

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РИШЕНЬ

Приводится постановка задачи распределения земляных масс для случая, когда грунт с выемок непригоден для сооружения насыпей и поставщиками грунта для насыпей являются карьеры, расположенные вдоль трассы дороги на некотором расстоянии от нее. Отмечаются особенности задачи распределения земляных масс карьеров, описывается схема алгоритма ее решения на основе метода последовательного анализа вариантов.

© В.И. Билецкий, 2009

УДК 519.8

В.И. БИЛЕЦКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗЕМЛЯНЫХ МАСС И АЛГОРИТМЕ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Как известно, строительство железных дорог осуществляется лишь после нахождения оптимального варианта продольного профиля железнодорожной линии.

На этапе строительства возникают различные оптимизационные задачи. Одна из них – задача нахождения оптимального плана перевозки (или распределения) земляных масс (объемов гранта) от поставщиков к потребителям. Поставщиками грунтов могут быть либо выемки, получены в результате нахождения оптимального варианта проектной линии, либо карьеры, находящиеся на каком-то расстоянии от трассы железной дороги, либо выемки и карьеры в совокупности.

Грунт выемок может быть использован для насыпей лишь в случае его пригодности для их сооружения. Но есть случаи (например, болотистые места и т. п.), когда грунт выемок непригоден для возведения насыпей. Тогда возникает задача нахождения оптимального плана перевозки грунтов от карьеров к потребителям (насыпям), другими словами – задача распределения земляных масс карьеров (РЗМК), которые расположены вдоль трассы на некотором расстоянии от нее и строго упорядочены по расстоянию от начала участка дороги.

В общем случае задача распределения земляных масс карьеров отличается от классической транспортной задачи тем, что ее целевая функция может быть нелинейной.

Стоимость перевозки грунта от поставщиков к потребителям зависит не только от транспортных затрат, но и от количества поставщиков грунтов, их типов и т. п. Кроме того, необходимо учитывать дополнительные затраты на строительство дороги от поставщиков грунтов к сооружаемому объекту и другие расходы. Задача РЗМК – это задача со своими специфическими особенностями, в общем случае, и нелинейная, и недифференцируемая, суть которой состоит в следующем.

Есть множество потребителей грунта, расположенных по трассе железной дороги, каждому из которых требуется определенный объем грунта для сооружения насыпи, и множество поставщиков грунта. Требуется определить план перевозки (доставки) грунта таким образом, чтобы все потребности (объемы грунта) потребителей были удовлетворены и суммарные повариантно-составляющие стоимости сооружения земляного полотна были минимальными.

Структура задачи РЗМК такова, что для нахождения ее решения может быть применен известный и эффективный для решения оптимизационных задач на объектах протяженной структуры метод последовательного анализа вариантов [1].

В математических терминах задачу РЗМК можно сформулировать следующим образом [2].

Пусть на участке сооружения земляного полотна $[x_0, x_n]$ заданы множество абсцисс характерных точек земли вдоль трассы $X = \{x_j\}, j = \overline{0, n}$, и множество $V = \{v_j\}, j = \overline{1, n}$, каждый элемент которого определяет необходимое количество (объем) грунта для возведения насыпи на участке $[x_{j-1}, x_j], j = \overline{1, n}$. Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество номеров поставщиков грунта (карьеров), $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество номеров потребителей грунта, $Z = \{z_i\}_1^m$ – множество абсцисс характерных точек земли, определяющих участки $[z_{i-1}, z_i], i = \overline{1, m}$, $z_0 = x_0, z_m = x_n, Z \subset X$, на которые может быть осуществлена доставка грунта в заданных объемах от i -го поставщика.

Каждому $z_i \in Z$ поставим в соответствие множества

$$X_i = \{x_j \mid z_{i-1} < x_j \leq z_i, x_j \in X\}, i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

и $V_i = \{v_{ij}\}, j = \{j \in M : z_{i-1} < x_j \leq z_j\}$.

Множества $X_i, i = \overline{1, m}$, таковы, что $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$.

Задача заключается в нахождении таких $\bar{Z} = \{\bar{z}_i\}$, $\bar{z}_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, определяющих участки $[\bar{z}_{i-1}, \bar{z}_i]$ и множества

$$\bar{X}_i = \{x_j \mid \bar{z}_{i-1} < x_j \leq \bar{z}_i\}, \bar{x}_j \in X, \bar{X}_r \cap \bar{X}_s = \emptyset, r \neq s, r, s \in M,$$

и $V_i = \{v_{ij}\}$, $j \in \{j: \bar{x}_j \in \bar{X}_i\}$, $i = \overline{1, m}$, чтобы при разработке грунтов в i -х источниках (поставщиках), а также при перевозке их и возведении земляного полотна на участках $[\bar{z}_{i-1}, \bar{z}_i]$, $i = \overline{1, m}$, достигался минимум суммарных строительных (по стоимости) затрат, т. е. найти

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_i(v_{ij})$$

(2) при выполнении условий:

$$\sum_{j \in J_i} v_{ij} \leq B_i, i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$v_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j \in J_i, \quad (4)$$

$$J_i = \{j: \bar{x}_j \in \bar{X}_i\}, i = \overline{1, m}, \bigcup_{i=1}^m J_i = N.$$

Здесь v_{ij} – объем грунта, разрабатываемого в i -м источнике и перевозимого на j -й участок насыпи $[x_{j-1}, x_j]$, $f_{ij}(v_{ij})$ – строительные стоимостные затраты, связанные с разработкой и доставкой грунта от i -го источника в количестве v_{ij} и возведением земляного полотна на участке $[x_{j-1}, x_j]$, B_i – мощность (объем грунта) i -го поставщика.

В критерий оценки ковариантно-составляющих на сооружение насыпи на участке $[x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, n}$, входят стоимость перевозки грунта от источника к потребителю, стоимость сооружения дороги от поставщика к трассе железной дороги, ее ремонта и содержания, стоимость подготовительных работ, разработки непригодных грунтов выемок и их транспортирования, и другие составляющие.

Для описания схемы алгоритма решения дадим постановку задачи (2)–(4) в несколько другом виде.

Как уже было сказано, особенность задачи РЗМК состоит в том, что поставщики грунта, как правило, расположены вдоль трассы дороги на некотором расстоянии от нее и строго упорядочены по расстоянию относительно начала строительства железнодорожного полотна.

Предположим, что каждый поставщик $i \in N$ обеспечивает грунтом группу потребителей X_i , расположенных один за другим, которые образуют таким образом сплошной отрезок и определяют зону влияния поставщика. Тогда реше-

нием задачи (2)–(4) будет совокупность (или последовательность) непересекающихся отрезков $X_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, m}$, $X_r \cap X_s = \emptyset$, $r \neq s$, $r, s \in M$, которые покрывают весь участок строительства $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=1}^m X_i$.

Начало каждого такого отрезка совпадает с абсциссой начала первой насыпи, а конец отрезка совпадает с абсциссой конца последней насыпи в зоне влияния поставщика.

Предположим, что мощности каждого поставщика достаточно для того, чтобы обеспечить в потребности отведенный ему отрезок насыпи, т. е. для каждого потребителя выполняется условие

$$B_i \geq \sum_{j \in J_i} v_{ij}, \quad N \supset J_i = \{j : x_{i-1} < x_j \leq x_i\}, \quad x_i \in X, \quad i = \overline{1, m}.$$

Общие затраты могут быть выражены в виде суммы

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in J_i} f_i(v_{ij}) = \sum_{i=1}^m F(x_{i-1}, x_i), \quad (5)$$

где $F(x_{i-1}, x_i)$ – затраты, связанные с доставкой грунта и сооружением насыпи на участке $[x_{i-1}, x_i]$ – зоны влияния i -го поставщика.

В такой трактовке задачу РЗМК можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти такую последовательность непересекающихся отрезков

$$X_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \bigcup_{i=1}^m X_i = X, \quad X_r \cap X_s = \emptyset, \quad r \neq s, \quad r, s \in M,$$

чтобы общие затраты (5) были минимальными, т. е. необходимо найти

$$\min Z(X) \quad (6)$$

при выполнении условий:

$$\sum_{j \in J_i} v_{ij} \leq B_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j \in J_i, \quad \bigcup_{i=1}^m J_i = N. \quad (8)$$

Если на каком-то участке строительства $[x_{j-1}, x_j]$, $j \in N$, насыпи нет (отсутствует), то для таких участков $v_{ij} = 0$.

Для решения задачи (5)–(8) можно применить один из алгоритмов решения оптимизационных задач на объектах протяженной структуры методом последовательного анализа вариантов – это алгоритм корректирования проектных решений по одному параметру [3].

Пусть $X^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, \dots, x_m^0)$ – некоторое начальное решение задачи (5)–(8), $x_0^0 = x_0$, $x_m^0 = x_n$. Для каждого x_i^0 , $i = \overline{1, m-1}$, определяем область варьирования $G_i = [x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta]$, где δ – некоторый заданный параметр и такой, чтобы выполнялось условие $G_i \subseteq [x_{i-1}^0, x_{i+1}^0]$. Для всего участка строительства дороги область варьирования определяется таким образом:

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m.$$

На первом шаге для всех отрезков $[x_0, x_1]$, $x_0 = x_0^0$, $x_1 \in G_1$, определяем расходы $Z_1(x_1) = F(x_0, x_1)$ на доставку грунта от первого поставщика.

На всех последующих шагах $i = \overline{2, m}$ последовательно для каждого i определяем суммарные строительные затраты

$$Z_i(x_i) = Z_{i-1}(x_{i-1}) + F(x_{i-1}, x_i),$$

где $F(x_{i-1}, x_i)$ – расходы на доставку грунта от i -го поставщика на отрезок насыпей $[x_{i-1}, x_i]$, а затем из множества сравнимых вариантов для каждого $x_i \in G_i$ отбираем лучший (по критерию стоимости), используя рекуррентное соотношение

$$Z_i(x_i) = \min_{x_{i-1} \in G_{i-1}} (Z_{i-1}(x_{i-1}) + F(x_{i-1}, x_i)), \quad i = \overline{2, m}. \quad (9)$$

Оптимальный вариант определяется по формуле (9) при значении $i = M$.

Необходимо отметить, что при конструировании допустимых вариантов учитываются единственные ограничения – это реальные мощности каждого поставщика.

Для нахождения решения обязательным является выполнение условия

$$\sum_{i=1}^m B_i \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{ij},$$

(10) т. е. сумма объемов грунта по всем поставщикам должна превышать суммарные потребности всех потребителей грунта.

Если условие (10) не выполняется, то необходимо найти дополнительный источник грунта (возможно не один), лишь бы достичь его выполнения.

Если начальное решение X^0 задачи (5)–(8) неизвестно, то оно может быть задано последовательностью полусумм абсцисс крайних точек отрезков $d_i = X_{i-1} \cap X_i$, $i = \overline{1, m}$, при выполнении условия

$$X_{i-1} \cap X_i \neq \emptyset \quad \forall i \in M. \quad (11)$$

Если условие (11) не выполняется, то необходимо подкорректировать зоны влияния поставщиков таким образом, чтобы оно выполнялось.

Замечание. Если сооружение насыпей осуществляется из грунтов различных типов, то поиск решения задачи сводится к последовательности решения задач (5)–(8) для каждого типа грунта путем целенаправленного распределения множества источников грунта различных типов.

В.І. Білецький

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ РОЗПОДІЛЕННЯ ЗЕМЛЯНИХ МАС
І АЛГОРИТМ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Наводиться постановка однієї задачі розподілення земляних мас, коли ґрунт із виїмок непридатний для спорудження насипів і поставщиками ґрунту для них є кар'єри, які розташовані вздовж траси дороги на певній відстані від неї. Відмічаються особливості задачі розподілення земляних мас кар'єрів, описується схема алгоритму розв'язування задачі на основі методу послідовного аналізу варіантів.

V.I. Biletsky

ON A PROBLEM OF SOIL MASS DISTRIBUTION AND THE
ALGORITHM OF ITS SOLUTION

We consider a problem of soil mass distribution, when the soil from the groove is inappropriate for levee construction and the soil is taken from borrows, located along the road at a certain distance from it. We point out peculiarities of the borrow soil mass distribution problem, describe the algorithm of its solution using the method of sequential analysis of variants.

1. *Вычислительные* методы выбора оптимальных проектных решений / В.С. Михалевич, Н.З. Шор, Л.А. Галустова и др. – Киев: Наук. думка, 1977. – 178 с.
2. *Сибирко А.Н., Зайцев Р.В.* Последовательные алгоритмы оптимизации при строительстве сложных протяженных объектов // Кибернетика. – 1988. – № 5. – С. 63–69.
3. *О комплексе* задач оптимизации проектных решений по профилю сложных участков дорог (на примере БАМ) / В.С. Михалевич, В.И. Билецкий, Р.В. Зайцев и др. – Киев, 1980. – 46 с. – (Препр./ ИК АН УССР, Ин-т кибернетики; 80-29).

Получено 19.03.2009