УДК 539.37

Моделирование процессов активного деформирования простых по Ноллу упругопластических материалов с независящим от пути поведением

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Постулируется существование подкласса простых упрочняющихся упругопластических материалов с независящим от пути активного деформирования поведением. Для таких материалов построены общие определяющие соотношения и разработаны подходы к их строгой специализации. Деформации и тип симметрии свойств материала – произвольные. Особое внимание уделено моделированию конечных и бесконечно малых деформаций изотропных материалов. Выполнен анализ полученных уравнений. Показано, при каких предположениях построенные соотношения приводятся к уравнениям деформационной теории Генки.

Ключевые слова: простой упругопластический материал с независящим от пути поведением, конечные и бесконечно малые деформации, определяющие соотношения, изотропные и анизотропные твердые деформируемые тела.

Общие определяющие соотношения теории простых упрочняющихся упругопластических материалов [1] из-за сложности не могут быть применены в приложениях. Известны также трудности их анализа [2]. В связи с этим важное значение приобретает разработка методов строгой специализации (упрощения) общих определяющих соотношений, что позволит не только проанализировать уравнения и выделить удобные для применения в приложениях модели, но и построить иерархию физических зависимостей по уровню сложности реакции материала на деформирование. Согласно работе [2] есть два плодотворных подхода к специализации определяющих соотношений простых материалов: специализация материала и специализация процесса (пути, истории) деформирования.

В работе [1] для произвольных изотропных упрочняющихся упругопластических материалов с независящими от истории пластического деформирования упругими свойствами и поверхностью нагружения Мизеса использована специализация процесса деформирования. Рассмотрены процессы с малым упругим сдвиговым деформированием, малым упругим растяжением, а также с малыми растяжением и спином.

Этот же вид специализации применен для построения определяющих зависимостей в случае пропорциональных [3, 4] и монотонных [5] процессов активного деформирования, а также пропорциональных процессов активного нагружения [6, 7] простых упрочняющихся упругопластических материалов. Никакие ограничения, кроме условия обратимости определяющих соотношений в случае [6, 7], на простой упругопластический материал не накладывались. Особое внимание уделено конечным и бесконечно малым деформациям изотропных материалов. Построены физические уравнения и в ряде случаев [4, 7] проведено их сопоставление с данными известных опытов. Отличительной особенностью изученных ранее процессов [3–7] является то, что по достижении начального предела текучести в них непрерывно реализуется активное деформирование, под которым, как и авторы [8], мы понимаем историю деформирования с возрастающими пластическими деформациями. Далее такие процессы будем называть активным деформированием.

В настоящей работе рассматриваются только те истории, в которых имеет место отмеченная выше особенность активного деформирования и постулируется существование подкласса простых упрочняющихся упругопластических материалов с независящим от пути активного деформирования (далее – с независящим от пути) поведением. Для таких материалов и условий деформирования построены общие определяющие соотношения и разработаны подходы к их строгой специализации. Деформации и тип симметрии свойств материала – произвольные. Особое внимание уделено моделированию конечных и бесконечно малых деформаций изотропных материалов. Выполнен анализ полученных уравнений. Показано, при каких предположениях построенные соотношения приводятся к уравнениям деформационной теории Генки.

Заметим, что исследуемые материалы представляют собой вырожденные по отношению к проявляющим зависимость от пути простым упрочняющимся упругопластическим материалам [1]. Однако для данных материалов определяющие соотношения существенно проще. Причем, как показывают эксперименты [9], они в ряде случаев удовлетворительно описывают механическое поведение некоторых упругопластических материалов при сложных процессах деформирования. Поэтому принимаемые при их выделении предположения находят применение в так называемых деформационных теориях [8–12].

Далее будем рассматривать истории деформирования, начинающиеся из ненапряженного и недеформированного начального состояния. Такое предположение обычно используется в теории пластичности [8–12]. Как следует из данных [1, 2], принятое здесь начальное состояние включает бесконечное множество отличающихся поворотами отсчетных конфигураций, которые являются частными случаями неискаженных конфигураций, используемых при определении как твердого, так и изотропного тел.

Для заданного трехмерного векторного пространства V посредством Lin обозначим бесконечное множество всех линейных преобразований (тензоров второго ранга) на V с $\mathbf{1}$ – тождественным преобразованием. Рассмотрим такие подмножества Lin:

Lin^+ – все элементы Lin с положительным определителем;

Sim – все симметричные элементы Lin;

Sim^+ – все положительно определенные элементы Sim;

Rot – все ортогональные элементы Lin^+.

Определим историю как непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое отображение [1]:

$$\overline{\mathbf{F}}:[0,1] \to Lin^+, \quad \mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}(\tau);$$

во “время” τ значение $\overline{\mathbf{F}}(\tau)$ истории $\overline{\mathbf{F}}$ интерпретируется как градиент деформации в фиксированной материальной точке по отношению к фиксированной отсчетной конфигурации κ_0, принадлежащей во всех рассматриваемых случаях к ненапряженному и недеформированному состоянию.

Пусть F обозначает бесконечное множество всех историй, G – подмножество F, состоящее из всех историй, начальное значение которых есть вращение

$$G := \{\overline{\mathbf{F}} \in F \,|\, \overline{\mathbf{F}}(0) \in Rot\}.$$

Тогда определяющий функционал, описывающий реакцию простого упрочняющегося упругопластического материала, можно записать так [1]:

$$\widetilde{\mathbf{T}}: G \to Sym, \quad \mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{T}}(\overline{\mathbf{F}}). \tag{1}$$

Значение функционала $\widetilde{\mathbf{T}}(\overline{\mathbf{F}})$ дает напряжение Коши $\mathbf{T}$ в конце истории $\overline{\mathbf{F}}$.

Отметим, что изучаемый класс простых материалов [1] обладает поверхностью нагружения.

Далее постулируем, что в классе простых упрочняющихся упругопластических материалов [1] существуют такие, поведение которых при произвольном активном деформировании не зависит от пути. Эксперименты, которые обосновывают применимость деформационной теории пластичности для некоторых материалов при сложном нагружении [9], свидетельствуют о приемлемости в ряде случаев такого постулата. Для этих материалов тензор напряжений в конце активного деформирования полностью определяется значением градиента деформации в конце процесса деформирования, а уравнение (1) принимает вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}(\overline{\mathbf{F}}(1)), \tag{2}$$

где $\mathbf{g}(\overline{\mathbf{F}}(1))$ – тензорная функция тензорного аргумента; $\overline{\mathbf{F}}(1)$ – значение градиента деформации в конце процесса деформирования.

Как следует из [2], уравнение (2) по форме ничем не отличается от определяющего соотношения упругого материала. Однако для рассматриваемых материалов оно справедливо не только внутри начальной поверхности нагружения (упругое деформирование), но и при активном деформировании.

Определяющие соотношения для простых упругопластических материалов должны подчиняться принципу независимости от системы отсчета [1, 2]. Применив последний к (2), подобно тому как это сделано в работе [2], получим приведенную (независящую от системы отсчета) форму определяющего соотношения:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{C}), \tag{3}$$

где $\mathbf{T}^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}$; $\mathbf{R}$ – тензор поворота в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$; $\mathbf{R}^T$ – транспонированный тензор $\mathbf{R}$; $\mathbf{U}$ – правый тензор растяжения; $\mathbf{g}_1(\mathbf{C})$ – тензорная функция тензорного аргумента; $\mathbf{C}=(\mathbf{U})^2$ – правый тензор Коши–Грина. Здесь и далее значение того или иного тензора в конце процесса деформирования будем обозначать так: $\overline{\mathbf{U}}(1)=\mathbf{U}$.

Соотношение (3) не отличается от определяющего соотношения, моделирующего активное деформирование произвольных упрочняющихся упругопластических материалов по монотонным траекториям [5]. Однако оно справедливо для любых, в том числе и монотонных, процессов деформирования частного класса упрочняющихся упругопластических материалов с независящим от пути поведением.

Полученные ранее данные [5] с учетом отмеченных совпадений уравнений используем для построения частных форм определяющих соотношений.

Для изотропных материалов уравнение (3) приведем к виду

$$\mathbf{T}=\mathbf{g}_2(\mathbf{B}), \tag{4}$$

где $\mathbf{g}_2(.)$ – тензорная функция тензорного аргумента, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{Q}\mathbf{g}_2(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T=\mathbf{g}_2(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T) \tag{5}$$

для всех ортогональных $\mathbf{Q}$ и всех симметричных $\mathbf{B}$; $\mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T=\mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T$ – левый тензор Коши–Грина.

Функция, удовлетворяющая требованию (5), называется изотропной. Обратно, если функция $\mathbf{g}_2(.)$ удовлетворяет тождеству (5), то соотношение (4) есть определяющее соотношение изотропного простого материала, отнесенное к используемой при определении изотропного тела неискаженной конфигурации [2]. Согласно данным [2], если используемая отсчетная конфигурация не является неискаженной в отмеченном выше смысле, то уравнение состояния изотропного материала не может иметь вида (4) и в общем случае не выделяется простотой.

Если положить, что $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{1}$, т.е. ограничиться рассмотрением процессов чистого растяжения без вращения [2], то из (3) получим

$$\mathbf{T}=\mathbf{g}(\mathbf{C})=\mathbf{g}(\mathbf{B}). \tag{6}$$

Отметим, что если уравнение (4) справедливо для произвольных простых изотропных упрочняющихся упругопластических материалов с независящим от пути поведением и любых траекторий активного деформирования, то уравнение (6) выполняется только в активных процессах чистого растяжения без вращения для произвольных (не обязательно изотропных) простых упругопластических материалов с независящим от пути поведением.

Соотношение (6) не отличается от физическиго уравнения, моделирующего активные процессы деформирования по пропорциональным траекториям [3], так как последнее справедливо для произвольных простых упрочняющихся упругопластических материалов, в том числе и с независящим от пути поведением.

Для изотропных материалов соотношение (6) приводится к виду (4) при ограничении (5).

Вернемся к произвольным процессам активного деформирования изотропных упрочняющихся упругопластических материалов с независящим от пути поведением, когда справедливы соотношения (4), (5). Анализ уравнений дан, в частности, в [3, 5, 6].

Согласно, например, данным [2, 5, 13] определяющее соотношение (4) в общем случае может быть представлено так:

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \mathbf{B} + \varphi_3 \mathbf{B}^2, \tag{7}$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор; коэффициенты φ_i $(i = 1, \ldots, 3)$ зависят от инвариантов

$$tr\,\mathbf{B},\ tr\,\mathbf{B}^2,\ tr\,\mathbf{B}^3, \tag{8}$$

$tr\,\mathbf{B}$ – след тензора $\mathbf{B}$. Причем в случае простого спектра $\mathbf{B}$ (неравенства всех трех его главных значений) тензоры $\mathbf{1}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^2$ – линейно независимые, а инварианты (8) – функционально независимые [13].

По данным [13] для осесимметричного тензора $\mathbf{B}$ (при наличии у $\mathbf{B}$ одной и только одной пары равных главных значений) уравнение (7) может быть приведено к виду

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \mathbf{B}, \tag{9}$$

где φ_i $(i = 1, 2)$ зависят от

$$tr\,\mathbf{B},\ tr\,\mathbf{B}^2. \tag{10}$$

В рамках теории бесконечно малых деформаций в смысле [3], когда

$$\mathbf{C} \cong \mathbf{B} \cong \mathbf{1} + \mathbf{2}\varepsilon, \tag{11}$$

уравнение (7) можно представить так:

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \varepsilon + \varphi_3 \varepsilon^2, \tag{12}$$

где ε – тензор бесконечно малых деформаций, а коэффициенты φ_i $(i = 1, \ldots, 3)$ определяются инвариантами

$$\varepsilon_0 = tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3. \tag{13}$$

В зависимости (11) знак “$\cong$” обозначает равенство с точностью до бесконечно малых второго порядка малости. В монографии [2] соотношение (11) использовалось при построении моделей упругих и вязкоупругих тел.

В случае справедливости (11) зависимость (9) запишем в виде

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \varepsilon, \tag{14}$$

где φ_i $(i = 1, 2)$ определяются инвариантами

$$\varepsilon_0, \, tr\, \varepsilon^2. \tag{15}$$

Иные формы представления (12), (13) приведены ранее [4].

Соотношения (12), (14), несмотря на следующие из условия (11) бесконечно малые сдвиги, растяжения и углы поворота одного порядка малости, с учетом данных [14] сохранены нелинейными в связи с физической нелинейностью рассматриваемого упругопластического материала на активном участке деформирования.

Как следует из зависимостей (12), (14) и полученных ранее результатов [3, 5], в рамках справедливости условия (11) отсутствует отличие между определяющими соотношениями для пропорционального, монотонного и произвольного активных процессов деформирования изотропных упрочняющихся упругопластических материалов с независящим от пути поведением. Причем для всех указанных процессов главные оси тензоров $\mathbf{T}$ и ε совпадают и не изменяются.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим, что для упругопластического материала [1] при конечных деформациях предполагается существование помимо отсчетной и актуальной также разгруженной (свободной от напряжений) конфигурации, которая является отсчетной при определении упругих деформаций. Последние переводят частицу материала из разгруженной конфигурации в актуальную и равны нулю в первой. Относительно отсчетной конфигурации определяются пластические и полные деформации. Пластические деформации остаются в частице материала после полной разгрузки, когда отсутствуют напряжения и упругие деформации.

При выполнении условия (11) не различают отсчетную, разгруженную и актуальную конфигурации и, как следует, например, из [15], с точностью до бесконечно малых второго порядка малости полные деформации можно разделить так:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \tag{16}$$

где ε^e и ε^p – тензоры бесконечно малых упругих и пластических деформаций соответственно.

В (16) и далее в выражениях для бесконечно малых деформаций (в дальнейшем – деформаций) знак “≅” заменен на “=”, а верхние индексы “e”и “p” при соответствующем объекте обозначают его упругие и пластические составляющие.

Применив разложение тензоров в уравнении (16) на девиаторные и шаровые составляющие и приравняв такие составляющие правой и левой части, получим

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p; \tag{17}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^p, \tag{18}$$

где $\mathbf{e} = \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon_0 \mathbf{1}$ – девиатор тензора деформации; тензор $\frac{1}{3}\varepsilon_0 \mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора деформации, скаляр $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ – среднюю деформацию.

В общем случае при деформировании реальных материалов с упругопластическим поведением, как отмечено в [16],

$$\varepsilon_0^e \neq 0; \tag{19}$$

$$\varepsilon_0^p \neq 0. \tag{20}$$

Для несжимаемого упругопластического материала

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_{\mathbf{0}}^p = \varepsilon_0^e = \varepsilon_{\mathbf{0}}^p = 0. \tag{21}$$

В случае принятия упругопластического материала несжимаемым в разгруженном состоянии (пластически несжимаемым)

$$\varepsilon_0^p = 0 \tag{22}$$

и, как следует из соотношения (18),

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e. \tag{23}$$

При этом

$$\varepsilon^p = \mathbf{e}^p. \tag{24}$$

В последнем случае, как следует из (24), тензор пластических деформаций является девиатором.

Продолжим анализ и специализацию уравнения (12) с коэффициентами, зависящими от инвариантов (13).

Разделив тензоры напряжений и деформаций в уравнении (12) на девиаторные и шаровые составляющие и приравняв соответствующие составляющие правой и левой части, запишем

$$\mathbf{s} = \overline{\varphi}_2 \mathbf{e} + \varphi_3 \left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}(tr\,\mathbf{e}^2)\mathbf{1} \right) = \overline{\varphi}_2 \mathbf{e} + \varphi_3 \left(\mathbf{e}^2 - \frac{2}{3}\mathbf{I}_{2_e}\mathbf{1} \right); \tag{25}$$

$$T_0 = tr\,\mathbf{T} = 3\varphi_1 + \varphi_2\varepsilon_0 + \varphi_3 tr\,\varepsilon^2 = 3\varphi_1 + \varphi_2\varepsilon_0 + \varphi_3\left(tr\,\mathbf{e}^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_0^2\right), \quad (26)$$

где

$$\overline{\varphi}_2 = \varphi_2 + \frac{2}{3}\varphi_3\varepsilon_0; \quad (27)$$

$\mathbf{s} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}T_0\mathbf{1}$ – девиатор напряжений; $\mathbf{I}_{2_e}$ – второй инвариант девиатора деформаций; φ_2 и φ_3 определяются инвариантами (13); тензор $\frac{1}{3}T_0\mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора напряжений, скаляр $\frac{1}{3}T_0$ – среднее напряжение.

Соотношения (25), (26) приводятся к уравнениям, в точности совпадающим с зависимостями Новожилова [17], полученными для изотропного нелинейно-упругого тела иным образом, через удельную работу деформации. В работе [17] отмечено, что эти соотношения могут быть применены для описания деформирования упругопластического материала "... причем окончательные выводы о пределах ее (теории, основанной на этих зависимостях. – *Авт.*) работоспособности в этой области следует сделать только после проведения специально направленных и тщательно поставленных опытов". Если учесть, что идеально изотропных пластических тел в природе не существует, точность экспериментов всегда ограничена, для ряда материалов влияние физической нелинейности весьма мало, а проведение подобных опытов представляет собой чрезвычайно сложную задачу, то получение экспериментального обоснования пределов применимости таких зависимостей весьма проблематично. Почти полувековая история развития теории пластичности после выхода в свет статьи [17] подтверждает этот вывод.

Приведенные в данной работе и ранее [3–5] результаты позволяют математически строго выделить некоторые классы простых упругопластических материалов и процессов их деформирования, для которых отмеченные зависимости Новожилова справедливы.

Для целого ряда упругопластических материалов при малых деформациях можно принять, что упругая составляющая тензора полных деформаций связана с тензором напряжений законом Гука. В этом случае

$$\mathbf{s} = 2\widetilde{G}\mathbf{e}^e; \quad (28)$$

$$T_0 = 3\widetilde{K}\varepsilon_0^e, \quad (29)$$

где $\widetilde{G}$ и $\widetilde{K}$ – зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия. Причем при нулевом значении тензора упругих деформаций тензор напряжений также нулевой. Это следует из определений разгруженной конфигурации и тензора упругих деформаций.

При записи (28) и (29) полагали, что в процессе деформирования упругопластических материалов сохраняется изотропия упругих свойств с изменением последних в процессе активного деформирования. Зависимость упругих свойств ряда материалов с упругопластическим поведением от пластической деформации обнаружена експериментально [18–20]. Систематические исследования такой зависимости в настоящее время отсутствуют. Тем не менее зависимость модуля упругости от пластических деформаций существует и о ней необходимо помнить при формулировке определяющих соотношений.

Пренебрегая зависимостью упругих свойств от пластической деформации, из (28), (29) получаем

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^{e}; \tag{30}$$

$$T_0 = 3K\varepsilon_0^{e}, \tag{31}$$

где G и K – независящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия.

Примем, что девиатор напряжений не зависит от средних деформаций, а среднее напряжение – от девиатора деформаций. Как отмечено, например, в [22], для малых средних деформаций материалов, проявляющих упругопластическое поведение, такое предположение получило экспериментальное подтверждение в широком диапазоне изменения средних напряжений.

Тогда физическое уравнение (25) можно переписать так:

$$\mathbf{s} = \widehat{\varphi}_2\mathbf{e} + \widehat{\varphi}_3\left(\mathbf{e}^2 - \frac{2}{3}I_{2_e}\mathbf{1}\right), \tag{32}$$

где $\widehat{\varphi}_2$ и $\widehat{\varphi}_3$ определяются инвариантами

$$tr\,\mathbf{e}^2,\ tr\,\mathbf{e}^3, \tag{33}$$

а уравнение (26) –

$$T_0 = 3\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_2\varepsilon_0 + \frac{\widetilde{\varphi}_3}{3}\varepsilon_0^2, \tag{34}$$

где $\widetilde{\varphi}_i$ $(i = 1, \ldots, 3)$ зависят только от ε_0.

Заметим, что для рассматриваемой ненапряженной и недеформированной отсчетной конфигурации

$$\varepsilon_0 = 0, \quad T_0 = 0. \tag{35}$$

С целью дальнейшего упрощения определяющих соотношений предположим, что отмеченной в [23] особенностью тензорного пространства, связанной с произведением тензоров при построении определяющих соотношений, можно пренебречь.

Тогда уравнение (32) примет вид

$$\mathbf{s} = \breve{\varphi}_2 \mathbf{e}, \tag{36}$$

где $\breve{\varphi}_2$ зависит от

$$tr\, \mathbf{e}^2. \tag{37}$$

Уравнение (36) с определяемым инвариантом (37) коэффициентом, как следует из (14), (15) в случае независимости девиатора напряжений от ε_0, справедливо и тогда, когда напряжения в упругопластическом материале зависят от особенностей тензорного пространства, связанных с произведением тензоров, однако тензор ε имеет одну пару равных главных значений.

Если считать упругопластический материал несжимаемым, когда справедливо условие (21), то, учитывая (35), из уравнения (34) получим

$$T_0 = 0. \tag{38}$$

В случае принятия упругопластического материала несжимаемым в разгруженном состоянии (пластически несжимаемым), когда справедливы соотношения (22)–(24), из уравнения (34) при выполнении условия (31) следует, что

$$T_0 = 3K\varepsilon_0^e = 3K\varepsilon_0. \tag{39}$$

Из данных [24] видно, что основу деформационной теории Генки составляет соотношение

$$\varepsilon^p = \frac{\varphi}{2G}\mathbf{s} = \overline{\varphi}\mathbf{s}, \tag{40}$$

где φ – параметр Генки.

Зависимость (40) получена в предположении, что материал изотропный как в упругой, так и пластической области; упругие и пластические деформации настолько малы, что можно пренебречь квадратами компонентов тензора по сравнению с первыми степенями; процесс деформирования изотермический и медленный; выделяемая при остаточных деформациях теплота не учитывается; всестороннее сжатие и растяжение не имеют никакого влияния на пластическую деформацию; тела упруго идеально пластические и имеют поверхность пластичности Мизеса; материал сжимаемый; для упругих деформаций справедлив закон Гука; упругие свойства материала не изменяются в процессе активного деформирования.

Уравнение (40), как показано в [10], содержит условие (22), а это значит, что справедлива зависимость (24) и, следовательно, (40) можно переписать так:

$$\varepsilon^p = \mathbf{e}^p = \overline{\varphi}\mathbf{s}. \tag{41}$$

Для принятых в [24] величин деформаций с точностью до бесконечно малых второго порядка малости из данных [15], как отмечалось ранее нами, следует соотношение (16), из которого с учетом (22) можно получить зависимость (23). Из (16), как было показано выше, следует справедливость уравнений (17) и (18). Принимая во внимание (23), уравнение (17) с учетом (30) и (41) преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p = \left(\frac{1}{2G} + \overline{\varphi}\right)\mathbf{s} = \psi\mathbf{s}. \tag{42}$$

Кроме того, из равенства (23) и закона Гука следует соотношение (31).

К зависимости (42) для упрочняемых материалов необходимо присоединить условие упрочнения. Известен ряд таких условий. Согласно данным [25] условие упрочнения может быть принято, в частности, в виде

$$\sqrt{tr\,\mathbf{s}^2} = f\left(\sqrt{tr\,\mathbf{e}^2}\right). \tag{43}$$

С помощью (42) находим

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\psi}\mathbf{e} = \overline{\psi}\mathbf{e}. \tag{44}$$

Возведя (44) в квадрат и взяв след от полученного выражения, запишем

$$\overline{\psi} = \sqrt{(tr\,\mathbf{s}^2)/(tr\,\mathbf{e}^2)}. \tag{45}$$

Тогда, учитывая (43) и (45), (44) перепишем так:

$$\mathbf{s} = f_1(tr\,\mathbf{e}^2)\mathbf{e}. \tag{46}$$

Уравнение (46) в точности совпадает с соотношением (36).

Зависимости (16), (17), (22)–(24), (30), (36), (37), (39), известные как соотношения деформационной теории Генки–Надаи–Ильюшина [8–10, 12], описывают поведение подчиняющегося принятым при их получении предположениям простого упругопластического материала с независящим от пути поведением.

Приведенные физические уравнения, моделирующие активное деформирование, справедливы для произвольных процессов.

Разработанный подход к специализации определяющего соотношения (12) справедлив и для совпадающих с ним по форме физических уравнений, моделирующих пропорциональные и монотонные процессы деформирования произвольных изотропных упрочняющихся упругопластических материалов [4, 5]. Причем для указанных процессов в случае тех же упрощающих предположений, принимаемых при специализации, полученные зависимости полностью совпадут с приведенными в настоящей статье.

Резюме

Постулюється існування підкласу простих зміцнюваних пружнопластичних матеріалів із незалежною від шляху активного деформування поведінкою. Для таких матеріалів побудовано загальні визначальні співвідношення та розроблено підходи до їх строгої спеціалізації. Деформації і тип симетрії властивостей матеріалу – довільні. Особлива увага приділяється моделюванню скінченних та нескінченно малих деформацій ізотропних матеріалів. Виконано аналіз отриманих рівнянь. Показано, за яких припущень побудовані співвідношення приводяться до рівнянь деформаційної теорії Генки.

1. *Lucchesi V., Owen D. R., and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 3 // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
2. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 1972.
3. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
4. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Анализ определяющих соотношений и сопоставление их с экспериментами // Там же. – № 6. – С. 43 – 55.
5. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов монотонного деформирования простых материалов с упругопластическим поведением // Там же. – 1999. – № 6. – С. 35 – 41.
6. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Там же. – 2000. – № 3. – С. 56 – 68.
7. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Сопоставление теории с экспериментами // Там же. – № 4. – С. 45 – 53.
8. *Ольшак В., Мруз З., Пежина П.* Современное состояние теории пластичности. – М.: Мир, 1964. – 243 с.
9. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Изд. 2-е. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
10. *Mase G. E.* Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. – New York and Panama: Mcgraw-Hil Book Company, 1970.
11. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950.

12. *Freudenthal A. M. and Geiringer H.* The mathematical theories of the inelastic continuum // Handbuch der Physik. – Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. – **6**. – P. 229 – 433.
13. *Rivlin R. S. and Ericksen J. L.* Stress-deformation relations for isotropic materials // J. Ration. Mech. Analysis. – 1955. – **4**, N 5. – P. 681 – 702.
14. *Новожилов В. В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
15. *Casey J.* Approximate kinematical relation in plasticity // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, N 7. – P. 671 – 682.
16. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
17. *Новожилов В. В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной упругой среде // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, вып. 2. – С. 183 – 194.
18. *Жуков А. М.* Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30 – 57.
19. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58 – 82.
20. *Шишмарев О. А., Кузьмин Е. Я.* О зависимости упругих постоянных металла от пластической деформации // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3. – С. 167 – 169.
21. *Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г.* Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
22. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
23. *Новожилов В. В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 5. – С. 794 – 812.
24. *Hencky H.* Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierduch im Material herforgerufenen Nachspannungen // ZAMM. – 1924. – Bd. 4, H. 4. – S. 323 – 334.
25. *Шмидт Р.* О зависимости между напряжениями и деформациями в области упрочнения. Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит-ры., 1948. – С. 231 – 256.

Поступила 28. 09. 2000