УДК 539.3

Оптимальное проектирование структурно-неоднородных криволинейных стержней

В. И. Лавинский, С. Ю. Шергин

Харьковский государственный политехнический университет, Харьков, Украина

Предложен комплексный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния и оптимального проектирования произвольных структурно-неоднородных криволинейных стержней в условиях пространственного нагружения, моделирующих обмотки электромагнитных систем электрофизических установок. Необходимые условия оптимальности формулируются по принципу максимума Понтрягина, численная реализация которого проводится на основе метода последовательных приближений по варьируемым функциям. Рассмотрена минимизация веса катушки тороидального магнитного поля крупной электрофизической установки.

Одним из основных элементов конструкций в современной технике являются криволинейные стержни сложного поперечного сечения, составленные из нескольких материалов и находящиеся в экстремальных условиях эксплуатации из-за высокого уровня силового воздействия, интенсивного теплового поля, импульсных динамических нагрузок и других факторов. Большое значение на данном этапе развития науки и техники приобретает разработка оптимального проекта создаваемой конструкции. Все это и обусловливает важность и актуальность создания надежных и корректных методов расчета сложных элементов современных конструкций в условиях интенсивного нагружения с последующей оптимальной перестройкой исходной расчетной схемы.

В данной работе изложен единый алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и оптимального проектирования произвольных структурно-неоднородных криволинейных стержней в условиях пространственного нагружения. Предлагаемый алгоритм состоит из универсальных независимых расчетных модулей, позволяющих определять жесткостные характеристики сечения стержня, параметры НДС и на их основе осуществлять поиск конструкции минимального веса методами оптимального управления.

1. Первый расчетный модуль предназначен для решения задачи по определению параметров напряженно-деформированного состояния искривленного и закрученного многокомпонентного стержня в условиях пространственного нагружения. Нормальное произвольной формы поперечное сечение стержня представляет собой композицию элементов из различных материалов. С использованием предположения о монолитности стержня исходное сечение заменяется эквивалентным с приведенными интегральными изгибными и крутильной жесткостями. Геометрические характеристики стержня (компоненты кривизн и кручения, а также изгибные и крутильная жесткости сечения) задаются непрерывными функциями. Влияние различных подкрепляющих элементов конструкции учитывается введением упругих связей, характеризующихся коэффициентами пропорциональности по линейным и угловым перемещениям.

Параметры напряженно-деформированного состояния криволинейного стержня в произвольном сечении s характеризуются вектором

$$\vec{D}(s) = (\vec{V}, \vec{\Theta}, \vec{M}, \vec{Q})^T,$$

где $\vec{V} = (u, v, w)^T$ – вектор полного линейного перемещения в проекциях на соответствующие оси подвижной системы координат; $\vec{\Theta} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ – вектор угла поворота сечения в той же системе координат; $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ – главный внутренний вектор-момент (его проекции – изгибающие M_x, M_y и крутящий M_z моменты); $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)^T$ – главный вектор внутреннего усилия (Q_x, Q_y – поперечные силы, Q_z – продольная сила); s – координата, отсчитываемая вдоль оси стержня.

Введенные параметры НДС находятся из решения краевой задачи, определяемой системой нелинейных дифференциальных уравнений упругой линии и уравнений равновесия с соответствующими граничными условиями. С использованием итерационного процесса Ньютона–Канторовича линеаризованная краевая задача на каждом шаге решается с помощью метода ортогональной прогонки по Годунову [1].

2. Второй расчетный модуль позволяет определять интегральные крутильную и изгибные жесткостные характеристики сечения структурно-неоднородного стержня. Жесткость при кручении призматического стержня произвольной формы поперечного сечения Ω определяется [2] как интеграл

$$C = 2\iint_{\Omega} U(x, y)\,dx\,dy,$$

где $U(x, y)$ – функция напряжения, удовлетворяющая внутри области Ω уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -2,$$

а на границе Γ этой области – граничному условию $U|_{\Gamma} = 0$. Полагаем, что стержень составлен из материалов с различными модулями сдвига:

$$G(x, y) = G_i = \text{const}; \quad x, y \in \Omega_i; \quad i = \overline{0, m},$$

где Ω_i – подобласти, на которые поверхности раздела сред с разными модулями сдвига разбивают область Ω; $G(x, y)$ – модуль сдвига материала, из которого состоит стержень. На границах раздела сред величины U и $\frac{1}{G}\frac{\partial U}{\partial \nu}$ ($\frac{\partial}{\partial \nu}$ – производная по нормали) должны быть непрерывными:

$$U|_{\Gamma_+} = U|_{\Gamma_-}; \quad \left.\frac{1}{G}\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_+} = \left.\frac{1}{G}\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_-}.$$

При построении приближенного решения задачи о кручении неоднородного стержня применяется метод Ритца, основанный на кусочно-гладкой аппроксимации функции напряжения. Вместе с основным базисом, элементы которого определены везде в области поперечного сечения и обращаются в нуль на границе этой области, используются вспомогательные базисы, связанные с подобластями Ω_i $(i=\overline{l, m})$. Элементы каждого вспомогательного базиса являются непрерывными в области Ω функциями, отличными от нуля только в связанной с этим базисом подобласти. Алгоритм решения задачи о кручении композитных стержней и анализ достоверности полученных результатов путем сравнения их с аналогичными решениями других авторов представлены ранее [3].

Предлагаемая методика применялась для определения крутильных жесткостей одного вида электромагнитных катушек, являющихся основными элементами конструкций электрофизических установок. На рис. 1 приведен один из вариантов поперечного сечения катушки. Крутильная жесткость стержня данного поперечного сечения $C=1{,}675\cdot10^8$ Н$\cdot$м^2. Интегральные изгибные жесткости неоднородного стержня вычисляются на основе традиционной гипотезы плоского сечения. Для стержня, представленного на рис. 1, изгибные жесткости относительно осей x и y равны соответственно $B_x=1{,}872\cdot10^8$ Н$\cdot$м^2, $B_y=2{,}797\cdot10^8$ Н$\cdot$м^2. Достоверность полученных значений жесткостей проверяли экспериментально в работе [4], в которой также нашла подтверждение гипотеза монолитности сечения.

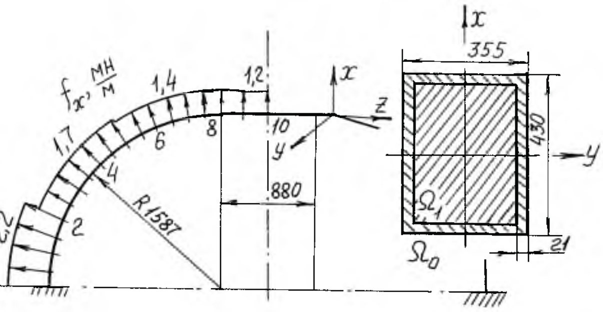

Рис. 1. Расчетная схема и вид поперечного сечения катушки.

3. С использованием описанных алгоритмов построен расчетный модуль оптимизации плоского криволинейного стержня неоднородного поперечного сечения, нагруженного силами в плоскости своей кривизны. Сечение стержня представляется в виде совокупности двух областей: Ω_0 – внешняя двухсвязная область одного материала, Ω_1 – внутренняя односвязная область другого материала.

Необходимо найти функцию распределения толщины h слоя Ω_0 по длине стержня, минимизирующую функционал качества (объем стержня):

$$I=\int_0^L F(s)ds,$$

где $F(s)$ – функция распределения площади сечения по длине стержня; L – длина стержня. Конструктивные ограничения записываются в виде

$$h_1(s) \le h(s) \le h_2(s),$$

где $h_1(s), h_2(s)$ – заданные кусочно-непрерывные функции, в частности $h_1(s)$ может принимать нулевое значение. Кроме того, максимальные нормальные напряжения в областях не должны превышать допускаемых величин:

$$\sigma_0 \le [\sigma]_0; \quad \sigma_1 \le [\sigma]_1.$$

При решении поставленной задачи форму оси стержня и область Ω_1 полагаем неизменными. Расширенный функционал имеет вид

$$I = \int_0^L \left\{ F + \lambda_0 k_0 \left[\frac{\sigma_0}{[\sigma]_0} - 1 \right] + \lambda_1 k_1 \left[\frac{\sigma_1}{[\sigma]_1} - 1 \right] \right\} ds,$$

где λ_0, λ_1 – множители Лагранжа; k_0, k_1 – штрафные функции, определяемые следующим образом:

$$k_0(s) = \begin{cases} 1, & \sigma_0 > [\sigma]_0; \\ 0, & \sigma_0 \le [\sigma]_0; \end{cases} \quad k_1(s) = \begin{cases} 1, & \sigma_1 > [\sigma]_1; \\ 0, & \sigma_1 \le [\sigma]_1. \end{cases}$$

Необходимые условия оптимальности формулируются на основе принципа максимума Понтрягина, численная реализация которого проводится с помощью метода последовательных приближений по варьируемым функциям [5].

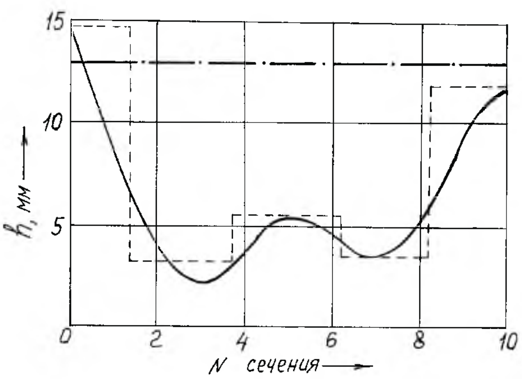

Рис. 2. Оптимальное распределение толщины стального корпуса.

В качестве иллюстрации предлагаемой методики рассматривается минимизация веса катушки тороидального магнитного поля крупной электрофизической установки. Расчетная схема и поперечное сечение катушки представлены на рис. 1, где f_x – интенсивность распределенной нагрузки; Ω_0 – стальная двухсвязная область; Ω_1 – медная односвязная область. Оптимальное распределение толщины стального корпуса h на половине длины катушки приведено на рис. 2 (кривая *1*). Прямая *2* соответствует катушке постоянного поперечного сечения по ее длине, удовлетворяющей прочностным ограничениям. Кривая *3* иллюстрирует распределение толщины стального корпуса, выбранное из требований технологичности изтотовления конструкции. Сравнение приведенных вариантов расчета показывает, что минимальная по весу катушка (вариант *1*) дает 55% экономии стали, технологичная катушка (вариант *3*) – 47% по сравнению с вариантом *2*.

4. Разработанный алгоритм и составленные программы применяются для оценки прочности и оптимального проектирования электромагнитных катушек магнитных систем крупных электрофизических установок.

Р е з ю м е

Запропоновано комплексний алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану й оптимального проектування довільних структурно-неоднорідних криволінійних стрижнів в умовах просторового навантаження, що моделюють обмотки електромагнітних систем електрофізичних установок. Необхідні умови оптимальності формулюються за принципом максимуму Понтрягіна, числова реалізація якого проводиться на основі методу послідовних наближень за варійованими функціями. Розглянуто мінімізацію ваги катушки тороїдального магнітного поля великої електрофізичної установки.

1. *Лавинский В. И., Хавин В. Л., Шергин С. Ю.* Исследование напряженно-деформированного состояния криволинейных плоских электромагнитов // Пробл. машиностроения. – 1984. – Вып. 22. – С. 60 – 65.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. – М., 1963. – 686 с.
3. *Шергин С. Ю.* О задаче кручения неоднородного многокомпонентного стержня // Информ. технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. (Сб. науч. тр. Харьк. гос. политех. ун-та). – 1999. – Ч. 1, вып. 7. – С. 393 – 395.
4. *Автономова Л. В., Лавинский В. И., Шергин С. Ю.* Экспериментальное исследование распределения деформаций при чистом изгибе модели обмотки электрофизической установки // Вест. Харьк. гос. политех. ун-та. – 1999. – Вып. 47. – С. 47 – 49.
5. *Лавинский В. И., Шергин С. Ю.* Об одной задаче оптимизации криволинейных неоднородных стержней // Динамика и прочность машин. – 1985. – Вып. 41. – С. 104 – 108.

Поступила 07. 09. 99