УДК 519.8

Г.А. ШУЛИНОК

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛНОГО ПОДГРАФА NA-ГРАФА

Исследуются натуральные арифметические графы. Определяются необходимые и достаточные условия существования полных подграфов в таких графах.

Введение. Существование полного подграфа в NA-графах – интересная проблема, применима к поиску хроматического числа, изоморфизма и другим задачам [1]. Несмотря на ее важность, проблема рассматривается впервые.

Данная работа ставит перед собой цель нахождения необходимых и достаточных условий существования полного подграфа порядка h, т. е. существования подграфа K_h в произвольном натуральном арифметическом графе $G_n(U)$.

В работе [2] дан исчерпывающий ответ по поводу существования подграфа порядка 3. Относительно полного подграфа порядка 4 имеет место следующее свойство.

Лемма 1. Минимальное число образующих, необходимых для построения полного подграфа порядка 4 в связном NA-графе, составляет 5.

Доказательство. Предположим, что существует подграф NA-графа, а именно K_4 с четырьмя образующими. В нем должно быть четыре треугольных грани (рис. 1). Согласно лемме 3 и свойству в доказательстве теоремы 1 из [2] в треугольнике число нечетных образующих равно нулю или двум. Если все образующие графа – четные, то это противоречит условию связности графа. Остаются только два варианта: три образующих – четные и три – нечетные; четыре образующих – нечетные и две – четные. Первый случай возможен только при нечетных образующих (x_1, x_4), (x_2, x_4) и (x_3, x_4). Если четырем образующим соответствует шесть ребер, то двум парам ребер должны соответствовать одинаковые образующие. Учитывая четность образующих, равные образующие соответствуют двум ребрам, обязательно имеющие общую вершину. Но это противоречит общему определению NA-графов. Таким образом, первый случай возможен только при шести образующих. Во втором случае четыре нечетных образующих можно выстроить в последовательность, в которой две соседние образующие принадлежат одному треугольнику. Не нарушая общности, пусть они соответствуют ребрам (x_1,x_4), (x_3,x_4), (x_2,x_3) и (x_1,x_2). Здесь можно выбрать две пары одинаковых образующих, каждая из которых не имеет общей вершины – это $(x_1,x_3)=(x_2,x_4)$ и $(x_3,x_4)=(x_1,x_2)$. Однако, в этом случае два треугольника $x_1x_3x_4$ и $x_1x_2x_4$ совпадают, а $x_2=x_3$, что противоречит начальным условиям. Если оставить только одну пару одинаковых образующих, противоречия не будет. Это и доказывает лемму.

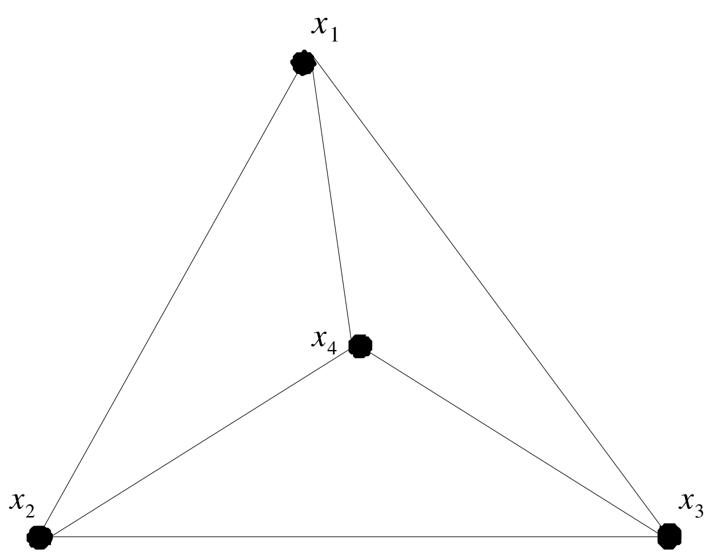

РИС. 1. Полный подграф порядка 4

Из леммы 1 можно определить критерий для полного подграфа K_4.

Лемма 2. Для того чтобы в NA-графе с пятью образующими $G_n(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ был полный подграф, достаточно, чтобы образующие отвечали следующим свойствам:

1) $u_1<u_2<u_3<u_4<u_5$;
2) $u_1+u_2>u_3$;
3) $u_1+u_2+u_3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$;

4) $n \geq u_3 - \dfrac{u_1 + u_2 - u_3}{2}$;

5) $2u_3 = u_1 + u_5 = u_2 + u_4$.

*Доказательство***.** Рассмотрим полный подграф на рис. 1, в котором есть 3 треугольные циклы, содержащие вершину x_1. Определим из образующих данную вершину согласно свойствам треугольной грани. Имеем:

$$x_1 = \frac{u_1 + u_2 - u_3}{2}; \; x_1 = \frac{u_2 + u_3 - u_5}{2}; \; x_1 = \frac{u_1 + u_3 - u_4}{2}. \tag{1}$$

Из соотношений (1) легко получаем

$$\frac{u_1 + u_2 - u_3}{2} = \frac{u_2 + u_3 - u_5}{2} \Rightarrow 2u_3 = u_1 + u_5, \tag{2}$$

$$\frac{u_2 + u_3 - u_5}{2} = \frac{u_1 + u_3 - u_4}{2} \Rightarrow u_2 + u_4 = u_1 + u_5, \tag{3}$$

$$\frac{u_1 + u_2 - u_3}{2} = \frac{u_1 + u_3 - u_4}{2} \Rightarrow 2u_3 = u_2 + u_4. \tag{4}$$

Из равенств (2), (3) и (4) получаем свойство 5.

Свойства 2, 3 и 4 гарантируют достаточное количество треугольных циклов графа. Условие 1 – не ограничивает общность и добавлено для удобства.

Согласно свойствам 2 и 3 в графе имеет место треугольная грань с вершинами (1). Рассмотрим вершину $u_4 = u_3 - x_1$, которая будет связана с вершиной x_1 по определению, с вершиной x_2 – благодаря образующей u_4, а с вершиной x_3 – образующей u_5. Таким образом, имеем полный подграф.

Заметим, что условия в лемме 2 налагаются, в основном, на образующие. Таким образом, можно расширить критерий существования полного подграфа для произвольного связного NA-графа с количеством образующих превышающих 4 и произвольным числом вершин.

Следствие. Произвольный NA-граф с количеством образующих, превышающим 4, имеет подграф, изоморфный K_4, если среди его образующих найдутся пять, отвечающих свойствам леммы 2.

Любой подграф NA-графа можно представить в виде арифметического графа. Поскольку условия леммы 2 касаются в основном множества образующих, то указанный в условии подграф останется натуральным. Значит, к нему применима лемма 2.

В отличие от леммы 2 следствие дает только достаточные условия существования полного подграфа порядка 4. Это учитывая то, что полный подграф можно получить и с помощью шести различных образующих.

Рассмотрим полный подграф порядка 5. На рис. 2 показан его пример. Будем считать вершины и образующие упорядоченными по индексам.

Как видно на рис. 2, первые 4 вершины составляют полный подграф порядка 4. Очевидно, что первые 4 вершины можно с помощью пяти образующих соединить в полный подграф. Данные вершины соединяются с вершиной x_5 дополнительными ребрами. Определим минимальное количество образующих, требуемых дополнительных ребер.

В полном подграфе K_5 можно выделить пять подграфов порядка 4. Определим их. Имеем:

1) подграф из вершин x_1, x_2, x_3, x_4; достаточно пять образующих вида

$$u_1 = x_1 + x_2, u_2 = x_1 + x_3, u_3 = x_1 + x_4 = x_2 + x_3, u_4 = x_2 + x_4, u_5 = x_3 + x_4.$$

Легко показать, что $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$ и выполняются другие условия леммы 2;

2) подграф из вершин x_1, x_2, x_3, x_5; достаточно шесть образующих вида

$$u_1 < u_2 < u_3 < u_{15} = x_1 + x_5 < u_{25} = x_2 + x_5 < u_{35} = x_3 + x_5;$$

3) подграф из вершин x_1, x_2, x_4, x_5; достаточно пять образующих вида

$$u_1 < u_3 < u_{15} = x_1 + x_5 = x_2 + x_4 = u_4 < u_{25} = x_2 + x_5 < u_{45} = x_4 + x_5;$$

4) подграф из вершин x_1, x_3, x_4, x_5; достаточно шесть образующих вида

$$u_2 < u_3 < u_4 < u_5 < u_{35} = x_3 + x_5 < u_{45} = x_4 + x_5;$$

5) подграф из вершин x_2, x_3, x_4, x_5; достаточно пять образующих вида:

$$u_3 < u_4 < u_{25} = x_2 + x_5 = x_3 + x_4 = u_5 < u_{35} = x_3 + x_5 < u_{45} = x_4 + x_5.$$

Таким образом 4 ребра – (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_5), (x_4, x_5) порождаются образующими $u_{15} = x_1 + x_5 = u_4$, $u_{25} = x_2 + x_5 = u_5$, $u_{35} = x_3 + x_5$ и образующей $u_{45} = x_4 + x_5$. Обозначая образующую u_{35} как u_6, а u_{45} как u_7, получим следующий результат.

Лемма 3. Минимальное количество образующих, необходимое для существования полного подграфа порядка 5 составляет 7.

Определим критерий существования полного подграфа порядка 5. Пусть задан NA-граф $G_n(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ и образующие упорядочены в соответствии с индексами. Из рис. 2 видно, что два из полных подграфов графа порядка 4 составляются с помощью шести образующих. Один из этих подграфов –

x_1, x_2, x_3, x_5, второй – x_1, x_3, x_4, x_5. Остальные подграфы составляются с помощью трех различных пятиэлементных подмножеств образующих графа. Рассмотрим данные подмножества: $U_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $U_2 = \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_7\}$ и $U_3 = \{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$. Они должны соответствовать условиям леммы 2. Таким образом, $2u_3 = u_1 + u_5$, $2u_4 = u_1 + u_7$ и $2u_5 = u_3 + u_7$. Отсюда несложно сформулировать свойство, подобное лемме 2 для подграфов порядка 5.

Лемма 4. В NA-графе с семью образующими, содержащем полный подграф, изоморфный K_5, образующие соответствуют следующим условиям:

1) $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5 < u_6 < u_7$;

2) подграф на пяти первых образующих соответствует условиям леммы 2;

3) $2u_4 = u_1 + u_7 = u_3 + u_5 = u_2 + u_6$;

4) $2u_5 = u_3 + u_7 = u_4 + u_6$;

5) $n \geq u_4 - \frac{u_1 + u_2 - u_3}{2}$.

Доказательство. Условие 1 добавлено для удобства. Условие 5 гарантирует достаточное количество ребер. Условия с 2 по 4 вытекают из леммы 2 и подмножеств образующих исходного графа, обеспечивающие подграфы K_4. Итак, рассмотрим полный подграф, построенный на первых пяти образующих, который является, очевидно, K_4, состоящий из вершин x_1, x_2, x_3, x_4. С вершиной x_5 их соединяют образующие u_4, u_5, u_5 и u_7 (рис. 2).

Заметим, что как и в случае с полным подграфом порядка 4, достаточно проверить наличие полного подграфа на первых пяти образующих и соответствия свойству симметричности множества образующих.

Обобщим результаты, распространив их на произвольный полный подграф. Минимальное количество образующих, необходимых для полного подграфа порядка 3 составляет 3, для подграфа порядка 4 – 5, а для подграфа порядка 5 – 7. Легко предположить, что для получения полного подграфа K_6 необходимо 9, а для получения K_7 – 11 образующих. Отсюда получается соотношение минимального количества образующих для получения полного подграфа порядка n: $m = 2n - 3$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Минимальное необходимое число образующих в NA-графе, содержащем полный подграф K_s, составляет $2s - 3$.

Доказательство. Для случая с $s = 3$ доказано в [2]. Леммы 2 и 3 свидетельствуют о справедливости утверждения для $s = 4$ и $s = 5$. Докажем это утверждение для произвольного $m - 2(s + 1) - 3 - 2s - 1$.

Находим критерий существования полного подграфа в заданном натуральном арифметическом графе.

Теорема 2. Граф с $m = 2s - 3$ образующими содержит полный подграф K_s, $s > 3$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $u_1 < u_2 < \cdots < u_m$;

2) $2u_{s-1} = u_1 + u_m = u_2 + u_{m-1} = \cdots = u_{s-2} + u_s$;

3) образующие $u_1, u_2, \dots, u_{m-2}$ составляют полный подграф порядка $s - 1$;

4) $s \geq \dfrac{u_1 + u_2 - u_3}{2}$.

*Доказательство***.** Рассмотрим граф из условия теоремы, в котором есть полный подграф порядка $s - 1$, составленный из первых $m - 2$ образующих исходного графа. Проведем индукцию по порядку полного подграфа.

Для графа порядка 4 это соответствует условиям леммы 2. Для графа порядка 5 – леммы 4.

Пусть имеем полный подграф порядка s, соответствующий условиям данной теоремы. Докажем, что теорема выполняется для графа порядка $s + 1$. Ребра, соединяющие вершины графа K_s с вершиной x_{s+1} сообщаются различными образующими, поскольку имеет место последовательность неравенств $x_1 + x_{s+1} < x_2, + x_{s+1} < x_3 + x_{s+1} < \cdots < x_{s-1} + x_{s+1} < x_s + x_{s+1}$. Последние две суммы превышают все образующие подграфа K_s. Очевидно, что $x_{s-1} + x_{s+1} = u_{m+1}$, $x_s + x_{s+1} = u_{m+2}$. Относительно остальных образующих графа имеем $2u_s = u_1 + u_{m+2}$, т. е. $2u_s = x_1 + x_2 + x_s + x_{s+1} = u_s + x_1 + x_{s+1}$. Отсюда получается, что образующая u_s сообщает ребро (x_1, x_{s+1}). Подобно, ребро (x_2, x_{s+1}) сообщается образующей u_{s+1} и так далее, до образующей u_m. Таким образом, все вершины графа K_s соединяются с вершиной x_{s+1}, образуя полный подграф требуемого порядка, что и требовалось доказать.

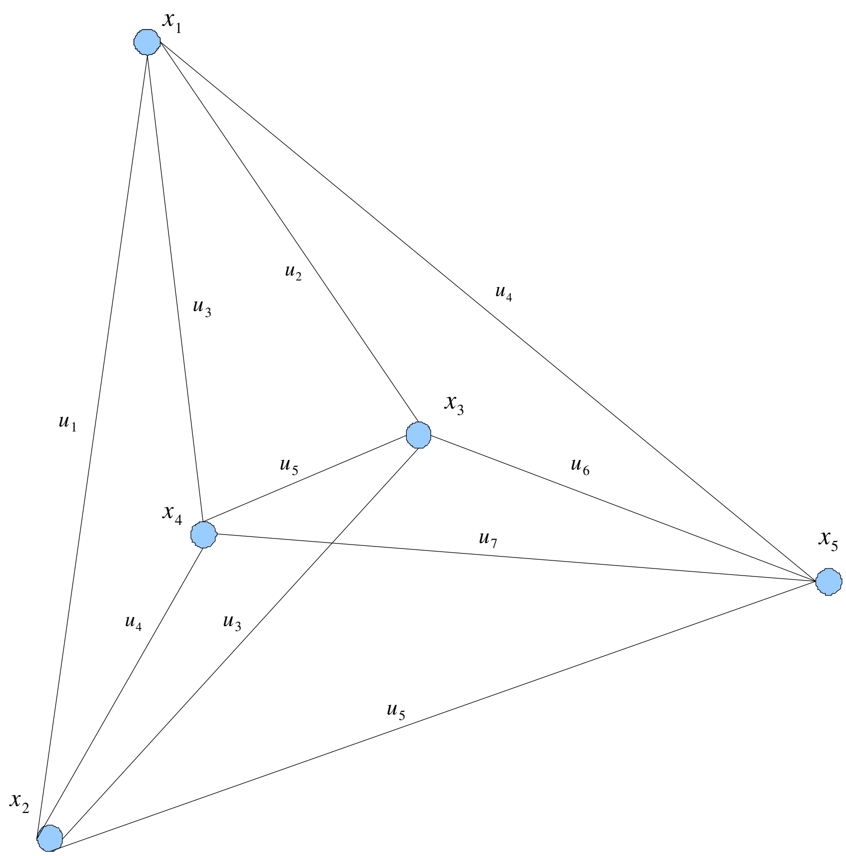

РИС. 2. Полный граф порядка 5 и его образующие

Заключение. Данное исследование является полезным для последующих работ по оценке хроматического числа произвольных натуральных арифметических графов.

Г.О. Шулінок

ПРО МІНІМАЛЬНУ КІЛЬКІСТЬ ТВІРНИХ ПОВНОГО ПІДГРАФА NA-ГРАФА

Досліджуються натуральні арифметичні графи. З’ясовується мінімальна кількість твірних для існування повного підграфа заданого порядку. Доведено ряд тверджень, що дозволяють визначати наявність повного підграфа у заданому довільному натуральному арифметичному графі.

G.A. Shulinok

ABOUT MINIMAL GENERATRIXES SET FOR COMPLETE SUBGRAPH
OF THE NA-GRAPH

Natural arithmetic graphs are considered. Minimal generatrixes set for existence of complete graph of appropriate level is investigated. A number of proposition was proved to determine existence of complete subgraph in the target natural arithmetic graph.

1. *Берж К.* Теория графов и ее применение. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 319 с.
2. *Донец Г.А.*, *Шулинок И.Э.* О хроматическом числе натуральных арифметических графов с тремя образующими // Теория оптимальных решений. – Киев. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2008. – С. 50 – 60.

Получено 20.03.2009