УДК 519.21

К.Г. ДЗЮБЕНКО

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ

Изучение изменений стохастического интеграла при варьировании интегрируемой функции тесно связано с задачами статистического оценивания и оптимизации. В работе установлен общий критерий непрерывности линейного случайного функционала, что само по себе объясняет многое. Этот результат применен к установлению сходимости интегралов от детерминированных функций по процессу с ортогональными приращениями, к дифференциальным представлениям.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ представляет собой вероятностное пространство, на котором заданы все рассматриваемые случайные объекты. N и R обозначают множества всех натураль-ных и вещественных чисел соответственно.

Пусть L – линейное пространство. *Случайным функционалом на* L назовем отображение $\varphi(x,\omega): L\times\Omega \to R$, являющееся $\mathscr{F}$-измеримым по ω при каждом $x \in L$. Случайный функционал φ на L *стохастически линеен*, если выполнено $\varphi(\alpha_1(\omega)x_1 + \alpha_2(\omega)x_2, \omega) = \alpha_1(\omega)\varphi(x_1,\omega) + \alpha_2(\omega)\varphi(x_2,\omega)$ п.н. для всех $x_1, x_2 \in L$ и всех случайных величин α_n с $|\alpha_n| \le 1$ п.н., $n = \overline{1,2}$. Пусть τ – топология на L. Случайный функционал φ на L *непрерывен п.н. в точке* $x^* \in L$ *относительно топологии* τ, если для любой $\{x_n,\ n \in N\} \subset L$ с $x_n \to x^*$

Установлен общий критерий непрерывности линейного случайного функционала. Доказана непрерывность стохастического интеграла по интегрируемой функции. Получен дифференциальный вид приращений стохастических интегралов.

в τ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n,\omega)=\varphi(x^*,\omega)$ п.н.

Для случайного функционала φ на L *ядро* $Ker\,\varphi=(Ker\,\varphi)(\omega)=$ $=\{x\in L:\varphi(x,\omega)=0\}$, $\omega\in\Omega$. Ядро стохастически линейного функционала п.н. содержит $\vec{0}$ (нулевой элемент L). Это ядро $Ker\ \varphi$ *стохастически замкнуто относительно топологии* τ, если для любой $\{x_n,n\in N\}\subset L$ с $x_n\to\vec{0}$ в τ и любых случайных величин $\alpha_n(\omega)$ с $|\alpha_n|\le 1$ п.н., $n\in N$, с вероятностью 1 из $\varphi(\alpha_1(\omega)x_1+\alpha_n(\omega)x_n,\omega)=0$ для всех $n\in N$ кроме конечного числа следует $\varphi(\alpha_1(\omega)x_1,\omega)=0$.

Теорема 1. Пусть L – линейное пространство с топологией τ, φ – стохастически линейный случайный функционал на L. Тогда φ непрерывен п.н. на L относительно τ тогда и только тогда, когда $Ker\,\varphi$ стохастически замкнуто относительно τ.

Доказательство. Если φ непрерывен п.н. относительно τ, его ядро стохастически замкнуто: с учетом $x_n\to\vec{0}$ в τ и $|\alpha_n(\omega)|\le 1$ п.н., верны

$$0=\lim_{n\to\infty}\varphi(\alpha_1x_1+\alpha_nx_n)=\lim_{n\to\infty}(\varphi(\alpha_1x_1)+\alpha_n\varphi(x_n))=\varphi(\alpha_1x_1)\text{ п.н.}$$

Теперь предположим, что $Ker\ \varphi$ стохастически замкнуто относительно τ. Докажем, что φ непрерывен в нулевом элементе L. Рассмотрим любую $\{x_n,n\in N\}\subset L$ с $x_n\to\vec{0}$ в τ и любое $\varepsilon>0$. Введем события $A_n=\{|\varphi(x_n,\omega)|\ge\varepsilon\}$, $n\in N$, и случайные величины $\beta_n(\omega)=$ $=\dfrac{\varepsilon}{\varphi(x_n,\omega)}I_{A_n}(\omega)\in[-1,1]$, $\omega\in\Omega$, $n\in N$ (если $\varphi(x_n,\omega)=0$, полагаем $\beta_n(\omega)=0$).

Ввиду стохастической линейности выполнены:

$$\varphi(\beta_n(\omega)x_n,\omega)=\beta_n(\omega)\varphi(x_n,\omega)=\varepsilon I_{A_n}(\omega),\ \omega\in\Omega_n,\ n\in N;$$

$$\varphi(\beta_n(\omega)x_n-\beta_m(\omega)x_m,\omega)=\varepsilon(I_{A_n}(\omega)-I_{A_m}(\omega)),\ \omega\in\Omega_{nm},\ n,m\in N$$

($\Omega_n\in\mathscr{F}$, $\Omega_{nm}\in\mathscr{F}$, $P(\Omega_n)=P(\Omega_{nm})=1$, $n,m\in N$). Введем $\tilde{\Omega}=\bigcap\limits_{n,m\in N}(\Omega_n\cap\Omega_{nm})$ ($P(\tilde{\Omega})=1$). То, что из $\varepsilon I_{A_1}(\omega)-\varepsilon I_{A_n}(\omega)=0$ для всех n кроме конечного числа следует $\varepsilon I_{A_1}(\omega)=0$, равносильно $\omega\in\underline{\lim}(A_n)^C$ ($B^C=\Omega\setminus B$, $B\in\mathscr{F}$). Поэтому, в силу стохастической замкнутости $Ker\ \varphi$, выполнено $P(\tilde{\Omega}\cap\underline{\lim}(A_n)^C)=1$, т. е. $|\varphi(x_n,\omega)|<\varepsilon$ для всех n кроме конечного числа п.н. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это влечет $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n, \omega) = 0$ п.н. Теорема доказана.

Следствие. Непрерывность линейного неслучайного функционала относительно топологии τ равносильна замкнутости его ядра относительно τ.

Пример. Пусть $L = C\,[0,1]$, но с нормой $\|\, x(\cdot) \,\| = \int\limits_0^1 |\, x(t) \,|\, dt$. Рассмотрим линейный функционал $\varphi(x(\cdot)) = x(0)$, $x(\cdot) \in C\,[0,1]$. Он не непрерывен относительно топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|$. Для последовательности $x_n(t) = (1 - nt)\, I_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$, $n \in N$, выполнено $\|\, x_n(\cdot) \,\| = \int\limits_0^{1/n} (1 - nt)\, dt = \dfrac{1}{2n} \to 0$, $n \to \infty$ (полагаем $I_A(\cdot)$ – индикаторная функция множества A). Однако $\varphi(x_n(\cdot)) = 1$, $n \in N$. Отметим, что замыкание ядра $\overline{Ker\ \varphi} = C\,[0,1]$. Действительно, для любой $y(\cdot) \in C\,[0,1]$ функции $y_n(t) = n\, y\left(\dfrac{1}{n}\right) t\, I_{[0,\frac{1}{n}]}(t) + y(t)\, I_{(\frac{1}{n},1]}(t)$, $n \in N$, принадлежат $Ker\ \varphi = \{\, x(\cdot) \in C\,[0,1] : x(0) = 0 \}$, и

$$\|\, y(\cdot) - y_n(\cdot) \,\| = \int\limits_0^{1/n} ny\left(\frac{1}{n}\right) t\ \ dt = \frac{1}{2n}\, y\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $\overline{Ker\ \varphi} \neq Ker\, \varphi$. При этом в пространстве $L_1 = L\,[0,1]$ (с той же нормой) и функционал $\varphi(x(\cdot)) = x(0)$ непрерывен, и $Ker\ \varphi = \overline{Ker\, \varphi}$, так как в $L\,[0,1]$ функции, не равные лишь в одной точке, отождествляются.

Случайный процесс $X(t)$, $t \in [a,b]$, с вещественными значениями будем называть *процессом с ортогональными приращениями*,
если $M\,(X(b) - X(a))^2 < +\infty$ и $M\,(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3)) = 0$, $a \le t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \le b$. Зададим неубывающую функцию $G_X(t) = M\,(X(t) - X(a))^2$, $t \in [a,b]$. Пусть $\mathscr{A}[a,b]$ – σ-алгебра Лебега на $[a,b]$, $\mathrm{A}_2 = L_2([a,b],\ \mathscr{A}[a,b],\ dG_X)$ – пространство измеримых $f : [a,b] \to R$, для которых $r_X(f) = \left(\int\limits_a^b (f(t))^2 dM\,(X(t) - X(a))^2 \right)^{1/2} < +\infty$.

Введение нормы $r_X(\cdot)$ превращает A_2 в линейное нормированное пространство. Функции f_1 и f_2 отождествляются, если $r(f_1 - f_2, X) = 0$. Для разбиения $a = t_{m0} < ... < t_{mm} = b$ ступенчатая функция

$$f_m(t) = \sum_{k=1}^{m-1} c_{mk} I_{[t_{mk}, t_{m,k+1})}(t),\ t \in [a,b], \tag{1}$$

принадлежит A_2, если $r_X(f_m) = \sum_{k=0}^{m-1} (c_{mk})^2 \Delta G(t_{mk}) < +\infty$ (для любой вещественной функции $Y(\cdot)$ на $[a,b]$ обозначаем $\Delta Y(t_{mk}) = Y(t_{m,k+1}) - Y(t_{mk})$). Стохастический интеграл $\int_a^b f(t)\,dX(t)$ задается п.н. как среднеквадратический предел интегралов $\int_a^b f_m(t)\,dX(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{mk}\, \Delta X(t_{mk})$ от произвольной последовательности ступенчатых функций $f_m \in \mathrm{A}_2$ вида (1) таких, что $\lim_{m\to\infty} r_X(f - f_m) = 0$. Значение ступенчатых функций в $t = b$ положено равным нулю, поскольку оно не влияет ни на величину $\int_a^b f_m(t)\,dX(t)$, ни на сходимость в норме $r_X(\cdot)$. Также $\int_a^b f(t)\,dX(t) = -\int_b^a f(t)\,dX(t)$, $b < a$. Корректность такого рода определения интеграла от случайной функции f по квадратично интегрируемому мартингалу обосновывается в фундаментальных работах по теории случайных процессов (см. [1], с. 137–141, [2], с. 278–283). Выполнить такое построение в случае интеграла от неслучайной функции по процессу с ортогональными приращениями позволяет установление изометрии (2) для ступенчатых функций, а затем – для всех функций из A_2.

Лемма. Пусть $a < b$, и $X(t)$, $t \in [a,b]$, – случайный процесс с ортогональными приращениями, $f \in \mathrm{A}_2$. Тогда:

$$M\left|\int_a^b f(t)\,dX(t)\right|^2 = \int_a^b f(t)^2 dM(X(t) - X(a))^2\ . \tag{2}$$

Доказательство. Для $f \in \mathrm{A}_2$ найдутся ступенчатые функции $f_m \in \mathrm{A}_2$ вида (1) такие, что $\lim_{m\to\infty} r_X(f - f_m) = 0$. Для f_m равенство (2) выполнено:

$$M\left|\sum_{k=0}^{m-1} c_{mk}\Delta X(t_{mk})\right|^2 = \sum_{k_1,k_2=0}^{m-1} c_{mk_1}c_{mk_2}M\,(\Delta X(t_{mk_1})\Delta X(t_{mk_2})) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}(c_{mk})^2 M\,(\Delta X(t_{mk}))^2 = \sum_{k=0}^{m-1}(c_{mk})^2\Delta G(t_{mk}) = (r_X(f_m))^2 .$$

Учтено, что $M\,(\Delta X(t_{mk_1})\Delta X(t_{mk_2})) = 0$, $k_1 \neq k_2$. Из неравенства треугольника для $r_X(\cdot)$ следует $\lim\limits_{m_1,m_2\to\infty} r_X(f_{m_1} - f_{m_2}) = 0$. Следовательно

$$M\left|\int_a^b f_{m_1}(t)\,dX(t) - \int_a^b f_{m_2}(t)\,dX(t)\right|^2 = (r_X(f_{m_1} - f_{m_2}))^2 \to 0,\ m_1,m_2\to\infty .$$

В силу фундаментальности последовательности, существует $\int_a^b f(t)\,dX(t) = \underset{m\to\infty}{l.i.m.}\int_a^b f_m(t)\,dX(t)$, единственный с точностью до п.н. Функционал $M\left|\,\cdot\,\right|^2$ на $L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$ непрерывен относительно с.к. сходимости. Переход к пределу в равенстве (2) для f_m влечет (2) для самой f. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $a < b$, и $X(t)$, $t\in[a,b]$, – случайный процесс с ортогональными приращениями. Тогда случайный функционал $\varphi(f) = \int_a^b f(t)\,dX(t)$ на A_2 непрерывен п.н. относительно $r_X(\cdot)$.

Доказательство. Зададим стохастически линейное продолжение линейного п.н. функционала φ. Рассмотрим любые $f\in\mathrm{A}_2$ и случайную величину $\alpha(\omega)$, для которой $\left|\alpha(\omega)\right|\le 1$ п.н. Пусть ступенчатые $f_m\in\mathrm{A}_2$ таковы, что $\lim\limits_{m\to\infty} r_X(f - f_m) = 0$. Тогда, с применением леммы,

$$M\Big(\int_a^b \alpha f_{m_1}dX - \int_a^b \alpha f_{m_2}dX\Big)^2 \le (r_X(f_{m_1} - f_{m_2}))^2 \to 0,\ m_1,m_2\to\infty ,$$

и $\int_a^b \alpha f_m dX$ сходится в с.к. Из $\int_a^b \alpha f_m dX = \alpha\int_a^b f_m dX$, $\omega\in\Omega$, $m\in N$, предельным переходом получаем $\varphi(\alpha(\omega)f(t),\omega) = \alpha(\omega)\varphi(f(t),\omega)$ п.н. Также полагаем $\varphi(\alpha_1 f + \alpha_2 g,\omega) = \varphi(\alpha_1 f,\omega) + \varphi(\alpha_2 g,\omega)$ п.н., где $f,g\in\mathrm{A}_2$, α_1,α_2 – случайные величины с $\left|\alpha_n\right|\le 1$ п.н., $n=\overline{1,2}$. Далее, для любых $\{f_n,\ n\in N\}\subset \mathrm{A}_2$ с $\lim\limits_{n\to\infty} r_X(f_n)=0$ и любых случайных величин $\alpha_n(\omega)$ с $|\alpha_n(\omega)|\le 1$ п.н., $n\in N$, верны:

$$M\left|\int_a^b \alpha_1(\omega) f_1(t)\,dX(t)-\int_a^b(\alpha_1(\omega)\,f_1(t)+\alpha_n(\omega)f_n(t))\,dX(t)\right|^2=$$

$$=M\left|\int_a^b \alpha_n(\omega)f_n(t)\,dX(t)\right|^2=M\left(|\alpha_n(\omega)|^2\left|\int_a^b f_n(t)\,dX(t)\right|^2\right)\le$$

$$\le M\left|\int_a^b f_n(t)\,dX(t)\right|^2=(r_X(f_n))^2\to 0,\ n\to\infty.$$

Тогда $\int\limits_a^b \alpha_1(\omega)\,f_1(t)\,dX(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b(\alpha_1(\omega)\,f_1(t)+\alpha_{n(k)}(\omega)f_{n(k)}(t))\,dX(t)$ п.н. на некоторой $\{n(k),k\in N\}\subset N$. С вероятностью 1, из $\varphi(\alpha_1 f_1+\alpha_n f_n,\omega)=0$ для всех n кроме конечного числа следует $\varphi(\alpha_1 f_1,\omega)=0$. По теореме 1, функционал φ непрерывен п.н. относительно $r_X(\cdot)$. Теорема доказана.

Применим теорему 2 к более частным задачам. Для краткости, полагаем $\Delta X(t_0)=X(t_0+\Delta t)-X(t_0)$, и $[t_1,t_2]=[t_2,t_1]$, $t_2<t_1$.

Теорема 3. Пусть $a<b$, $t_0\in[a,b]$, и выполнены условия:

1) $X(t)$, $t\in[a,b]$, – случайный процесс с ортогональными приращениями;
2) $P(X(t)=X(t_0))=0$, $t\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)\setminus\{t_0\}$, где $\delta>0$;
3) $\dfrac{X(t)-X(t_0)}{(M(X(t)-X(t_0))^2)^{1/2}}$ одинаково распределены, $t\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)\setminus\{t_0\}$;
4) $f:[a,b]\to R$ – измерима, и $\int\limits_a^b (f(t))^2 dM(X(t)-X(a))^2<+\infty$;
5) f непрерывна в t_0.

Тогда $\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t)\,dX(t)=f(t_0)\Delta X(t_0)+o(\Delta X(t_0))$, $\Delta t\to 0$ п.н.

Доказательство. Пусть $\{\Delta t_n\}\subset[a-t_0,b-t_0]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta t_n=0$. Для $n\in N$ положим $d_n=(M(X(t_0+\Delta t_n)-X(t_0))^2)^{1/2}$, $Y_n=\dfrac{1}{d_n}(X(t_0+\Delta t_n)-X(t_0))$,

$$Z_n = \frac{1}{d_n} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t_n} (f(t) - f(t_0))\, dX(t)\ ,\ \ g_n(\cdot) = \frac{1}{d_n}(f(t) - f(t_0)) I_{[t_0, t_0+\Delta t_n]}(\cdot)\, .$$

Выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} r_X(g_n) = 0$, поскольку

$$\frac{1}{d_n^2} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t_n} (f(t) - f(t_0))^2\, dG_X(t) \le \max_{[t_0, t_0+\Delta t_n]} (f(t) - f(t_0))^2 \to 0\, ,\ n\to\infty .$$

Применение теоремы 2 к функционалу $\varphi(g) = \int\limits_a^b g(t)\, dX(t)$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \varphi(0(\cdot)) = 0$ п.н. Распределения величин (Y_n, Z_n) слабо сходятся к распределению $(Y_1, 0)$, поскольку для их характеристических функций:

$$\left| \chi_{(Y_n, Z_n)}(u_1, u_2) - \chi_{(Y_1, 0)}(u_1, u_2) \right| = \left| M \exp(i u_1 Y_n)(\exp(i u_2 Z_n) - 1) \right| \le$$
$$\le M \left| \exp(i u_2 Z_n) - 1 \right| \to 0\, ,\ \ n\to\infty\, ,\ (u_1, u_2) \in R^2$$

(применена теорема Лебега об ограниченной сходимости). Для любого $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\underline{\lim} \left\{ \left| Z_n \right| < \varepsilon \left| Y_n \right| \right\} \right) \ge \underline{\lim}\ P\left(\left| Z_n \right| < \varepsilon \left| Y_n \right| \right) = \lim P\left((Y_n, Z_n) \in D \right) =$$
$$= P\left((Y_1, 0) \in D \right) = P\left(0 < \varepsilon \left| Y_1 \right| \right) = 1,$$

где $D = \{(y,z) : |z| < \varepsilon |y|\}$, и для границы $\partial D = \{(y,z) : |z| = \varepsilon |y|\}$ выполнено $P((Y_1, 0) \in \partial D) = P\left(0 = \varepsilon |Y_1| \right) = 0$. В итоге $P\left(Z_n = o(Y_n),\ n\to\infty \right) =$ $= P\left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \underline{\lim} \left\{ |Z_n| < \frac{1}{m} |Y_n| \right\} \right) = 1$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $a < b$, $t_0 \in [a,b]$, выполнены условия 1)–3) теоремы 3, а также дополнительные условия:

4) $g(t,s) \in C([a,b]^2)$;

5) $g_t'(t,s) \in C([a,b]^2)$.

Тогда $\int\limits_a^{t_0+\Delta t} g(t_0 + \Delta t,\ s)\, dX(s) - \int\limits_a^{t_0} g(t_0,\ s)\, dX(s) = \left(\int\limits_a^{t_0} g_t'(t_0,\ s)\, dX(s) \right) \Delta t +$

$$+ g(t_0, t_0) \Delta X(t_0) + o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)),\ \Delta t \to 0 \text{ п.н.}$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^{t_0+\Delta t} g(t_0 + \Delta t,\ s)\, dX(s) - \int\limits_a^{t_0} g(t_0,\ s)\, dX(s) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} g(t_0,\ s)\, dX(s) +$$

$$+\Delta t\int_a^b\left[\frac{g(t_0+\Delta t,\, s)-g(t_0,\, s)}{\Delta t}-g_t'(t_0,s)\right]I_{[a,t_0+\Delta t]}(s)\,dX(s)+$$

$$+\Delta t\int_a^{t_0+\Delta t}g_t'(t_0,\, s)\,dX(s)=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(g(t_0,\, s)-g(t_0,\, t_0))dX(s)+o(\Delta t)+$$

$$+\ g(t_0,\, t_0)\,\Delta X(t_0)\ +\Delta t\int_a^{t_0}g_t'(t_0,\, s)\,dX(s)+\Delta t\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}g_t'(t_0,\, s)\,dX(s),$$

$\Delta t\to 0$ п.н. Применение теоремы Лагранжа для приращения $g(t_0+\Delta t,\, s)-g(t_0,\, s)$ и равномерной непрерывности $g_t'(t,s)$ на $[a,b]^2$ обеспечивает применение теоремы 2 к соответствующему интегралу от функции $\dfrac{g(t_0+\Delta t,\, s)-g(t_0,\, s)}{\Delta t}-g_t'(t_0,s)$. Теорема 3 применима к первому и последнему слагаемым завершающей части равенств: они равны $o(\Delta X(t_0))$ и $\Delta t\,\Delta X(t_0)\,(g_t'(t_0,t_0)+o(1))=\ o(\Delta X(t_0))$, $\Delta t\to 0$ п.н. соответственно. Этим завершается доказательство теоремы.

Отметим, что для процесса $X(t)$, детерминированного п.н. в некоторой окрестности t_0, утверждения теорем 3 и 4 выполнены. Условия теорем 3 и 4 выполнены для однородных процессов Броуновского движения и Пуассона с вычтенными трендами. Представляет интерес изучение и других процессов в связи с рассматриваемыми задачами.

К.Г. Дзюбенко

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЛІНІЙНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ТА СТОХАСТИЧНИЙ ІНТЕГРАЛ

Встановлено загальний критерій неперервності лінійного випадкового функціоналу. Доведено неперервність стохастичного інтегралу по інтегрованій функції. Отримано диференційний вигляд приростів стохастичних інтегралів.

K.G. Dziubenko

CONTINUITY OF LINEAR FUNCTIONAL AND STOCHASTIC INTEGRAL

General criterion of continuity for linear random functional is established. Continuity of stochastic integral with respect to integrable function is proved. Differential form of stochastic integral increments is obtained.

1. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Булинский А.В.*, *Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2005. – 404 с.