

УДК 517.2

## ЛАМИНАРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ВИХРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗА ПОРИСТОЙ ВСТАВКОЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Е. А. ГАЕВ\*, С. З. ШИХАЛИЕВ\*\*, Е. А. ГАЕВА\*\*

\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\* Национальный авиационный университет, Киев

Получено 2.11.2007

В приближении Навье-Стокса изучается вход вязкой жидкости в плоскую трубу с легкопроницаемой вставкой (ЛПШ) конечной длины на входе. Исследованы случаи достаточно плотной ЛПШ, при которой возникают зоны закрученного течения жидкости за вставкой. При неограниченно высокой плотности ЛПШ решение может быть сопоставлено с тестовыми случаями, имеющимися в литературе. Установлены критические значения плотности ЛПШ, при переходе через которые циркуляционная зона исчезает, а также протяженность и интенсивность циркуляционной зоны в разных условиях, эффекты возникновения несимметричных структур у стенок канала.

У наближенні Нав'є - Стокса вивчається вхід в'язкої рідини у плоский канал з легкопроникною вставкою (ЛПШ) скінченної довжини на вході. Досліджено випадки достатньо щільної ЛПШ, за якою виникають зони закрученої течії. Для необмежено високої щільності ЛПШ розв'язок може бути співставлений з тестовими випадками, що описані у літературі. Встановлені критичні значення щільності, при переході за які циркуляційна зона зникає, а також розміри і інтенсивність циркуляційної зони за різних умов, ефекти виникнення несиметричних структур біля стінок каналу.

Viscous flow entrance into a plane channel with easily penetrable inserts (EPR) of a finite length is studied in the Navier-Stokes approach. Several cases are learned of a significantly dense EPR behind of which a circulation zone is formed. Solutions may be compared with another keystone flows described in literature. Critical EPR densities have been determined below of which no recirculation is formed. Extension and intensity of recirculation zones have been determined, as well as appearance of asymmetrical structures near both walls.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи о внезапном расширении (sudden expansion) и ступеньке (backward-facing step) в плоском канале являются одними из краеугольных проблем двумерной гидродинамики, рассматривавшимися теоретически и экспериментально на протяжении многих лет, начиная с 1970-х годов и по сегодняшний день, например, в работах [1–12] и др. Эти задачи служили как тестовыми в развитии численных методов решения уравнений Навье - Стокса, так и фундаментально-базовыми для понимания природы отрывных течений [2, 7, 11]. Характерной их чертой является образование циркуляционной зоны за ступенькой, длина и интенсивность циркуляционного движения в которой и стали предметом большинства исследований. Такая "ступенька" создает наиболее простые условия отрыва потока, поскольку точка возникновения отрыва фиксирована, а линии тока двумерны. Исследованы как турбулентные [4–6, 11], так и ламинарные [2, 3, 8, 9] режимы течения.

И сегодня практическое значение задачи о ступеньке в потоке определяется ее приложением к управлению пограничным слоем и стабилизации горения [13], к расчету внутренних течений в диффузорах и каналах с внезапным расширением [14],

анализу порожденных ступенькой акустических полей в технической и медицинской диагностике [15], движению воды и транспорту наносов в реках и эстуариях [5], моделированию экологических проблем растительного покрова и городской застройки [16–19, 24], а также для тестирования новейших численных методик [7, 11], исследования устойчивости и бифуркации течений [14, 20]. Дополнительное свидетельство этому дают также ссылки в Интернете [13, 21, 22].

В данной работе, в отличие от всех названных, "ступеньку" на входе в канал предлагается считать проницаемой для потока вязкой несжимаемой жидкости, пористой. Тем самым появляется дополнительный параметр управления потоком – проницаемость ступеньки  $A$ , действующий наряду с параметрами  $h$  (высотой ступеньки) и  $l$  (ее длиной), а также наряду с числом Рейнольдса потока  $Re$ . Изменяя проницаемость  $A$ , можно удлинить или сократить зону циркуляции, а при ее уменьшении за некоторое критическое значение  $A_{кр}$  циркуляция и вовсе исчезает. При очень большом значении  $A$ , отвечающем непроницаемости ступеньки, следует ожидать предельного перехода к известным результатам для "непроницаемой" ступеньки.

Практическое применение описанных эффектов возможно в технической гидромеханике, где встре-

чаются напорные трубопроводы с попутной очисткой воды пористыми фильтрами. Аналогичные течения, неограниченные, однако, стенкой сверху, встречаются и при обтекании лесных массивов или брызгальных систем охлаждения атмосферным потоком, городских застроек [18, 19, 23, 24], так что в этом отношении данная задача служит их моделью.

Работа [25] является первым расчетом, в котором "проницаемые кубики" моделируют городскую застройку. Интерес к таким задачам значительно вырос в последние годы в связи с экологическими проблемами урбанизации [23, 24]. В настоящее время появляются и трехмерные расчеты "проницаемых кубиков" с различным расположением на подстилающей поверхности [18, 19]. Такие расчеты носят пока пробный характер, апробируя новые вычислительные методики – как правило, DNS и LES [11, 19], но и дают в то же время материал для анализа природы и статистики пульсаций в слое крупномасштабных препятствий [19]. Полагаем, что наша постановка и исследование двумерной задачи будут полезны для анализа и названных более сложных задач.

В настоящий момент отсутствуют вычислительные или экспериментальные работы, буквально соответствующие таким "пористым вставкам", как рассмотренные в данном исследовании. Не располагая, таким образом, материалом для сопоставления результатов, для оценки их достоверности мы ранее рассмотрели целый цикл постепенно усложняющихся задач [26–32], что позволило тщательно протестировать алгоритм, прежде чем применить его к данной задаче. Но в предельном случае  $A = \infty$  (непроницаемая ступенька) результаты сопоставимы и с имеющимися экспериментальными и расчетными данными.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Пусть на входе в плоский канал высоты  $H$  у двух его стенок симметрично установлены проницаемые пористые слои высотой  $h_1$  и  $h_2$  каждый,  $h_1 + h_2 \leq H$ , и длиной  $l$ . Вязкая жидкость под действием напора давления  $p(0)$  втекает в начальное сечение канала  $x = 0$ . При исходно равномерном распределении скорости  $U_x(z) = U_0$  жидкость легко проходит через центральную часть канала шириной  $H - (h_1 + h_2)$ , однако на ширине  $[0, h_1]$  у нижней стенки, и на ширине  $[H - h_2, H]$  у верхней она встречает сопротивление элементов структуры, составляющей пористую среду. В результате жидкость хотя и движется сквозь пористые

вставки, но тормозится, оттесняется в центральную часть канала, распределение скоростей резко изменяется – тем резче, чем больше  $A$ . Рассматриваем преимущественно симметричное течение,  $h_1 = h_2$  и  $A_1 = A_2$ .

"Пористую среду", подлежащую изучению, можно реализовать в лабораторном эксперименте системой металлических или деревянных штырьков высоты  $h$ , как это сделано в работе [30] и в экспериментах других авторов. На практике же может быть использована и система сеток той или иной густоты. В математическом моделировании пористой ступеньки воспользуемся предложенными ранее представлениями о легкопроницаемой шероховатости, ЛПШ [23–30]. Аналогичное введение распределенной массовой силы для моделирования так называемой "кэнопи" (сапору) применяют и другие авторы [16, 18, 19, 23, 25].

На начальном этапе течения можно считать применимой модель движения, рассмотренную нами в [26–29], где длина вставки  $l$  принималась бесконечной или полубесконечной. Но по окончании пористой ступеньки,  $x = l$ , имеет место внезапное расширение свободного сечения канала. За непроницаемой ступенькой это привело бы к образованию циркуляционной области [1–12]; в нашем же случае часть жидкости поступает сквозь вставку, так что деформация потока может оказаться недостаточной для циркуляции. Данная качественная картина течения представляется очевидной. Для получения же количественных оценок необходима математическая модель течения.

Естественно, что в предположении ламинарности можно использовать уравнения Навье – Стокса без каких-либо модельных предположений относительно проявления турбулентности в таком течении. Однако представление в задаче проницаемой среды (вставки) все же нуждается в моделировании взаимодействия последней с потоком. Принимаем, как это было сделано в модели ЛПШ [23, 26–30], что пористую среду можно описать разрывной массовой силой  $f_*(z; U)$ , которая обращается в нуль в центре канала,  $h \leq z \leq H - h$ , и равняется некоторой величине  $f(U)$  внутри проницаемого слоя, при  $0 \leq z \leq h$  и  $H - h \leq z \leq H$ , причем последняя пропорциональна локальной скорости течения  $U$  и локальной концентрации препятствий  $n$ :

$$\vec{f} = \frac{1}{2} c_f \cdot \rho \vec{U} U^k S n, \quad (1)$$

где  $c_f$  – эмпирический коэффициент, примерно равный 1 для цилиндрических и 0.4 для сферических препятствий;  $S$  – миделева площадь оди-

ночных препятствий;  $\rho$  – плотность жидкости, а показатель степени  $k$  равен нулю для линейной модели ЛППШ и равен 1 для квадратичной, [28, 32].

В качестве масштабов задачи здесь, как и ранее [26–28], выбираем ширину канала  $H$  и скорость жидкости на входе  $U_0$ . Тогда течение будет описываться безразмерными уравнениями Навье – Стокса в полуполосе  $\{0 \leq x < \infty, 0 \leq z \leq 1\}$  и крайевыми условиями к ним:

$$(\vec{U} \cdot \vec{V})\vec{U} = -grad p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} + \vec{f}_*,$$

$$div \vec{U} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad U = 1, \quad V \equiv 0; \\ z = 0 & \quad U = 0, \quad V = 0; \\ z = 1 & \quad U = 0, \quad V = 0. \end{aligned}$$

На стенках канала  $z = 0$  и  $z = 1$  выполняются условия прилипания и число Рейнольдса определяется по ширине канала  $Re = \frac{U_0 H}{\nu}$ . Очевидно, что безразмерный расход жидкости в начальном сечении равен единице, и должен оставаться таковым в любом последующем. Указанные граничные условия позволяли бы однозначно определить двумерное поле скоростей  $U(x, z)$ ,  $V(x, z)$ , если бы имелась достаточная информация о давлении  $p(x, z)$ . Его задание требует некоторого обобщения.

Иногда требуют, чтобы в сечении, "достаточно далеко" от входного, выполнялись условия стабилизации:

$$z \rightarrow \infty \quad \frac{\partial U}{\partial x} = V = 0.$$

В работе [30] для расчета входа вязкой жидкости в плоский канал с гладкими стенками было предложено замыкать задачу (2), где  $f_* \equiv 0$ , заданием в этом сечении  $x = L_x$ , по окончании так называемого начального участка, постоянного градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta,$$

а величину  $\beta$  брать при этом из расчета стабилизированного течения в канале бесконечной длины. Таким образом, для ламинарного течения в канале с гладкими стенками надо было использовать известный закон сопротивления  $\beta = \frac{12}{Re}$ , [30, 33]. Мы воспользовались той же посылкой при наличии у стенок канала проницаемых слоев (ЛППШ);

тогда величина  $\beta$  становилась подлежащей расчету функцией также от высоты ЛППШ  $h$  и плотности  $A$ . Было показано [26–28], что такое условие определяет задачу однозначно и обеспечивает корректные предельные переходы при  $A \rightarrow 0$  (ЛППШ отсутствует) и  $A \rightarrow \infty$  (ЛППШ становится непроницаемой).

В нашем же случае конечности длины ЛППШ-вставки, когда в последующей части канала восстанавливается профиль Пуазейля, следует снова вернуться к заданию "условия на бесконечности" в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta = -\frac{12}{Re}. \tag{3}$$

Окончательно определяющим безразмерным уравнениям можно придать следующую консервативную форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \\ - \begin{cases} AU, z \in [0, h] \cup [1-h, 1], \\ 0, z \in (h, 1-h), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) - \\ - \begin{cases} AV, z \in [0, h] \cup [1-h, 1], \\ 0, z \in (h, 1-h), \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

В них принят линейный закон силы,  $k = 1$ , и коэффициент  $A = \frac{c'nH}{U_0}$  интерпретируется как безразмерная плотность пористой вставки, обратно-пропорциональная ее "пористости", "проницаемости". Краевые условия принимают вид

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad U = 1, \quad V = 0; \\ z = 0 : \quad U = 0, \quad V = 0; \\ z = 1 : \quad U = 0, \quad V = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$x = x_L : \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\beta.$$

Удаление  $x = x_L$ , на котором ставятся условия на выходе из расчетной области, должно быть много больше длины начального участка течения,  $x_L \gg L_x$ . (Следует отметить, что в цитируемых ниже экспериментальных работах за линейный масштаб принималась высота ступеньки  $h$  и

число Рейнольдса определялось как  $Re = \frac{U_0 h}{\nu}$ . В нашем же случае канального течения такой выбор масштабов привел бы к варьированию безразмерной высоты канала  $\bar{H} = \frac{H}{h}$  с изменением  $h$ , что нефизично).

Краевая задача (3)–(4) с разрывным членом в правой части решалась численным методом конечных разностей, описанным и подробно тестированным нами на вспомогательных задачах бесконечно-протяженной ЛППШ [26–28]. Заметим, что области  $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq z \leq h\}$  и  $\{0 \leq x \leq l, 1-h \leq z \leq 1\}$ , занятые пористой средой, где сила  $f_*$  отлична от нуля, ничем в расчете не выделялись из полной области  $\{0 \leq x < \infty, 0 \leq z \leq 1\}$ . Это вело к значительному упрощению алгоритма, но, в то же время, к определенному недостатку, отмеченному далее. Мы отказались также от возможного (и полезного для стабилизации алгоритма) условия симметрии

$$z = \frac{1}{2} : \quad \frac{dU}{dz} = 0, \quad (5a)$$

чтобы впоследствии рассмотреть и несимметричное расположение вставок ЛППШ, как и устойчивость алгоритма. Типичные параметры расчетной сетки – 162 узла поперек канала и до 320 узлов в направлении  $Ox$ ; общее же их количество 26 000 (и более, если необходимо тестировать точность и сходимость). Время счета на ПК с частотой процессора 2 800 МГц занимало от пары часов до суток в зависимости от расчетных параметров  $Re$  и  $A$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ, ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В результате расчетов получали двумерные поля скорости  $\vec{V}(x, z) = \{U(x, z), V(x, z)\}$  и давления  $p(x, z)$ , которые в достаточной мере иллюстрировали наши предыдущие задачи [26–28]. Здесь, однако, течение лучше характеризовать картиной линий тока и изолиниями давления. Известно, что нахождение линий тока состоит в решении уравнений с уже известными правыми частями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = U(x, z), \quad \frac{dz}{dt} = V(x, z), \\ x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x(t), z(t)$  – параметрическое уравнение линии тока, проходящей через точку плоскости течения  $\{x_0, z_0\}$ . Для их построения по найденному полю скорости была использована коммерческая программа TecPlot. Результирующие картины течения представлены на рисунках 1–6.

На рис. 1, *a* – *г* показаны векторы скорости  $\vec{V}(x, z)$  и линии тока ламинарного течения при  $Re = 100$  в канале со ступеньками единичной длины и безразмерной высоты  $h = 0.3$  у входа в канал. Анализируется изменение картины течения при росте безразмерной плотности пористой вставки от  $A = 5$  до 50. Ввиду симметрии верхней и нижней частей потока, показаны лишь половинки течений. Прямоугольная проницаемая ступенька очерчена контуром. Можно видеть, что поток тормозится внутри пористой вставки тем сильнее, чем больше ее плотность  $A$ , и вытесняется наружу. В центральной области канала течение, наоборот, ускоряется. После того, как поток прошел ступеньку, он резко расширяется на весь канал, абсолютные значения скорости при этом уменьшаются. В первом расчетном случае  $A = 5$ , рис. 1, *a*, однако, обратные линии тока за ступенькой, в области  $x > 1$ , не возникают, профиль скорости потока постепенно выравнивается до обычного для ламинарных течений параболического вида. В предельном случае  $A = 0$  получили бы течение при отсутствии ступеньки – в канале с гладкими стенками.

Во втором расчетном случае, рис. 1, *б* при  $A = 10$ , циркуляционная зона лишь зарождается на удалении  $\frac{x}{H} \approx 0.6$  от ступеньки, при этом она находится у самой стенки, ее габариты еще невелики. (Заметим, что указанное удаление отвечает  $\frac{x}{h} \approx 2$  при ином введении масштабов, поскольку  $\frac{h}{H} = 0.3$ ). С дальнейшим ростом  $A$  циркуляция за ступенькой заметно возрастает, см. рис. 1, *в* для случая  $A = 20$ . Наконец, при  $A = 50$  циркуляционная зона почти такова, как у непроницаемой ступеньки ( $A = \infty$ ). В расчетном случае  $A = 100$ , опубликованном в [31], еще более приближаемся к предельному случаю непроницаемой ступеньки: высота циркуляционной зоны достигает высоты ступеньки, а длина превышает ее в десять раз. Было проведено большое количество расчетов в диапазоне чисел Рейнольдса от 5 до 1000 для подробного численного изучения данного течения.

Проанализируем условия возникновения водоворотной области за ступенькой. Плотность пористой вставки  $A$ , при которой она только появляется, назовем критической  $A_{кр}$ ; она должна зависеть от числа Рейнольдса и высоты ступеньки,  $A_{кр} = A_{кр}(Re, h)$ . Так, для  $Re = 100$  и  $h = 0,3$  эта величина определена как  $A_{кр} = 9$ . Расчеты показывают, что эта функция быстро уменьшается с увеличением  $Re$ , поэтому на рис. 2 использованы логарифмические координаты. Подобную зависи-

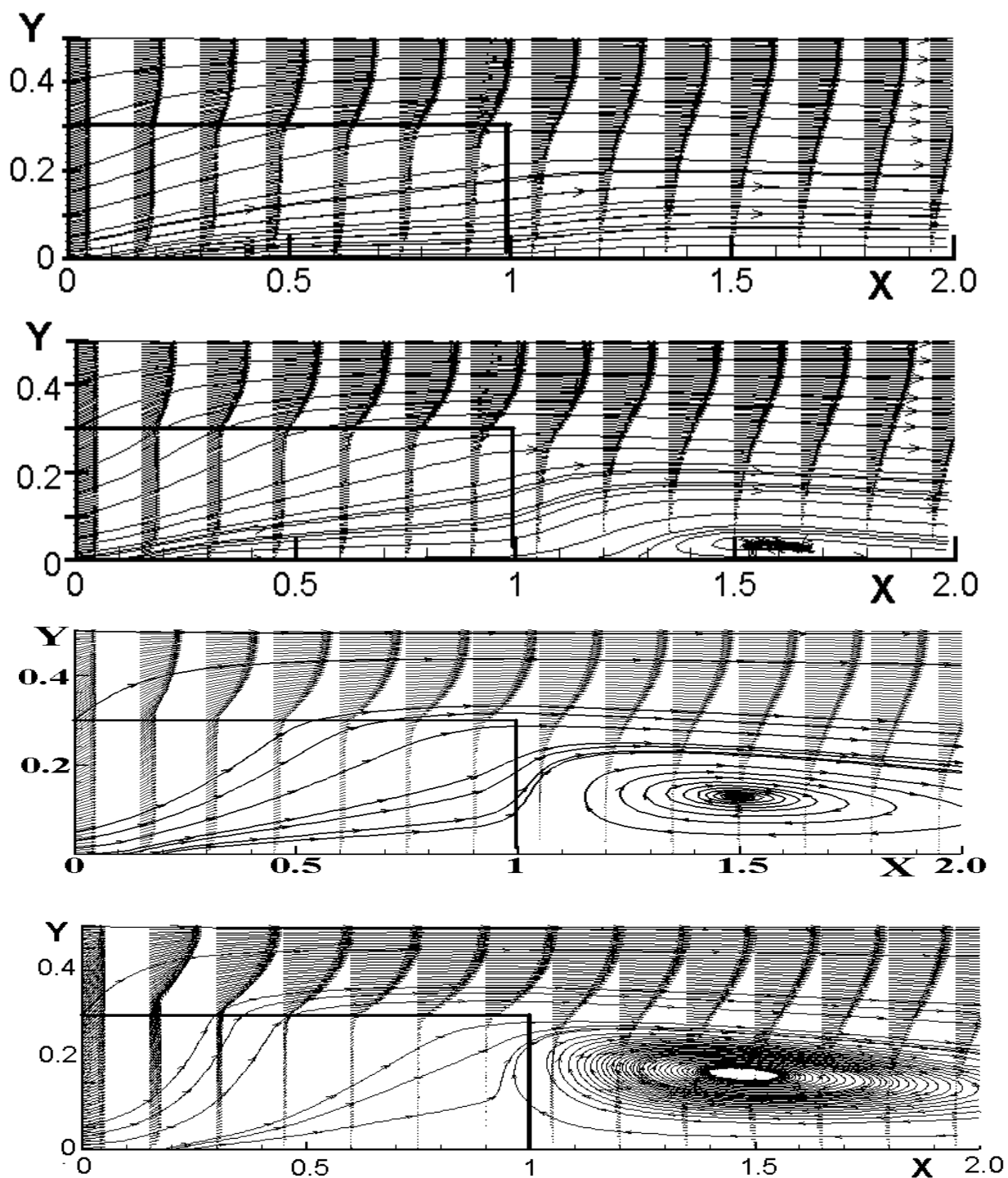


Рис. 1. Последовательный анализ влияния проницаемости пористой вставки  $A$  на вихреобразование за симметричной ступенькой высоты  $h = 0.3$  на входе в канал при режиме  $Re = 100$ :  $a$  – плотность вставки  $A = 5$ ;  $b$  –  $A = 10$ ;  $c$  –  $20$ ;  $d$  –  $50$  (показаны лишь половинки симметричного течения)

мость нельзя найти ни в одной из опубликованных работ.

Отрыв потока за ступенькой ведет к образованию весьма причудливых изолиний давления, показанных на рис. 3. Лишь "далеко вниз" за ступенькой они приходят к типичному для канала виду прямых, перпендикулярных стенке, с линейно убывающими значениями согласно (3). Выражение, взятое выше в кавычки, означает длину области решения  $x = x_L > L$ , на которой ставится граничное условие (3) и которая подбирается в ходе расчетов. Можно видеть, что в районе резкого расширения потока возникает обратный (положительный) градиент давления.

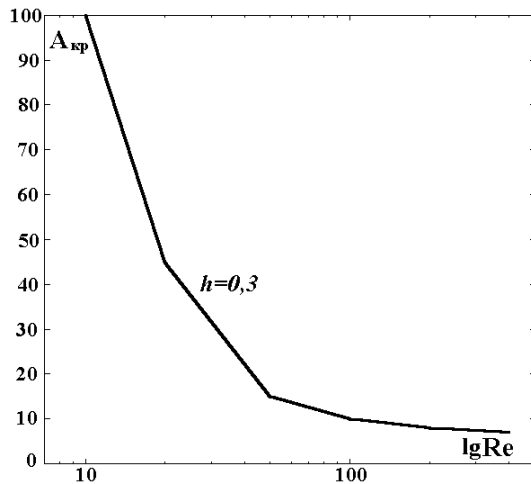


Рис. 2. Зависимость критической плотности ЛПШ-ступеньки  $A_{кр}$  от числа Рейнольдса при относительной высоте ступеньки  $h = 0.3$

Рис. 3 интересен еще и тем, что представляет результаты расчетов несимметричных течений, когда верхние проницаемые ступеньки отсутствуют ( $h_2 = 0$ ); рекомендуется сопоставить эти расчеты с двумя последними случаями симметричного течения на рис. 1: здесь циркуляционные области короче, поскольку расширение потока не столь резкое. Измерения и расчеты Armaly и др. для такого несимметричного течения, но с непроницаемой ступенькой высоты  $h = 0.485$  и режимами  $Re = 100, 389$  и  $1000$  приведены в [9]. В [12] расчеты "односторонней ступеньки" проведены как по схеме идеальной жидкости, так и с учетом вязкости на основе уравнений Навье - Стокса. Некоторые другие расчетные и экспериментальные данные для несимметричного течения приведены в [12, 15].

Для технических задач важно знать геометрические параметры циркуляционной зоны, ее протяжение вдоль канала и высоту. Именно эти па-

раметры проще всего определять из эксперимента или расчета [5, 9, 12]. В данной работе они определялись в большом количестве расчетов и представлены на рис. 4 в зависимости от плотности  $A$  и числа Рейнольдса. Вихревая зона зарождается не сразу за ступенькой  $x = 1$ , а берет начало на некотором удалении от нее  $x = X_1$ , как это видно из рис. 1, б. С ростом плотности ЛПШ-ступеньки  $A$ , однако, координата  $X_1$  быстро приближается к 1.

Длина вихревой зоны в различных работах определялась либо визуально по точке присоединения потока (в [8], например, посредством визуализации дымом), либо по профилям скорости (как в [9]). В наших расчетах длина вихревой зоны  $X_2$  – это дистанция от ступеньки до вертикали, на которой во всех точках профиля скорости  $U(z) \geq 0$ . Эта длина увеличивается вместе с плотностью  $A$  и числом Рейнольдса,  $X_2 = X_2(A, Re)$ , как показано на рис. 4, а. Естественно ожидать, что при  $A \rightarrow \infty$  длина  $X_2$  должна приближаться к тому, что имеет место за непроницаемой ступенькой.

Лишь для этого предельного случая возможно сопоставить наши результаты с данными других авторов. В измерениях Nonji [3] рассматривалось разгоняющееся течение воды над ступенькой; когда же течение устанавливалось, длина области рециркуляции оказывалась в пределах  $5.3 < X_2 < 7$  независимо от числа Рейнольдса в диапазоне  $100 \leq Re \leq 400$ . Sinha e.a. [8] в аэродинамических опытах со ступенькой в пограничном слое (таким образом, для внешней задачи) получили примерно линейный рост длины циркуляционной зоны с ростом  $Re$  в этом диапазоне. Заметим, что они ссылаются и на данные предыдущих исследований, расхождение с которыми составляет  $\pm 20\%$ . Интерполировав их данные, мы нанесли полученные значения на вертикаль  $A = 300$  светлыми значками, рис. 4, а. (Различие введенных масштабов, указанное выше, было учтено).

При  $Re = \frac{U_0 H}{\nu} > 2600$  длина рециркуляционной зоны в их опытах, наоборот, сокращается [8]. Более подробные данные о структуре циркуляционной зоны получены экспериментально и теоретически Armaly e.a. [5]. Для несимметричной ступеньки высоты  $\bar{h} \approx 0.5$ , отличной от наших расчетов, в условиях внутренней задачи они также получили примерно линейный рост длины циркуляционной зоны до  $Re \approx 2200$ , после чего она сокращается. Последний участок, простирающийся до  $Re \approx 11000$ , назван авторами "переходным", после чего длина устанавливается на величине около 8 ("турбулентный" режим), [9]. Линейно интерполированные данные ламинарного участка также

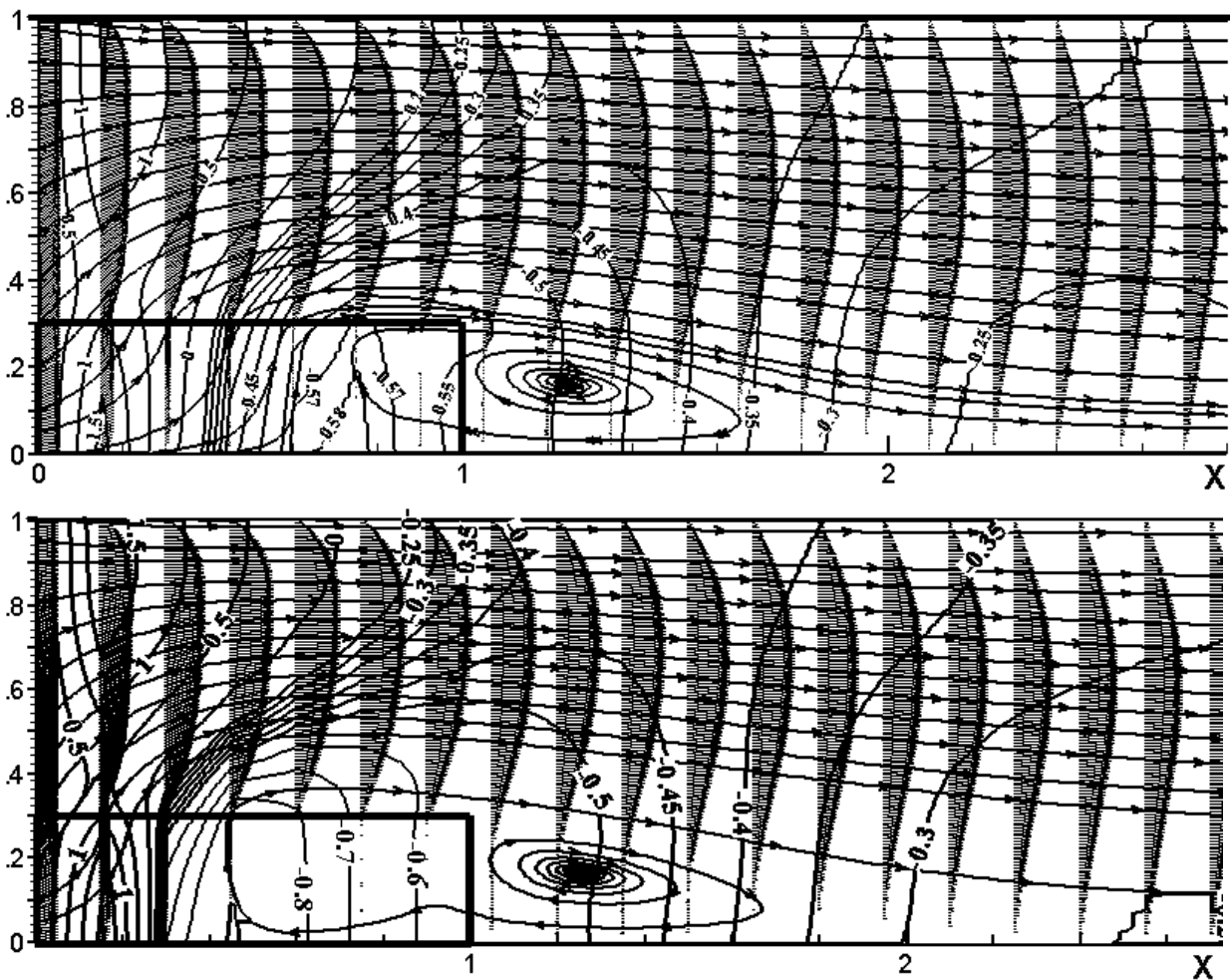


Рис. 3. Изолинии давления наряду с профилями скорости и линиями тока в случаях несимметричного расположения ЛПШ-вставок: у нижней стенки канала  $h_1 = 0.3$  с плотностью  $A = 20$  (верхний рисунок) и плотностью  $A = 50$  (нижний рисунок), у верхней стенки  $h_2 = 0$ . Режим течения  $Re = 100$

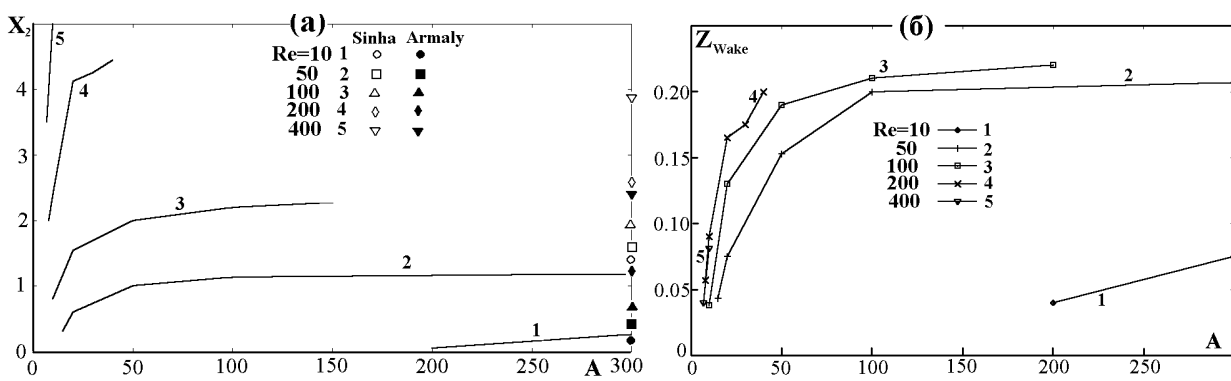


Рис. 4. Геометрические размеры вихревых зон за ступенькой в зависимости от ее проницаемости  $A$  и числа Рейнольдса:  $a$  – длина зоны (значки – экспериментальные данные [8, 9]);  $b$  – высота зоны

нанесены нами темными значками на вертикаль  $A = 300$  рис. 4, а. Можно заключить, что экспериментальные данные двух источников весьма расходятся между собой и, в совокупности, коррелируют с данным расчетом проницаемой ступеньки. Высота циркуляционной зоны  $Z_{wake}$  у нас также увеличивается с  $Re$ , при больших  $A$  достигая значения 0.22, рис. 4, б. Другие авторы сведений по этому параметру не дают.

Следует констатировать один практический недостаток и ограниченность принятой расчетной схемы: с ростом плотности ЛПШ  $A$  сверх некоторой величины (то есть при приближении к предельному случаю непроницаемой ступеньки) резко возрастает время счета – обратите внимание на короткие кривые 3 и 4 для больших  $Re$  на рис. 4, а. Это, очевидно, связано с тем, что движение внутри ЛПШ становится очень слабым, в то время как усилия программы направлены на его уточнение до заданной точности. Положение можно было бы исправить тем, чтобы заторможенное и свободное движения рассчитывать разными алгоритмами, сопрягая результаты по общим границам, как это нами делалось ранее, [32].

Большое практическое значение имеет интенсивность вихревого движения в циркуляционной зоне за ступенькой. Работать с этим параметром весьма сложно; вероятно по этой причине в работах [3, 8, 9] такие данные не приводятся. Вопрос также и в том, что понимать под интенсивностью вихревого движения и как ее измерять. В теории идеальной жидкости принято использовать циркуляцию поля скорости по какому-либо замкнутому контуру  $\gamma$ ,

$$\Gamma = \oint_{\gamma} (\vec{V} \cdot \vec{s}) ds.$$

Однако, ни в одном из опубликованных экспериментов циркуляция не определялась. Также и программа визуализации TecPlot, использовавшаяся для анализа полей течения, не позволяла провести вычисление  $\Gamma$ . Мы, как и опубликованные работы, использовали некоторые приближенные меры интенсивности вращения. Если определить положение "центра вращения" как точки, где  $U(x, z) = 0$ , и удаление от него  $R$  вектора наибольшей скорости  $U_{max}$ , то по аналогии с вращением твердого тела можно найти "угловую скорость" вращения

$$\omega = \frac{U_{max}}{R}.$$

Тогда для случая рис. 1, б найдем  $\omega \approx 0.3$ , а для случая  $A = 100$  завихренность  $\omega \approx 3$ , т.е. в 10 раз

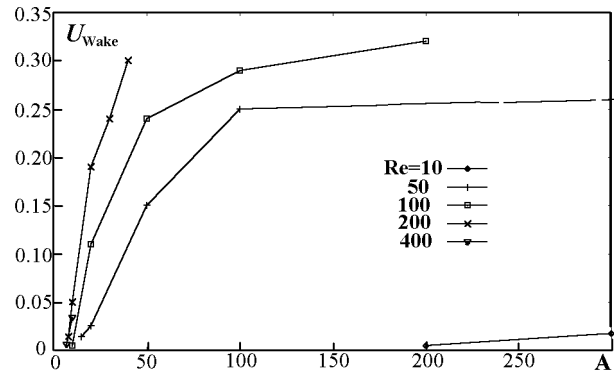


Рис. 5. Наибольшая скорость обратного движения в вихревой зоне за ступенькой в зависимости от  $Re$  и плотности ЛПШ  $A$

выше. Такой примерно линейный характер зависимости  $\omega$  от  $A$  подтверждается и расчетами для  $Re = 400$ .

Интенсивность вихря за ступенькой можно характеризовать и более простой величиной – наибольшей отрицательной скоростью в области за ступенькой  $U_{wake}$ . Рис. 5 показывает, что эта скорость увеличивается с ростом  $A$  или  $Re$ , достигая трети от значения начальной скорости на входе в канал. Сочетая, на основе полученных результатов, изменение  $Re$  (посредством, например, скорости течения) и плотности ЛПШ  $A$ , можно управлять интенсивностью вихревой области.

В гидродинамических расчетах всегда контролируют поведение решения с увеличением числа Рейнольдса, ассоциируя встречающиеся на этом пути математические трудности с физическим явлением возникновения турбулентности. Armaly е.а. [9] довели свои расчеты до  $Re = 1250$ , Горбань [12] – до 500. В нашей задаче наблюдалось, как это часто бывает, резкое возрастание времени сходимости решения с ростом  $Re$ . При  $Re > 1000$  сходимость, вероятно, разрушалась вовсе; использование более мелкой сетки результата не дало. Вероятно, сходимость можно было бы "затянуть" с помощью граничного условия симметрии (5а). Тогда, однако, невозможно было бы исследовать влияние несимметричности ЛПШ у стенок, которое представляет особый интерес. Кроме данных рис. 3, важно и следующее.

Проводились серии расчетов, когда верхняя и нижняя ЛПШ-ступеньки слегка отличались друг от друга или по высоте, или по плотности на  $\pm 5\%$ . Результаты представлены на рис. 6. При малых  $Re$  внесение столь малой асимметрии ступенек вызывало малое изменение картины течения, остававшейся близкой к симметричной. Чув-



ствительность к асимметрии резко возрастала при больших  $Re$ , причем она зависела также от среднего значения плотности ЛПШ, нередко приводя к существенному изменению течения. Рис. 6 представляет результаты расчетов для  $Re = 400$ . На рис. 6, а показано возникновение несимметрии нижней и верхней вихревых зон при плотности ЛПШ-вставок  $A = 10 \pm 5\%$ . Сравнительно небольшое увеличение плотности,  $A = 16 \pm 5\%$ , ведет к резкой асимметрии течения, к образованию даже двух вихрей у одной из стенок, что объясняется, вероятно, взаимодействием вихрей. Аналогичное появления "вторичного вихря" отмечалось в расчетах несимметричного (одностороннего) расширения плоского канала, выполненных Горбанем и др. [12].

Можно предположить, что при таких  $Re$  двумерность и стационарность принятой нами математической модели уже оказывается сильным ограничением по отношению к физическому явлению. Действительно, уже в эксперименте по визуализации течения за резким симметричным расширением плоского канала [1] были получены картины существенно несимметричного течения при  $Re = 114$  и  $Re = 252$  (их определение числа Рейнольдса существенно отличается от принятого здесь). Во втором случае появлялась и третья, удаленная зона циркуляции у одной из стенок, подобная изображенной на рис. 6, б. Интересно, что такие течения в экспериментах [1] оставались устойчивыми и обратимыми: при сильном боковом вдуве положение отрывных зон менялось на симметричное относительно оси канала. Кроме того, течения в области отрыва становились трехмерными, а при еще больших  $Re$  – и нестационарными.

Эксперимент [5] также устанавливает, что при  $Re \simeq 600$  (оценка наша) в зоне обратного течения появляется турбулентность и трехмерность. Еще более интересны измерения и расчеты Armaty e.a. [9]. Рассматривая несимметричную непроницаемую ступеньку  $h \approx 0,5$  в закрытом аэродинамическом канале, они установили наличие сложной структуры течения в зависимости от  $Re$ . Пока число Рейнольдса не превосходило 400, за ступенькой отмечалась одиночная вихревая зона. С ростом  $Re$  появляется новая циркуляционная область на противоположной ровной стенке. Ее габариты примерно следуют размерам основной циркуляции; зона исчезает при переходе к развитой турбулентности. Интересно, что в диапазоне примерно  $1200 < Re < 2500$  на удалении от первой зоны за ступенькой появлялась и небольшая третья.

Если в технических задачах, подобных данной,

довольно часто обнаруживают возвратные течения в потоках, то в задачах экологии [18, 19, 23–25] они встречаются намного реже. Поэтому, привлекают внимание работы [18, 24], где на основе моделирования "проницаемой" городской среды посредством распределенной массовой силы также обнаружена зона циркуляции при переходе от высокой к низкой проницаемой среде (модели городской застройки).

Столь сложное и неоднозначное поведение циркуляционных зон за внезапным расширением в плоском канале привело к появлению новых исследований с позиций теории устойчивости и бифуркаций [14, 20]. Они подтвердили наличие несимметричных и сложных вихревых зон даже за симметричной ступенькой в канале, показали влияние коэффициента расширения потока  $\frac{H}{H - h_1 - h_2}$ , а также асимметрии ступенек  $a = \frac{h_1 - h_2}{H}$ , [14]. Как можно видеть, наши расчеты дают качественно такую же картину, но появляется дополнительная возможность влиять на циркуляционную зону параметром плотности ЛПШ  $A$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, ступенька (backward-facing step) или внезапное расширение (sudden expansion) в плоском канале приводят к разнообразным и сложным картинам течения, далеко не полностью изученным на сегодня. Проницаемость ступеньки в канале, изучаемая в данной работе, придает течению много новых качеств, таких как наличие или отсутствие циркуляционной зоны за ступенькой, возможное появление дополнительных циркуляционных областей, возможность управления последними изменением плотности ЛПШ  $A$ .

Подробную картину течения за проницаемой ступенькой в зависимости от высоты и длины ступеньки, ее проницаемости и числа Рейнольдса потока можно выявить для умеренных  $Re$  посредством прямого численного решения двумерных стационарных уравнений Навье – Стокса при моделировании пористой ступеньки распределенной массовой силой (1).

Проверка решений на тестовых и более простых вспомогательных задачах, а также сравнение с близкими по постановке экспериментами дает уверенность в правильности математической модели и достоверности полученных данных.

Установлено, что возможны разнообразные картины течения (рис. 1, 3 и 6) в зависимости от параметров проницаемой вставки  $A$ ,  $h$  и течения  $Re$ . При безразмерной высоте проницаемой ступеньки

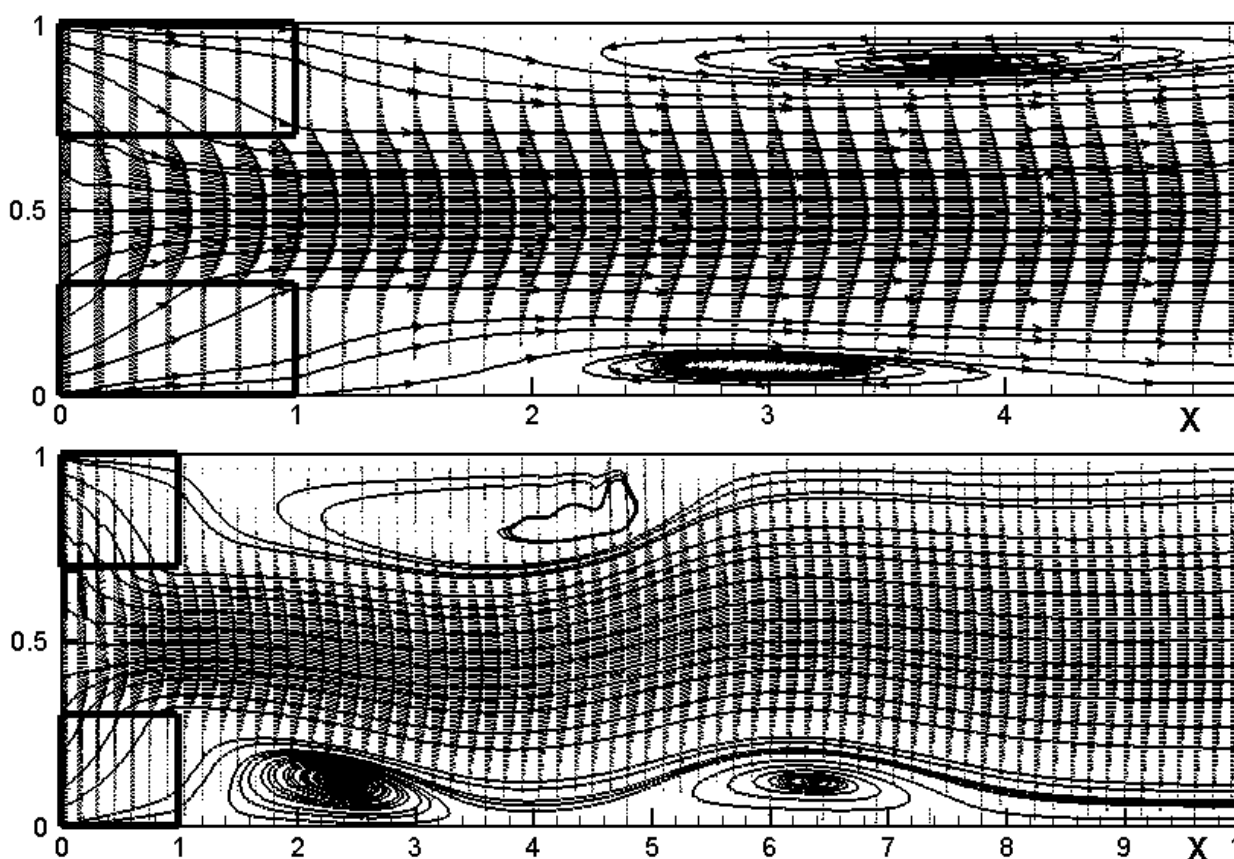


Рис. 6. Постепенное возникновение асимметрии и вторичной вихревой зоны в случае  $Re = 400$  при увеличении плотности ЛПШ-ступеньки:  $a - A = 10$ ,  $b - A = 16$

$h = 0.3$  и различных  $Re$  найдены критические значения плотности ЛПШ  $A_{кр}$ , при которых обратное течение за ступенькой отсутствует, рис. 2. Когда же оно существует – найдены габариты циркуляционной зоны и интенсивность возвратного движения в ней, рис 4 и 5.

Показано возникновение несимметричных форм течения за пронцаемой ступенькой при больших числах Рейнольдса, рис 6. Более полное изучение последних возможно как на базе данного численного алгоритма, так и, особенно, обращением к методам DNS и LES [11, 19] и гидродинамической устойчивости [14, 20]. Хотелось бы также, чтобы численные расчеты ЛПШ стимулировали постановку соответствующих экспериментов.

Практическое применение описанных эффектов возможно в технической гидромеханике (например, для попутной очистки воды в напорных трубопроводах с пористыми фильтрами). Кроме того, они представляют некоторую аналогию задачам об обтекании атмосферным потоком лесных массивов, брызгальных систем охлаждения или

городских застроек [18, 19, 23, 24]. Конечно, для практических приложений настоящее исследование должно быть дополнено подходящими моделями турбулентности в пронцаемой среде ЛПШ.

1. *Durst F., Melling A., Whitelaw J.H.* Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion // *J. Fluid Mech.*– 1974.– V. 64, p. 1.– P. 111 – 128.
2. *Denham M.K., Patrick M.A.* Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel // *Trans. Inst. Chem. Engrs.*– 1974.– **52**.– P. 361.
3. *Honji H.* The starting flow down a step // *J. Fluid Mech.*– 1975.– V. 69, p. 2.– P. 229–240.
4. *Чжен П.* Отрывные течения М.: Мир.– 1977.– Т. 1 – 3.
5. *Etheridge D.W., Kemp P.H.* Measurements of turbulent flows downstream of a rearward-facing step // *J. Fluid Mech.*– 1978.– **86**, P. 3.– P. 545 – 566.
6. *Гогин Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения.– М.: Наука, 1979.– 367 с.

7. *Leschinger M.A.* Practical evaluation of three finite difference schemes for the computation of steady-state recirculation flows // *Comp. Methods of Appl. Mech. Engng.*– 1980.– **23**.– P. 293.
8. *Синха С.Н., Гупта А.К., Оберай М.М.* Ламинарное отрывное обтекание уступов и каверн. Ч. 1. Течение за уступом // *Ракетная техника и космонавтика.*– 1981.– **19**, № 12.– С. 33–37.
9. *Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schönung B.* Experimental and theoretical investigations of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.*– 1983.– **127**.– P. 473–496.
10. *Gartling D. K.* A test problem for outflow boundary conditions. - Flow over a backward facing step // *International Journal for Numerical Methods in Fluids.*– 1990.– **11**.– P. 953–967.
11. *Le H., Moin P., Kim J.* Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step // *J. Fluid Mech.*– 1997.– V. **330**.– P. 349–374.
12. *Горбань В.А., Горбань І.М.* Теоретичний аналіз процесів вихроутворення та динаміки вихорів у каналах // *Прикладна гідромеханіка.*– 2003.– V. **5(77)**.– С. № 3.3–18
13. <http://monet.me.ic.ac.uk/projects/lesCombustion/rdCase.html>. – Течение за ступенькой в канале в применении к проблемам горения. Материалы Prof. Gosman's CFD Group at Mechanical Engineering Dept. of Imperial College (Лондон).
14. *Alleborn N., Nandakumar K., Raszillier H., Durst F.* Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion // *J. Fluid Mech.*– 1997.– V. **330**.– P. 169–188.
15. *Борисюк А.О.* Акустика течій у каналах з локальними нерегулярностями геометрії. Автореф. доктора фіз-мат н.– К.: ІГМ НАНУ, 2006. – 45 с.
16. *Finnigan J.J.* Turbulence in Plant Canopies // *Annual Review of Fluid Mechanics.*– 2000.– N 32.– P. 519–571.
17. *Britter R.E., Hanna S.R.* Flow and Dispersion in Urban Areas // *Annual Review of Fluid Mechanics.*– 2003.– N 35.– P. 469–496.
18. *Coceal O., Belcher S.E.* Mean winds through an inhomogeneous urban canopy // *Boundary-Layer Meteorol.*– 2004.– V. 115.– P. 47–68.
19. *Coceal O., Thomas T.G., Castro I.P., Belcher, S.E.* Mean flow and turbulence statistics over groups of urban-like cubical obstacles // *Boundary-Layer Meteorol.*– 2006.– iss. 121.– P. 491–519.
20. *Barkley D., Gomes M.G.M., Henderson R.D.* Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step // *J. Fluid Mech.*– 2002.– V. **473**.– P. 167–190.
21. [http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag8/Ehemalige/tille/bfs500/index\\_en.html](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag8/Ehemalige/tille/bfs500/index_en.html). – Примеры расчетов течений за ступенькой в канале университета Darmstadt.
22. <http://www.unibas.it/utenti/bonfiglioli/node13.html>. – Пример расчетов течений за ступенькой в канале CBLU, University of Leeds.
23. *Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry.* NATO Science Series (Ye.A. Gayev and J.C.R. Hunt editors), Springer Publ., 2006, V. **236**.– 350 pp.
24. *Нутерман Р.Б., Старченко А.В.* Моделирование распространения загрязнения воздуха в уличном каньоне // *Оптика атмосферы и океана.*– 2005.– **18**, № 8.– P. 649–657.
25. *Сабетта Ф., Пива З., Джачинто М.Д.* Течения Навье-Стокса со взвешенными частицами: математическое моделирование и численные расчеты. – Теор. и прикладн. механика: Труды XIV междунар. конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979. – С. 656–683.
26. *Гаев Е.А., Шихалиев С.З.* Численное исследование входа вязкой жидкости в канал с линейной легкопроницаемой шероховатостью // *Прикладна гідромеханіка.*– 2002.– № 4(76).– С. 32–39.
27. *Гаев Е.А., Шихалиев С.З.* Длина входного участка канала с линейной легкопроницаемой шероховатостью // *Прикладна гідромеханіка.*– 2003.– № 5(77).– С. 13–19.
28. *Гаев Е.А., Шихалиев С.З., Гаева Е.А.* Численное моделирование входа вязкой жидкости в канал с квадратичной легкопроницаемой шероховатостью. Материалы У Міжнародної наук.-техн.конференції. т. 1. Інформаційно-діагностичні системи. Секція14. Комп'ютерні технології. – Київ: Нац. авіац. ун-т, 2003, с. 14.231 - 14.236.
29. *Gayev Ye.A., Shikhaliev S.Z.* Viscous flow through a duct with easily penetrable roughness modelled by Navier-Stokes equations. Abstracts of the NATO Advanced Study Institute #PST.ASI.980064, Kyiv, Ukraine, May 4 – 15, 2004. – 2 pp.
30. *Гаев Е., Сэйвори Э., Той Н.* Исследование неоднородной проницаемой шероховатости в аэродинамическом канале // *Прикладна гідромеханіка.*– 2000.– Т. **2(74)**.– С. N 1.10–19
31. *Гаев Е.А., Шихалиев С.З., Гаева Е.А.* Завихренныя течения в плоском канале за проницаемыми вставками. Материалы УІ Міжнародної наук.-техн. конференції. т. 1. Інформаційно-діагностичні системи. Секція13. Комп'ютерні технології. – Київ: НАУ, 2004.– с. 19 - 22.
32. *Гаев Е.А.* Модели легкопроницаемой шероховатости для задач гидромеханики и теплофизики. Дисс. доктора техн. наук, – К.: ІГМ НАНУ, 2000.
33. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
34. *Тейлор Т.Д., Ндефо Э.* Расчет течений вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления. – Численные методы в механике жидкостей.– М.: Мир, 1973.– 218–229 с.