$\left(a_i, x_i\right) \ge a_{i\,j}\left(p, b_i\right)/\pi_j, \pi_j > 0,$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m b_i, x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

является также решением модели (1) [5]. Так как $p > 0$, то можно положить $\pi_j = \exp\left(z_j\right)$. Тогда система (2) может быть переписана в следующем эквивалентном виде:

$$-\left(a_i, x_i\right) + a_{i\,j}\sum_{k=1}^n b_{i\,k}\exp\left(z_k - z_j\right) \le 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m b_i,\ \ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Левые части неравенств (3) являются выпуклыми функциями. Поэтому для отыскания решения линейной модели чистого обмена можно воспользоваться методами выпуклого программирования.

Эквивалентность модели обмена системе (2) полезна также для установления некоторых свойств равновесных состояний.

Лемма. Если x_i^*, $i=\overline{1,m}$, p^* – решение системы (2), то из неравенства

$$\left(a_i,\ x_i^*\right) > a_{i\,j}\left(p^*,\ b_i\right)/\pi_j^* \tag{4}$$

следует $\xi_{i\,j}^* = 0$.

Доказательство. Так как $x_i^* \geq 0$, $p^* > 0$ – решение системы (2), то p^* – равновесная цена, а x_i^* – равновесные ассортиментные наборы потребителей. Поэтому $\left(p^*, x_i^*\right) = \left(p^*, b_i\right)$. Если предположить, что для некоторого j_0 выполнено (4) и $\xi_{i\,j_0}^* > 0$, то приходим к противоречивому неравенству $\left(p^*,\ x_i^*\right) > \left(p^*,\ b_i\right)$. Полученное противоречие означает справедливость утверждения леммы.

Покажем, как можно применить эту лемму в доказательстве следующего результата.

Теорема 1 [1]. Если x_i^*, $i=\overline{1,m}$, p^* и $\bar{x}_i$, $i=\overline{1,m}$, $\bar{p}$ – два решения линейной модели чистого обмена, то $\left(a_i, x_i^*\right) = \left(a_i, \bar{x}_i\right)$, $i=\overline{1,m}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого индекса i_0 $\left(a_{i_0}, x_{i_0}^*\right) > \left(a_{i_0}, \bar{x}_{i_0}\right)$. Так как $x_{i_0}^* \geq 0$, то существует индекс j_0 такой, что $\xi_{i_0\,j_0}^* > 0$. По лемме из соотношений (3) следует

$$\left(a_{i_0} x_{i_0}^*\right) = a_{i_0\,j_0}\left(p^*, b_{i_0}\right)/\pi_{j_0}^* = a_{i_0\,j_0}\sum_{k=1}^{n} b_{i_0\,k}\exp\ \left(z_k^* - z_{j_0}^*\right).$$

Можно считать, что векторы p^* и $\bar{p}$ нормированы так, что $\sum\limits_{k=1}^{n} b_{i_0 k}\exp\left(z_k^*\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{i_0 k}\exp\left(\bar{z}_k\right) = 1$. Тогда из соотношений

$$a_{i_0 j_0}/\pi_{j_0}^* = a_{i_0 j_0}\left(p^*, b_{i_0}\right)/\pi_{j_0}^* = \left(a_{i_0}, x_{i_0}^*\right) > \left(a_{i_0}, \bar{x}_{i_0}\right) \geq a_{i_0 j_0}\left(\bar{p}, b_{i_0}\right)/\bar{\pi}_{j_0} = a_{i_0 j_0}/\bar{\pi}_{j_0}$$

следует, что $\pi_{j_0}^* < \bar{\pi}_{j_0}$.

Так как соотношения (3) определяют выпуклое множество, то векторы $\left(x_i^* + \bar{x}_i\right)/2$, $i=\overline{1,m}$, $\left\{\exp\left(\left(z_j^* + \bar{z}_j\right)/2\right)\right\}$, $j=\overline{1,n}$, также являются решением линейной модели чистого обмена. Покажем, что для этого решения при $i=i_0$, $j=j_0$, неравенство в (3) выполняется как строгое. В силу строгой выпуклости функции $\exp(-\tau)$ и выполнения строгого неравенства $\sum_{k=1}^{n} b_{i_0 k} \exp\left(\left(z_k^* + \bar{z}_k\right)/2\right) < 1$ имеем

$$-\left(a_{i_0}, x_{i_0}^* + \bar{x}_{i_0}\right)/2 + a_{i_0 j_0} \exp\left(-\left(z_{j_0}^* + \bar{z}_{j_0}\right)/2\right) \sum_{k=1}^{n} b_{i_0 k} \exp\left(\left(z_k^* + \bar{z}_k\right)/2\right) <$$

$$< -\left(a_{i_0}, x_{i_0}^*\right)/2 + \frac{1}{2} a_{i_0 j_0} \exp\left(-z_{j_0}^*\right) - \left(a_{i_0}, \bar{x}_{i_0}\right)/2 + \frac{1}{2} a_{i_0 j_0} \exp\left(-\bar{z}_{j_0}\right) \le 0 .$$

Из этих неравенств следует, что

$$\left(a_{i_0}, \tilde{x}_{i_0}\right) = \left(a_{i_0}, x_{i_0}^* + \bar{x}_{i_0}\right)/2 > a_{i_0 j_0} \sum_{k=1}^{n} b_{i_0 k} \exp\left(\left(z_k^* + \bar{z}_k\right)/2\right) / \exp\left(\left(z_{j_0}^* + \bar{z}_{j_0}\right)/2\right) =$$

$$= a_{i_0 j_0} \left(\tilde{p},\ b_{i_0}\right) / \tilde{\pi}_{j_0},$$

где вектор $\tilde{p} = \left\{\exp\left(\left(z_j^* + \bar{z}_j\right)/2\right)\right\},\ j = \overline{1, n}$.

Следовательно, применяя лемму получаем $\left(\xi_{i_0 j_0}^* + \bar{\xi}_{i_0 j_0}\right)/2 = 0,$ что противоречит $\xi_{i_0 j_0}^* > 0.$ Полученное противоречие доказывает теорему.

Далее, определим общий запас продуктов $d = \sum_{i=1}^{m} b_i$ и множество векторов цен $P = \{p > 0 : (d, p) = 1\}$. Пусть для данного $p \in P$ $q(p) > 0$ – соответствующий равновесный вектор цен в новой модели обмена с исходными линейными функциями полезности потребителей, фиксированными бюджетами каждого потребителя $\beta_i = (p, b_i) > 0$ и общим запасом всех видов продуктов $d > 0$. Такой вектор $q(p)$ всегда существует и единственный.

В линейном случае отыскание равновесных ассортиментных наборов и вектора равновесных цен сводится к решению специальной задачи выпуклого программирования, заключающейся в минимизации строго выпуклой функции при линейных ограничениях. Последнее, в частности, наиболее ясно объясняет причину единственности вектора равновесных цен $q(p)$ для линейной модели обмена с фиксированными бюджетами.

Не сложно показать, что из определения $q(p)$ следует, что $q(p) \in P$. Итак, определено однозначное отображение $q : P \to P$. Нахождение состояния равновесия для линейной модели чистого обмена эквивалентно нахождению неподвижной точки отображения $q : \bar{p} = q(\bar{p})$.

Будем считать, что отображение q имеет периодическую точку $\overline{p}$ периода k, если после k последовательных применений этого отображения получим исходную точку: $\overline{p} = q^k\left(\overline{p}\right)$.

Теорема 2. Пусть цена $p_1 > 0$ – периодическая точка периода k, $p_s = q\left(p_{s-1}\right)$, $s = 2,\ldots, k$, $p_1 = q\left(p_k\right)$, $p_s = \left(\pi_1^s, \ \ldots \ , \ \pi_n^s\right)$. Тогда числа

$$\pi_j^* = \left(\prod_{s=1}^{k} \pi_j^s\right)^{1/k}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

являются компонентами вектора равновесных цен для линейной модели чистого обмена.

Доказательство. В модели (1) каждый потребитель имеет положительный бюджет $\beta_i = \left(p, b_i\right)$, который входит как сомножитель в первое неравенство системы (2). Из условий теоремы следует, что в каждой новой модели на очередном шаге потребитель имеет фиксированный бюджет $\beta_i = \left(p_s, b_i\right)$, $s = \overline{1,k}$. Тогда, согласно определению вектора $q\left(p\right)$, выполняются неравенства:

$$\left(a_i, \ x_i^1\right) \ge a_{i\,j}\left(p_1, \ b_i\right)/\pi_j^2,$$
$$\left(a_i, \ x_i^2\right) \ge a_{i\,j}\left(p_2, \ b_i\right)/\pi_j^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(a_i, x_i^{k-1}\right) \ge a_{i\,j}\left(p_{k-1}, b_i\right)/\pi_j^k,$$
$$\left(a_i, x_i^k\right) \ge a_{i\,j}\left(p_k, b_i\right)/\pi_j^1,$$

для $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, где $x_i^s \ge 0$, $p_{s+1} > 0$, $s = \overline{1,k-1}$, являются решениями моделей обмена с бюджетами $\beta_i = \left(p_s, b_i\right)$, а $x_i^k \ge 0$, $p_1 > 0$ – решение модели обмена с бюджетами $\beta_i = \left(p_k, b_i\right)$.

Пусть $\pi_j^s = \exp\left(\psi_j^s\right)$, тогда предыдущая система неравенств может быть переписана в следующей форме:

$$\left(a_i, x_i^1\right) \ge a_{i\,j} \sum_{v=1}^{n} b_{iv} \exp\left(\psi_v^1 - \psi_j^2\right),$$
$$\left(a_i, x_i^2\right) \ge a_{i\,j} \sum_{v=1}^{n} b_{iv} \exp\left(\psi_v^2 - \psi_j^3\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(a_i, x_i^{k-1}\right) \ge a_{i\,j} \sum_{v=1}^{n} b_{iv} \exp\left(\psi_v^{k-1} - \psi_j^k\right),$$

$$\left(a_i, x_i^1\right) \geq a_{i\,j} \sum_{v=1}^{n} b_{iv} \exp\left(\psi_v^1 - \psi_j^2\right),$$

для $i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

Заметим, что $\sum_{i=1}^{m} x_i^s = d$, $s = \overline{1, k}$. Для данных i и j, умножая каждое неравенство в предыдущей системе на $1/k$ и складывая результаты, получаем

$$\left(a_i, \left(\sum_{s=1}^{k} x_i^s\right)/k\right) \geq a_{i\,j}\left[\frac{1}{k}\sum_{v=1}^{n} b_{iv} \exp\left(\psi_v^1 - \psi_j^2\right) + \ \dots\ + \frac{1}{k}\sum_{v=1}^{n} b_{iv} \exp\left(\psi_v^k - \psi_j^1\right)\right].$$

В силу выпуклости экспоненциальной функции выполняется

$$\frac{1}{k}\ \exp\left(\psi_v^1 - \psi_j^2\right) + \frac{1}{k}\ \exp\left(\psi_v^2 - \psi_j^3\right) + \dots + \frac{1}{k}\exp\left(\psi_v^k - \psi_j^1\right) \geq$$

$$\geq \exp\left(\frac{1}{k}\left(\psi_v^1 - \psi_j^2 + \psi_v^2 - \psi_j^3 + \dots + \psi_v^k - \psi_j^1\right)\right).$$

Объединяя последние два неравенства, получаем

$$\left(a_i, \left(\sum_{s=1}^{k} x_i^s\right)/k\right) \geq a_{i\,j} \sum_{v=1}^{n} b_{i\,v} \exp\left(\frac{1}{k}\left(\psi_v^1 - \psi_j^2 + \psi_v^2 - \psi_j^3 + \dots + \psi_v^k - \psi_j^1\right)\right),$$

$i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

Если обозначить $\psi_v^0 = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} \psi_v^s$, $v = \overline{1,\ n}$, $x_i^0 = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} x_i^s$, $i = \overline{1,\ m}$, то предыдущее неравенство перепишем так:

$$\left(a_i, x_i^0\right) \geq a_{i\,j} \sum_{v=1}^{n} b_{i\,v} \exp\left(\psi_v^0\right)/\exp\left(\psi_j^0\right), \quad i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}.$$

Если определить $\exp\left(\psi_v^0\right) = \pi_v^0$, $p_0 = \left(\pi_1^0, \dots, \pi_n^0\right)$, то получим для любых i и j $\left(a_i, x_i^0\right) \geq a_{i\,j}\left(p_0,\ b_i\right)/\pi_j^0$. Так как $\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = d$, то векторы $x_i^0, i = \overline{1, m}$, $p_0 > 0$ удовлетворяют системе (2) и, следовательно, являются решением исходной модели. Поскольку $\psi_v^0 = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} \ln \pi_v^s$, то компоненты равновесной цены линейной модели чистого обмена вычисляются так:

$$\pi_v^0 = \exp\left(\psi_v^0\right) = \exp\left(\ln\left(\prod_{s=1}^{k}\pi_v^s\right)^{1/k}\right) = \left(\prod_{s=1}^{k}\pi_v^s\right)^{1/k}, \ v = \overline{1,n}.$$

Таким образом, верна формула (5) и теорема доказана.

Следствие. Если не существует равновесный вектор цен модели (1), то не существуют периодические точки любого периода k.

Е. І. Ненахов

ПРО ОДНУ ЛІНІЙНУ МОДЕЛЬ ОБМІНУ

Розглядається модель обміну зі змінними бюджетами. Припускається лінійність всіх функцій переваги. Дослідження моделі засновано на її зведенні до скінченної системи нерівностей. Доведено, що дана модель з періодичними точками має вектор рівноважних цін.

E.I. Nenakhov

ON LINE LINEAR EXCHANGE MODEL

An exchange model with variable budgets is considered. The linear utilities functions of the traders is proposed. Investigation of the model is based on it's reducing to finite system of inequalities. Given model, that has periodic points, has a vector of equilibrium prices.

1. *Gale D.* The linear exchange model // J. of Mathematical Economics. – 1976. – 3, N 2. – P. 205 – 209.
2. *Eaves B.* A finite algorithm for the linear exchange model // Ibid. – P. 197 – 203.
3. *Polterovich V.M., Spivak V.A.* Gross substitutability of point-to-set correspondences // Ibid. – 1983. – 11, N 2. – P. 117 – 140.
4. *Donato M.B., Milasi M., Vitanza C.* An existence result of quasi-variational inequality associated to an equilibrium problem // J. Global Optimization. – 2008. – 40, N 1. – P. 87 – 97.
5. *Ненахов Э.И. Примак М.Е.* Об одном алгоритме отыскания решений модели Эрроу – Дебре // Кибернетика. – 1983. – № 3. – С. 127 – 128.

Получено 16.03.2009