УДК 519.1

О.В. МИРОНЕНКО

ІСНУВАННЯ *T*-ФАКТОРИЗАЦІЇ НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ СИМЕТРИЧНИХ ДЕРЕВ

Досліджується питання про існування T-факторизації повно-го графа K_n непарного порядку $n = 2k+1$. За допомо-гою пів-обертового методу підтверджується гіпотеза «Кожне си-метричне дерево допускає T-факторизацію» для дерева по-рядку n=13, n=17. За результа-тами досліджень складено таблицю.

T-факторизація повного графа порядку n – це таке розбиття множини ребер повного графа K_n на k підмножин (факторів), кожна з яких породжує дерево (компоненту T-факторизації), ізоморфне даному дереву T порядку n.

Задача Л. Байнеке [1] полягає у тому, щоб з'ясувати, для яких дерев існують T-факторизації. Він же знайшов необхідні умови існування T-факторизації:

1) n – парне натуральне число, $n = 2k$;

2) $\Delta(T) \le k$, де $\Delta(T)$ – найбільший із степенів вершин дерева T.

Дерево називають допустимим, якщо воно задовольняє умовам Байнеке. Для багатьох допустимих дерев доведено існування T-факторизацій, для багатьох інших – що T-факторизації не існують [2 – 4]. Повного розв'язання задачі Байнеке на даний час не існує.

Постає питання про існування деревної факторизації непарного порядку. Для графа K_n, де $n = 2k+1$ така факторизація не існує. Розглянемо граф $K_{2k+1} - F$, де F – майже 1-фактор (рис. 1).

Гіпотеза. Кожне симетричне дерево непарного порядку допускає деревну факторизацію.

Одним з методів побудови реалізуючих T-факторизацій є півобертовий метод. За цим методом автором було отримано півобертові реалізуючі факторизації для півсиметричних дерев парного порядку 10 [5].

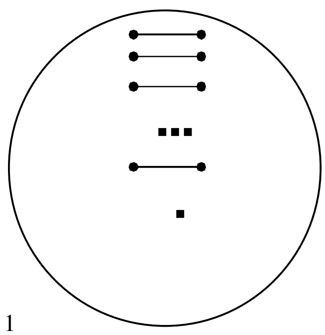

РИС. 1

Введемо наступні поняття [2].

Дерево порядку n=2k+1 називається симетричним, якщо:

1) воно містить центральну вершину;

2) після вилучення цієї вершини воно розпадається на два ізоморфні кореневі дерева, коренями яких є кінці ребер, що сполучаються у центральній вершині.

Симетричне дерево T порядку n=2k+1 називається правильно вписаним у коло, розділене n=2k точками на рівні дуги, якщо:

1) точки поділу є вершини дерева T;

2) ребра дерева T зображаються хордами кола;

3) для кожної допустимої довжини хорди рівно два нецентральних ребра мають таку довжину;

4) для кожного ребра (a; b) існує симетричне йому відносно центра кола ребро (a+k; b+k) дерева T;

5) центром кола є центральна вершина дерева.

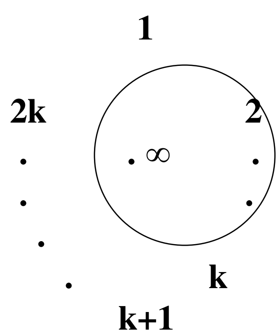

РИС. 2

Під дією циклічної підстановки α=(1, 2 …n) вершин дерева T порядку 2k+1, правильно вписанного у ко-ло, отримаємо сімейство дерев T, T_α,…, T_α^{k-1}, яке являє собою T-факторизацію графа K_n, де n=2k+1, яку називають півобертовою.

Дерево T, яке породжує описаним методом півобертову T-факторизацію, називають її базовою компонентою.

Для часткового підтвердження висунутої гіпотези розглянуто симетричні дерева непарного порядку (до 17-го порядку включно).

Для побудови симетричних дерев більш високих порядків використано діаграми всіх можливих дерев наведених у [6] з кількістю вершин p = {6, 7, 8, 9} за принципом n=2p – 1, тобто як половинок дерев відповідно 11, 13, 15 та 17-го порядків, симетричних відносно центральної вершини. До отриманих дерев також застосовано півобертовий метод знаходження базових компонент T-факторизацій.

За допомогою півобертового методу побудовано всі базові компоненти для порядку n = 13 (у кількості 20), 27 для порядку n = 15 (при загальній кількості 48) і 10 для n = 17 (при загальній кількості 116).

За результатами досліджень складено таблицю, яка наводиться далі.

ТАБЛИЦЯ. Існування деревної факторизації непарного порядку для симетричних дерев

Порядок дерева	Кількість симетричних дерев	Базові компоненти
$n = 3$	1	1) 01 02
$n = 5$	1	1) 14 1∞ 23 3∞
$n = 7$	2	1) 15 1∞ 23 24 4∞ 56 2) 1∞ 15 16 24 34 4∞
$n = 9$	4	1) 1∞ 16 24 25 34 5∞ 68 78 2) 1∞ 16 17 18 25 35 45 5∞ 3) 1∞ 12 13 38 47 56 57 5∞ 4) 1∞ 16 23 24 25 5∞ 67 68
$n = 11$	9	1) 1∞ 12 25 26 2A 34 35 6∞ 89 8A 2) 1∞ 17 18 19 1A 26 36 46 56 6∞ 3) 1∞ 17 18 26 2A 34 36 57 6∞ 89 4) 1∞ 17 18 26 35 36 45 6∞ 8A 9A 5) 1∞ 17 18 19 26 36 45 46 6∞ 9A 6) 1∞ 17 24 25 26 34 6∞ 79 7A 89 7) 1∞ 17 23 24 25 26 6∞ 78 79 7A 8) 1∞ 15 23 24 25 6∞ 6A 78 79 7A 9) 1∞ 14 15 24 34 68 69 6A 79 89
$n = 13$	20	1) 1∞ 18 26 27 35 36 45 7∞ 8C 9B 9C AB 2) 1∞ 18 19 1A 1B 1C 7∞ 72 73 74 75 76 3)1∞ 13 15 16 25 34 7∞ 79 7B 7C 8B 9A 4) 1∞ 13 14 15 16 23 7∞ 79 7A 7B 7C 89 5) 1∞ 15 16 23 25 46 7∞ 7B 7C 8B 89 AC 6) 1∞ 14 15 16 23 24 7∞ 7A 7B 7C 89 8A 7) 1∞ 13 16 25 26 45 7∞ 79 7C 8B 8C AB 8) 1∞ 16 26 36 46 56 7∞ 7C 8C 9C AC BC 9) 1∞ 16 26 36 45 46 7∞ 7C 8C 9C AB AC 10) 1∞ 16 25 26 34 46 7∞ 7C 8B 8C 9A AC 11)1∞ 16 26 35 36 45 7∞ 7C 8C 9B 9C AB 12) 1∞ 16 23 24 25 26 7∞ 7C 89 8A 8B 8C 13) 1∞ 16 34 47 57 67 7∞ 7C 8A 8B 8C 9A 14) 1∞ 16 25 26 35 45 7∞ 7C 8B 8C 9B AB 15) 1∞ 15 16 23 24 25 7∞ 7B 7C 89 8A 8B 16) 1∞ 15 16 25 34 25 7∞ 7B 7C 8B 9A 9B 17) 1∞ 15 16 25 35 45 7∞ 7B 7C 8B 9B AB 18) 1∞ 15 16 2C 36 45 68 7∞ 7B 7C 9C AB 19) 1∞ 16 23 25 26 46 7∞ 7C 89 8B 8C AC 20) 1∞ 14 15 16 24 34 7∞ 7A 7B 7C 8A 9A

Закінчення табл.

Порядок дерева	Кількість симетричних дерев	Базові компоненти
n = 15	48	1) 1∞ 17 26 27 35 36 45 8∞ 8E 9D 9E AC AD BC 2) 1∞ 17 26 27 36 45 46 8∞ 8E 9D 9E AD BC BD 3) 1∞ 17 27 36 37 45 46 8 8E 9E AD AE BC BD 4) 1∞ 16 17 26 35 45 47 8∞ 8D 8E 9D AC BC BE 5) 1∞ 17 26 27 34 35 36 8 8E 9D 9E AB AC AD 6) 1∞ 16 17 25 26 34 35 8∞ 8D8E9C 9D AB AC 7) 1∞ 17 24 26 27 36 45 8∞ 8E 9B 9D 9E AD BC 8) 1∞ 17 25 27 34 37 46 8∞ 8E 9C 9E AB AE BD 9) 1∞ 14 17 26 27 34 35 8∞ 8B 8E 9D 9E AB AC 10) 1∞ 17 25 26 27 34 35 8∞ 8E 9C 9D 9E AB AC 11) 1∞ 17 26 27 36 46 56 8∞ 8E 9D 9E AD BD CD 12) 1∞ 15 16 17 24 25 34 8∞ 8C 8D 8E 9B 9C AB 13) 1∞ 17 24 25 26 27 34 8∞ 8E 9B 9C 9D 9E AB 14) 1∞ 17 27 37 46 47 56 8∞ 8E 9E AE BD BE CD 15) 1∞ 13 16 17 25 26 34 8∞ 8A 8D 8E 9C 9D AB 16) 1∞ 17 27 36 37 45 57 8∞ 8E 9E AD AE BC CE 17) 1∞ 14 16 17 24 37 56 8∞ 8B 8D 8E 9B AE CD 18) 1∞ 17 23 24 25 26 27 8∞ 8E 9A 9B 9C 9D 9E 19) 1∞ 14 15 16 17 23 24 8∞ 8B 8C 8D 8E 9A 9B 20) 1∞ 17 27 37 47 56 57 8∞ 8E 9E AE BE CD CE 21) 1∞ 13 15 16 17 25 34 8∞ 8A 8C 8D 8E 9C AB 22) 1∞ 17 27 37 47 57 67 8∞ 8E 9E AE BE CE DE 23) 1∞ 13 14 15 16 17 23 8∞ 8A 8B 8C 8D 8E 9A 24) 1∞ 12 13 14 15 16 17 8∞ 89 8A 8B 8C 8D 8E 25) 1∞ 16 17 25 26 35 45 8∞ 8D 8E 9C 9D AC BC 26) 1∞ 17 27 36 37 46 56 8∞ 8E 9E AD AE BD CD 27) 1∞ 16 17 24 25 26 34 8∞ 8D 8E 9B 9C 9D AB …
n = 17	116	1) 1∞ 18 27 28 34 36 48 57 9∞ 9K AF AK BC BE CK DF 2) 1∞ 18 27 28 37 47 57 67 9∞ 9K AF AK BF CF DF EF 3) 1∞ 16 18 25 28 35 48 67 9∞ 9E 9K AD AK BD CK EF 4) 1∞ 18 23 26 27 28 47 57 9∞ 9K AB AE AF AK CF DF 5) 1∞ 17 18 27 37 47 57 67 9∞ 9F 9K AF BF CF DF EF 6) 1∞ 18 23 25 27 28 46 48 9∞ 9K AB AD AF AK CE CK 7) 1∞ 18 23 25 27 28 48 68 9∞ 9K AB AD AF AK

		CK EK
		8) 1∞ 17 18 26 27 34 35 36 9∞ 9F 9K AE AF BC BD BE
		9) 1∞ 18 28 38 48 58 67 68 9∞ 9K AK BK CK DK EF EK
		10) 1∞ 18 25 27 28 34 46 48 9∞ 9K AD AF AK BC CE CK
		…

Всі отримані результати повністю підтверджують висунуту гіпотезу. Це дає можливість сподіватися, що для всіх симетричних дерев непарного порядку вона справедлива. Дослідження продовжуються.

О.В. Мироненко

СУЩЕСТВОВАНИЕ Т-ФАКТОРИЗАЦИИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА
ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ДЕРЕВЬЕВ

Исследуется вопрос о существовании T-факторизаци полного графа K_n нечетного порядка $n = 2k + 1$. С помощью полуоборотного метода подтверждается гипотеза «Каждое симметрическое дерево нечетного порядка допускает T-факторизацию» для деревьев порядка $n = 13$, $n = 15$, $n = 17$. По результатам исследований составлена таблица.

O.V. Mironenko

THE EXISTENCE OF T-FACTORIZATION OF ODD ORDER FOR SYMMETRICAL TREES

In this paper we explore the problem of the existence of T-factorization of complete graph K_n of odd order $n = 2k + 1$. The research in this direction is confirm the hypothesis «For each symmetrical tree of odd order T-factorization is possible» for tress of order $n = 13$, $n = 15$, $n = 17$ with the help of a half-turned method. The results of studies are presented in the form of table.

1. *Beineke L.W.* Decomposition of complete graphs into forests // Magyar Tud. Acad. Mat. Kut. Int. Közl.– 1964.– **9**.– P. 589–594.
2. *Petrenjuk A.J.* On tree factorizations of K_{10} // J. of Combin. Math. and Combin. – Computing – 2002.– **41**. P. 193–202.
3. *Петренюк А.Я.* Півобертові деревні факторизації повних графів // Укр. мат. журн. – 2001. **53**, № 5. – С. 710–716.
4. *Петренюк А.Я.* Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Материлы 7 Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения». (Москва, 29 января – 2 февраля 2001). – М.: МГУ, 2001. – С. 26–30.
5. *Мироненко О.В.* Нові результати у типовій задачі існування T-факторизацій порядку 10 // Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 2006. – № 2. – С. 116–125.
6. *Харари Фрэнк.* Теория графов / Пер. с англ. и предисл. В.П. Козырева. Под ред. Г.П. Гаврилова. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 267 с.

Отримано 16.03.2009