УДК 519.8

С.І. СІРЕНКО

ПРО ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ОМК-Н

Розглядається гібридний метаевристичний метод комбінаторної оптмізації ОМК-Н та досліджується його збіжність. Введені обмеження на алгоритми методу, які формують клас алгоритмів, збіжних за значенням до оптимального розв'язку задачі.

Вступ. Для переважаючої більшості метаевристичних методів теоретичному дослідженню передує експериментальна апробація: тільки після того, як експериментальне дослідження покаже доцільність практичного застосування методу, дослідники намагаються поглибити своє розуміння функціонування метаевристики не тільки проводячи складніші обчислювальні експерименти, але й теоретичне дослідження. Це, зокрема, обумовлено складністю отримання практично-застосовних результатів при теоретичному дослідженні метаевристичних методів.

Одним із найважливіших питань теоретичного дослідження стохастичних алгоритмів є збіжність до оптимального розв'язку. Іншими теоретичними аспектами метаевристик, які досліджуються, є швидкість збіжності, принципи налаштування параметрів алгоритмів, взаємозв'язки з іншими підходами тощо.

Дана робота розглядає гібридний метаевристичний метод комбінаторної оптимізації ОМК-Н [1], який вже показав свою ефективність при експериментальному дослідженні. Показано збіжність за значенням одного класу алгоритмів цього методу.

Перший розділ описує загальну схему методу ОМК-Н. У наступному розділі формально описано задачі комбінаторної оптимізації, що розглядаються, викладено та обговорено один клас алгоритмів методу ОМК-Н і показано збіжність за значенням алгоритмів, які належать до цього класу.

Підсумки та можливі напрямки розвитку дослідження наведені у висновках.

1. Метод ОМК-Н. Це гібридний метаевристичний метод комбінаторної оптимізації (КО), який базується на використанні ідей двох популяційних підходів [1] – оптимізації мурашиними колоніями (ОМК) [2] та *Н*-методу [3].

Схема методу, показана на рис. 1 [1], розроблена для статичних задач комбінаторної оптимізації. *f* позначено цільову функцію задачі.

Опишемо ключові етапи алгоритму методу ОМК-Н.

На початку роботи метаевристики ОМК-Н здійснюється ініціалізація алгоритму ОМК, зокрема, феромонних значень *T* [2]. Останні слугують розподіленою чисельною інформацією, що разом з евристичною інформацією про задачу, використовуються агентами („мурахами”) для недетермінованого конструювання розв’язків задачі та які мурахи адаптивно змінюють для відображення досвіду, накопиченого в процесі пошуку розв’язку.

```
procedure ОМК-Н(x)
    ІніціалізаціяФеромоннихЗначень(T);
    x := ДеякийРозв’язок();
    repeat
        P := Ø;
        for i:=1 to r do
            s := ПобудоваРозв’язкуМурахою(T);
            if ДопустимийРозв’язок(z) then
                ТраєкторныйМетод (z);
                if f (x) > f (z) then
                    x := z;
                end if
                P := P ∪ z ;
            end if
        end for;
        ОновленняФеромоннихЗначень(T, P, x);     {необов’язково}
        H(P, x);
        ОновленняФеромоннихЗначень(T, P, x);
        ДіїДемона();                             {необов’язково}
    until не виконується умова завершення;
    return x;
end procedure
```

РИС. 1. Метаевристика методу ОМК-Н

Ітерація алгоритму ОМК-Н розпочинається з побудови *r* мурахами розв’язків із подальшим застосуванням до них траєкторного методу (наприклад, локального пошуку). На основі отриманої множини варіантів розв’язків *P* оновлюються феромонні значення (необов’язково). Оновлення феромонних значень включає як збільшення – додавання мурахами феромону відповідно до побудованих ними розв'язків, так і зменшення – випаровування феромону, процес за допомогою якого інтенсивність феромонного сліду автоматично зменшується з часом. Випаровування здійснює корисну форму "забування", сприяючи дослідженню нових областей у просторі пошуку і запобігаючи дуже швидкій збіжності алгоритму до субоптимальної області.

Потім отримана множина варіантів розв'язків як початкова популяція, передається в модифікацію алгоритму *H*-методу (рис. 2 [1]) разом із найкращим знайденим розв'язком *x*. Від стандартного *H*-методу [3] ця модифікація відрізняється відсутністю ініціалізації початкової популяції, явно зазначеним збереженням найкращого знайденого розв'язку та тим, що алгоритм повертає множину варіантів розв'язків з останньої ітерації. Викладемо коротко загальну схему алгоритму *H*-методу.

Ключовий етап *H*-методу – розв'язання підзадач, визначення яких вимагає введення поняття *d*-відрізку [3], що з'єднує дві точки $x, y \in X$, якщо $X = (X, d)$ – метричний простір з метрикою d. Використання *d*-відрізків дозволяє здійснювати глобальне сканування простору розв'язків, причому ця процедура узгоджена зі структурою простору, на відміну від операторів збурення [4], схрещення або мутації [5], які використовуються у ряді алгоритмів для уникнення концентрації пошуку в обмеженій підобласті простору пошуку.

```
procedure H (P, x);
begin
    repeat
        P` := Ø;
        for i:= 1 to t do
            ВідбірДляВаріації (x,y∈ P);
            ПобудоваНапівінтервалу < x,x∞/ : y∈< x, x∞ /;
            z := arg min {f (u) : u ∈ < x,x∞/, u ∉ Lx (x), u ∉ Ly (y)};
            ТраєкторнийМетод (z);
            P` := P` ∪ z;
            if f (x) > f (z) then
                x := z;
            end if
        end for;
        P := Відбір (P,P`);
    until не виконується умова завершення;
    return P, x;
end
```

РИС. 2. Модифікована метаевристика *H*-методу

Назвемо d-відрізком $/x,y/$, $x,y \in X$, впорядковану сукупність точок $x_i \in X, i=1,...,k$, що задовольняють умовам: $x_1 = x, x_k = y$, $d(x,x_i)+d(x_i,y)= = d(x,y)$, $i=1,...,k$, $d(x,x_i) < d(x,x_{i+1})$, $i=1,...,k-1$; при цьому не існує точки $z \in X$ такої, що $\exists i \in \{1,...,k-1\}: z \notin \{x_i, x_{i+1}\}$, $d(x_i,z)+d(z,x_{i+1}) = d(x_i,x_{i+1})$.

Назвемо d-інтервалом $<x,y>$ – сукупність $/x,y/$ без точок x,y та d-напівінтервалом $<x,y/$ – сукупність $/x,y/$ без точки x.

На ітерації *Н*-методу здійснюється породження множини варіантів розв'язків. Процедура *ВідбірДляВаріації* деяким чином відбирає пари x,y варіантів розв'язків, на основі яких будується і розв'язується підзадача вигляду

$$\arg\min \{ f(u) : u \in <x,x^{\infty}/,\ y \in <x,x^{\infty}/, u \notin L_x(x), u \notin L_y(y)\},$$

де x^{∞} – точка, максимально віддалена в просторі варіантів розв'язків від точки x, а $L_x(x), L_y(y)$ – деякі околи точок x,y. Точки цих околів не розглядаються при розв'язанні підзадачі, що виключає породження занадто близьких до x,y варіантів розв'язків. До всіх знайдених таким чином субоптимальних розв'язків застосовується траєкторний метод (наприклад, локальний пошук). Породжена множина варіантів розв'язків P` оновлює поточну популяцію P за допомогою процедури *Відбір*.

На основі повернутих *Н*-методом варіантів розв'язків здійснюється оновлення феромонних значень. На завершення ітерації алгортиму виконуються дії демона алгоритму ОМК [2] (необов'язково). Дії демона можуть використовуватися для здійснення централізованих процедур, які не можуть бути виконані окремими мурахами. Наприклад, збір глобальної інформації, що може бути використана для ухвалення рішення: буде або не буде корисним відкладання додаткового феромону для відхилення процесу пошуку від локальної перспективи.

Описані дії, починаючи з етапу побудови розв'язків мурахами, повторюються до виконнаня умов зупину. Алгоритм повертає найкращий знайдений розв'язок.

Вибір підпроцедур, таких як *Відбір* або *ДіїДемона*, у алгоритмі ОМК-Н є звичайним для базових методів. Більш детально особливості алгоритмів методу ОМК описано в [2, 6], а алгоритмів *Н*-методу – в [3].

2. Збіжність алгоритмів методу ОМК-Н. Опишемо формально з використанням поняття комбінаторного об'єкта запропонованого в [7], постановку задач КО, які надалі розглядатимуться.

Розглянемо задачу знаходження $x_* \in X$ такого, що:

$$x_* \in \operatorname{Arg}\min_{x \in D \subseteq X} f(x),$$

де X – скінченний простір варіантів розв'язків задачі, елементами якого є комбінаторні об'єкти, $D \subseteq X$ – підпростір допустимих розв'язків задачі, що визначається обмеженнями задачі, які задані предикатом Π, $f: X \to \mathbb{R}^1$ – цільова функція задачі.

Під комбінаторним об'єктом будемо розуміти гомоморфізм $\varphi: Y \to \tilde{X}$, який задовольняє системі обмежень, що задана деяким предикатом Ω, де $Y = \{1,...,m\}, m \in \mathbb{N}$, а $\tilde{X} = \{z_1,...,z_n\}, n \in \mathbb{N}$ – деяка скінченна множина з заданим строгим лінійним порядком, яку називатимемо базовою.

При цьому, мурахи в алгоритмі ОМК здійснюють пошук у розширеному відносно X просторі задачі S, який формально опишемо так:

$$S = \bigcup_{i=1,...,m} X_i,$$

$$X_i = \{\varphi^i : Y_i \to \tilde{X}, Y_i = \{1,...,i\}\}, i = 1,...,m-1, X_m = X,$$

де φ^i – комбінаторний об'єкт, який задовольняє деякій системі обмежень, що задана предикатом Ω^i, і мають місце такі умови:

1) $\Omega^{i-1} \to \Omega^i$, $i = 2,...,m$;
2) $\Omega^m \equiv \Omega$.

Вважатимемо, що на просторі S визначено систему околів $N: S \to 2^{|S|}$:

$$N(s) = \begin{cases} \left\{ \varphi^i \in X_i : \varphi^i \big|_{Y_{i-1}} = \varphi^{i-1} \right\}, & \text{якщо } s = \varphi^{i-1} \in X_{i-1}, i = 2,...,m-1; \\ X, & \text{якщо } s \in X_{m-1}. \end{cases}$$

Для задач КО у такому поданні дослідимо питання збіжності алгоритмів ОМК-Н. Одним практично важливим типом збіжності стохастичних алгоритмів є збіжність за значенням, яка означає, що алгоритм гарантовано знайде принаймні один оптимальний розв'язок з імовірністю, яка може бути зроблена як завгодно близькою до 1, за умови достатнього часу. В роботі [2], зокрема, доведено таку теорему про збіжність за розв'язком для алгоритмів ОМК класу $\mathrm{ACO}_{\mathrm{bs},\tau_{\min}}$.

Теорема 1. Нехай $p^*(\theta)$ – імовірність того, що алгоритм знайде оптимальний розв'язок принаймні один раз протягом перших θ ітерацій. Тоді для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ та достатньо великого θ має місце $p^*(\theta) \ge 1 - \varepsilon$ і, асимптотично, $\lim_{\theta \to \infty} p^*(\theta) = 1$.

Покажемо, що гібридизація алгоритмів ОМК цього класу з модифікованим *H*-методом у методі ОМК-Н, утворює алгоритми, які також збіжні за значенням.

Не обмежуючи загальності вважатимемо, що феромонні значення T в базовому алгоритмі ОМК це матриця, кожен елемент якої асоційований із парою елементів базового простору $\tilde{X}$: $T = (\tau_{z_i z_j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ (для інших випадків опис класу алгоритмів та доведення збіжності здійснюється в аналогічний спосіб). Надалі, величину $\tau_{x_i(i),\, x_j(j)}, x_i \in X_i, x_j \in X_j$, коли це не викликатиме двозначності, позначатимемо $\tau_{x_i x_j}$. Також вважатимемо, для кожної пари z_i, z_j елементів базового простору $\tilde{X}$ визначено значення $\eta_{z_i z_j}$, яке відображає евристичну інформацію про задачу, причому $\eta_{z_i z_j} \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$, $0 < \eta_{\min} \le \eta_{\max} < +\infty$. Аналогічно попередньому, коли це не викликатиме двозначності писатимемо $\eta_{x_i x_j}$ замість $\eta_{x_i(i),\, x_j(j)}$, $x_i \in X_i, x_j \in X_j$.

Розглянемо клас $\text{ОМК-Н}_{\tau_{\min}}$ алгоритмів методу ОМК-Н, який володіє такими властивостями:

1) всі феромонні значення обмежені знизу додатною величиною $\tau_{\min} > 0$;

2) наявне випаровування феромону з показником $0 < \rho \le 1$;

3) побудова розв'язків мурахами здійснюється за таким правилом: від часткового розв'язку $x_i \in X_i, i = 1,\dots,m-1$, вони переходять до часткового (або повного, якщо $i = m-1$) розв'язку $x_{i+1} \in X_{i+1}$ із такою ймовірностю:

$$P_\tau(x_{i+1} \mid x_i) = \begin{cases} \dfrac{F(\tau_{x_i x_{i+1}}, \eta_{x_i x_{i+1}})}{\sum_{x_j \in N(x_i)} F(\tau_{x_i x_j}, \eta_{x_i x_j})}, & \text{якщо } x_{i+1} \in N(x_i); \\ 0, & \text{інакше}; \end{cases} \tag{1}$$

де $F(\cdot,\cdot)$ – деяка неспадна та монотонна за першою змінною функція;

4) обсяг феромону, який довільна мураха може додати протягом ітерації, обмежений деякою величиною $0 < \hat{\tau} < +\infty$.

Зазначимо, що умови 2) – 4) властиві більшості алгоритмів ОМК, які можуть виступати базовими при розробці алгоритму ОМК-Н. У роботі [2] показано, що умова 1) має місце для таких практично важливих алгоритмів ОМК як MMAS [2, 8] та ACS [2, 9]. Отже, обмеження класу $\text{ОМК-Н}_{\tau_{\min}}$ дозволяють використовувати більшість алгоритмів ОМК як базові. Обмеження на *H*-метод, як базовий, у класі $\text{ОМК-Н}_{\tau_{\min}}$ відсутні.

Доведемо, аналогічно теоремі 1 [2], що алгоритми цього класу є збіжними за значенням.

Теорема 2. Нехай $p^*(\theta)$ – імовірність того, що алгоритм класу $\text{ОМК-Н}_{\tau_{\min}}$ знайде оптимальний розв'язок принаймні один раз протягом перших θ ітерацій. Тоді має місце $\lim\limits_{\theta\to\infty} p^*(\theta)=1$.

Доведення. Максимально можливий обсяг феромону який може бути доданий мурахами до довільного значення $\tau_{z_i z_j}$ протягом довільної ітерації складає $r\hat{\tau}$. Зрозуміло, що максимально можливе значення феромону на ітерації 1 складає $(1-\rho)\tau_0 + r\hat{\tau}$, на ітерації 2 – $(1-\rho)^2\tau_0 + (1-\rho)r\hat{\tau} + r\hat{\tau}$ і так далі. Отже, через випаровування феромону, феромонні значення на ітерації θ обмежені згори величиною

$$\tau^{\max}(\theta) = (1-\rho)^{\theta}\tau_0 + \sum_{i=1}^{\theta}(1-\rho)^{\theta-1} r\hat{\tau}.$$

Так як $0<\rho\le 1$, то ця сума збігається асимптотично до $\tau_{\max} = r\hat{\tau}/\rho$. Звідси, феромонні значення на довільній ітерації обмежені величинами $\tau_{\min}$ і $\tau_{\max}$.

Оскільки функція $F(\cdot,\cdot)$ монотонна за першим аргументом, то для $\forall z_i, z_j \in \tilde{X}$ має місце таке співвідношення:

$$F_{\min} \le F(\tau_{z_i z_j}, \eta_{z_i z_j}) \le F_{\max},$$

де $F_{\min} = \min\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} F(\tau_{\min}, \eta_{z_i z_j})$, $F_{\max} = \max\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} F(\tau_{\max}, \eta_{z_i z_j})$.

Завдяки цьому можемо гарантувати, що кожен допустимий вибір за правилом (1) здійснюється з імовірністю $p_{\min} > 0$.

Тривіальна нижня межа для $p_{\min}$ складає

$$p_{\min} \ge \hat{p}_{\min} = \frac{F_{\min}}{(n-1)F_{\max} + F_{\min}}.$$

Отже довільний розв'язок, зокрема оптимальний, може бути згенерований з імовірністю $\hat{p} \ge \hat{p}_{\min}{}^{r} > 0$. Оскільки достатньо, щоб лише одна мураха згенерувала оптимальний розв'язок, то нижня межа $\hat{p}^*(\theta)$ для $p^*(\theta)$ складає:

$$\hat{p}^*(\theta) = 1 - (1 - \hat{p})^{\theta}.$$

Звідси, маємо $\lim\limits_{\theta \to \infty} p^*(\theta) = 1$.

Теорему доведено.

Висновки. Теоретичне дослідження наближених алгоритмів комбінаторної оптимізації, зокрема, метаевристичних, – складний та важливий напрямок розвитку галузі.

Дана робота розглядає один клас стохастичних алгоритмів $\text{ОМК-Н}_{\tau_{\min}}$. Показано, що алгоритми цього класу збіжні за значенням до оптимального розв'язку задачі.

Отримані результати не надають інформації про швидкість збіжності алгоритмів методу ОМК-Н. Отримання оцінок швидкості збіжності є важливим напрямком продовження теоретичного дослідження. Іншим напрямком можливого розвитку дослідження є експериментальне порівняння алгоритмів ОМК-Н, які належать класу $\text{ОМК-Н}_{\tau_{\min}}$ із алгоритмами, які цьому класу не належать.

С.И. Сиренко

О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ МЕТОДА ОМК-Н

Рассматривается гибридный метаэвристический метод комбинаторной оптимизации ОМК-Н и исследуется его сходимость. Выведены ограничения на алгоритмы метода, которые описывают класс алгоритмов, сходящихся по значению к оптимальному решению задачи.

S.I. Sirenko

ON THEORETICAL STUDY OF AN ACO-H METHOD

Paper considers a hybrid metaheuristic method of combinatorial optimization ОМК-Н and studies its convergence. A class of method's algorithms is formally described. A convergence in value to an optimal solution for the algorithms from this class is shown.

1. *Гуляницький Л.*, *Сиренко С.* Комбинирование алгоритмов оптимизации муравьиными колониями и *H*-метода // International book series „Information Science & Computing": Decision Making and Business Intelligence Strategies and Techniques. – 2008. – N 3. – P. 95–102.
2. *Dorigo M.*, *Stützle T.* Ant Colony Optimization. – Cambridge: MIT Press, MA, 2004. – 348 p.

3. *Гуляницкий Л.Ф.*, *Сергиенко И.В.* Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 70–79.
4. *Lourenço H.R.*, *Martin O.*, *Stützle T.* Iterated local search // Handbook of Metaheuristics: International Series in Operations Research & Management Science, vol. 57 (Eds. Glover F. and Kochenberger G.). – Norwell: Kluwer Academic Publishers, MA, 2002. – P. 321–353.
5. *Leguizamon G., Blum C., Alba E.* Evolutionary computation // Handbook of approximation algorithms and metaheuristics (Ed. *Gonzalez T.F.*). – CRC press, 2007. – P. 372–386.
6. *Dorigo M., Blum C.* Ant colony optimization theory: A survey // Theoretical computer science. – 2005. – N 344. – P. 243–278.
7. *Гуляницкий Л.Ф.* До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – N 7. – С. 45–49.
8. *Stützle T., Hoos H.* Max – Min Ant System // Future Generation Computer Systems. – 2000. – N 8. – P. 889–914.
9. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem // IEEE Trans. Evol. Comput. – 1997. – N 1(1). – P. 53–66.

Отримано 07.03.2009